Université de Nice
Département de Mathématiques
L3MASS, année 2019-2020
Calcul stochastique et Finance

NOM : .
PRENOM : .

Feuille de réponses du TP 3
Prix d'une option comme espérance conditionnelle de son payoff

L'objet de cette séance est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option, Call ou Put, comme l'espérance de son payoff actualisé, **à toute date** t. Comme précédemment, on modélise les prix par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\texttt{up},\texttt{down}\}$, en introduisant une fonction $(i,j) \mapsto S(i,j)$ représentant toujours la valeur de l'actif S_t à l'instant $t = i\delta t$ s'il y a eu j up depuis l'instant $t = 0$.

Pour calculer la prime d'un Call sur l'actif S_t on va utiliser la formule $C_0 = \mathbb{E}(\phi(S(n,J))/R^n$, et plus généralement la formule $C_t = \mathbb{E}(\phi(S(n,J_i))|\mathcal{F}_t)/R^n$ où J_i est une variable aléatoire qui suit une loi binômiale : $\mathbb{P}(\{J_i = j\}) = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{i-j}$.

1. 0n pose $n = 100$; $S_0 = 140$; $\sigma = 0.3$; $r = 0.15$ et $K = S_0$. Définir la fonction $S(i,j)$ et les deux matrices CC et PP comme aux précédents TP. Quelles primes du Call et du Put trouvez-vous ?

2. Expliquer, en vous aidant de l'aide de Scilab, ce que retourne `binomial(p,n)'` puis expliquez pourquoi la commande `max(S(n,0:n)-K,0)*binomial(p,n)'` calcule l'espérance du payoff du Call $\mathbb{E}(\phi(S(n,J))$.

3. En déduire la valeur de la prime du Call à la monnaie (n'oubliez pas l'actualisation !) puis celle de la prime du Put à la monnaie. Expliquer vos calculs. Comparer avec les valeur obtenues à la première question.

4. 0n a, pour tout $t \in 0, \delta t, ...T$, la relation suivante dite *relation de parité Call-Put* entre les prix des Call et des Put $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$. Vérifier par un calcul que cette relation est vraie à l'instant final $t = T$.

5. Vérifier que cette relation est satisfaite à l'instant initial $t = 0$ avec les valeurs obtenues à la question 3 pour les primes des Call et Put.

6. Le code suivant permet de calculer le prix d'un Call $C(i,j)$ à un instant $t = i\delta t \in \{0, \delta t, 2\delta t, ...\}$ quelconque (et non plus seulement en $t = 0$).

```
function cal=C(i,j)
If i==n then cal=max(S(n,j)-K,0)
else  cal=(max(S(n,j:j+n-i)-K,0))*binomial(p,n-i)')/R^(n-i)
endfunction;
```

Expliquez pourquoi ceci donne effectivement le prix du Call à tout instant $t \in \{0, \delta t, 2\delta t, ...\}$.

7. Reprendre le code précédent mais cette fois pour un Put à la monnaie en précisant ce qui change. Quelle valeur du Put à la monnaie trouvez-vous après 50 pas de temps si l'actif sous-jacent n'a cessé de baisser ? Quelle valeur au même instant si l'actif sous-jacent n'a baissé que 20 fois ?

8. Le code suivant permet de tracer l'arbre CRR. Commenter la figure obtenue.

```
Abs=zeros(1+n,1+n);Ord=zeros(1+n,1+n);
for k=0:n
      for m=0:n-k
            Abs(1+m,1+k)=(k+m)*delta_t;
            Ord(1+m,1+k)=S(k+m,k);
      end;
      for m=1:k
            Abs(1+n-k+m,1+k)=(n-m)*delta_t;
            Ord(1+n-k+m,1+k)=S(n-m,k-m);
      end;
end;
plot(Abs,Ord)
```

9. En vous inspirant du tracé de l'arbre CRR donné ci-dessus, tracer l'arbre d'un Call de prix d'exercice $K = 140$. Commenter la figure obtenue. Refaire l'expérience pour un Put.