Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS, année 2018-2019
Calcul stochastique et Finance

Feuille de réponses de la séance 4
Calcul du prix d'une option barrière

Pour calculer la valeur d'une option DIC, on va utiliser, comme pour un Call vanille, sa définition $DIC_0 = e^{-rT}\mathbb{E}\left(\varphi(S_T)\mathbb{I}_{T_L \leq T}\right)$ en programmant le calcul de cette espérance par récurrence retrograde. Mais pour prendre en compte l'indicatrice $\mathbb{I}_{T_L \leq T}$, on va ajouter aux deux variables i et j usuelles une troisième variable notée k qui vaut 0 ou 1 selon qu'on envisage que $\mathbb{I}_{T_L \leq t}$ vaut 0 ou 1. La fonction `sousL(i,j)` sera une fonction qui vaut 1 lorsqu'on est sous la barrière et 0 si l'on est au dessus et on l'utilise de la façon suivante. En $t = T$, l'option vaut $\varphi(S_T)$ lorsque $k = 1$ et elle vaut 0 sinon. Donc on a $DIC(n, j, 1) = \varphi(S(n, j))$ et $DIC(n, j, 0) = 0$. Puis lorsque $t < T$, l'option est égale à l'espérance actualisée de ses deux valeurs suivantes (comme pour un Call vanille) et la troisième variable k est egale à 1 ou 0 selon qu'on suppose la barrière déjà franchie ou non. On a donc :

$$DIC(i, j, k) = e^{-r\delta t}\left(pDIC(i + 1, j + 1, k') + (1 - p)DIC(i + 1, j, k'')\right)$$

où $k' = \max(k, \texttt{sousL(i+1,j+1)})$ et $k'' = \max(k, \texttt{sousL(i+1,j)})$.

1. On reprend le modèle d'actif financier CRR avec les constantes suivantes $n = 12$, $T = 1$, $\sigma = 0.2$, $S_0 = 150$ et $r = 0.05$. Sauf mention contraire on suppose les options à la monnaie ($K = S0$). Créer un nouveau code Scilab en commençant par y recopier les définitions de S, de CC et de PP introduites aux TP précédents. On choisira les constantes $n = 12$, $\sigma = 0.2$, $S_0 = 150$ et $r = 0.05$. Indiquer les valeurs maximales et minimales des trois marches aléatoires S, C et P.

S et C sont maximaux lorsque t et j sont maximaux, donc $i=n$, $j=n$
En revanche P est maximal quand S_T est minimal donc $i=n$, $j=0$.
$S(n,n) = \underline{299,90196}$ $CC(1+n,1+n) = \underline{149,90196}$ $PP(1+n,1+0) = \underline{74,975482}$

2. Saisir le code indiqué ci dessous. A noter qu'on a utilisé `DDIC(i+1,j+1,k+1)` pour $DIC(i, j, k)$ pour les raisons habituelles. On prendra ici la barrière L égale à $L = 130$. Expliquer pourquoi `DDIC(1,1,2)` n'est rien d'autre que la prime d'un Call vanille. Quelle valeur trouvez-vous ?

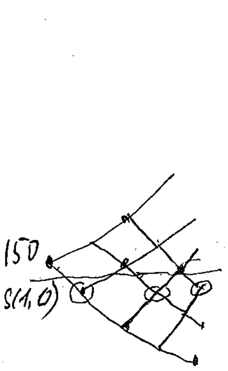
Dans DDIC(1,1,2) on ~~1+k~~ 1+k=2, donc k=1, c'est à dire qu'on suppose que la condition de franchissement de la barrière a déjà eu lieu; donc DDIC(1,1,2) = CC(1,1) = C(0,0) = prime du Call. Ici, on trouve DDIC(1,1,2) = 15,428774

3. Expliquer pourquoi `DDIC(1,1,1)` est la prime de la `DIC`. Quelle valeur trouvez-vous ?

$DDIC(1,1,\underbrace{1}_{1+k}) = DIC(0,0)$ puisque 1+k=1, donc k=0
ce qui signifie qu'on ne suppose pas que la condition que la barrière L a été franchie (avant t=0). On trouve DDIC(1,1,1) = 0,44976

4. Etudier comment varie le prix de la `DIC` lorsque L se rapproche de S_0. Comment pouvez-vous l'expliquer ?

Si L = 140 on trouve DDIC(1,1,1) = 1,9650062 > 0,449..
Si L = 145 on trouve DDIC(1,1,1) = 6,22... encore plus grand.
Si L = 149 ——— idem ———
149,99 ——— idem ———



Plus L est grand, plus il y a des trajectoires qui la franchissent
Mais si L > S(1,0) = 141,585 il n'y a pas de changement.

5. Dupliquer puis modifier le code de calcul de DDIC pour calculer la prime DDOC d'une option DOC. Expliquer. Quelle valeur trouvez-vous ?

Il suffit de modifier la condition $\boxed{\text{if } k==1}$ en $\boxed{\text{if } k==0}$ puisque le payoff du Call n'est dû que si la barrière L a été franchie (DDIC, $k=1$) ou non franchie (DDOC, $k=0$).

On trouve $DOC(0,0) = DDOC(1,1) = \underline{14,979012}$

6. Comparer C=Call, et $DIC + DOC$ à divers instants et expliquer.

Prime : $C = C(0,0) = CC(1,1) = \underline{15,428774}$

$DIC + DOC = DDIC(1,1,1) + DDOC(1,1,1) = 0,449762 + 15,428774 = 15,428774$

Donc $DIC + DOC = C$ ce qui est facile à comprendre : lorsque l'une est nulle l'autre donne le payoff d'un Call, donc $DIC + DOC = C$

Pour i et j quelconques ; max(abs(DDIC(:,:,1)+DDOC(:,:,1)-CC)) = $\underline{7.105D\text{-}15}$ donc nul aux erreurs près.

7. Reprendre les trois questions précédentes pour des options DIP et DOP.

On reprend le code de DDIC et DDOC en remplaçant max(S(n,j)-K,0) par max(K-S(n,j),0)

On trouve $DIP(0,0) = DDIP(1,1,1) = 7,090472$; $DOP(0,0) = DDOP(1,1,1) = 0,0227155$

donc $DIP(0,0) + DOP(0,0) = 7,090472 + 0,0227155 = 8,1131879 = DDIP(1,1,2) = P(0,0)$. franchissement de L supposé d'emblée

max(abs(DDIP(:,:,1)+DDOP(:,:,1)-PP)) = $\underline{3,55D\text{-}15}$, donc nul aux arrondis près.

8. Si $L > S_0$ au lieu de $L < S_0$ " Down" devient "Up" et DIC, DOC, DIP, DOP, deviennent UIC, UOC, UIP, UOP. Choisir $L = 170$ et calculer les primes de ces quatre contrats pour cette nouvelle valeur de L.

On remplace sousL(i,j) par susL(i,j) (avec if S(i,j)>=L then indi=1 else indi=0)

$UIC(0,0) = UUIC(1,1,1) = \underline{14.063003}$ $UOC(0,0) = UUOC(1,1,1) = \underline{1,3657715}$ ← petit car payoff nul en dehors de [K,L]

vérif max(abs(UUIC(:,:,1)+UUOC(:,:,1)-CC)) = $\underline{7,105D\text{-}15} \approx 0$.

$UIP(0,0) = UUIP(1,1,1) = \underline{0,3066746}$ $UOP(0,0) = UUOP(1,1,1) = \underline{7,8065134}$

vérif max(abs(UUIP(:,:,1)+UUOP(:,:,1)-PP)) = $\underline{1.776D\text{-}15} \approx 0$

```
function indi=sousL(i,j) ;//Indicatrice de la région sous la barrière
     if S(i,j)<=L then indi=1 ;
     else indi=0 ;
     end ;
endfunction ;
DDIC=zeros(n+1,n+1,2) ;//Calcul des valeurs de la DIC
for j=0:n        // ici i vaut n
     for k=0:1 // k=1 code "on est passé en dessous de L auparavant"
          if k==1 then DDIC(n+1,j+1,k+1)=max(S(n,j)-K,0) ;
          else DDIC(n+1,j+1,k+1)=0 ;
          end ;
     end ;
end ;
for i=n-1:-1:0
     for j=0:i
          for k=0:1
          DDIC(i+1,j+1,k+1)=(p*DDIC(i+1+1, j+1+1, max(k, sousL(i+1,j+1))+1)..
                                   + (1-p)*DDIC(i+1+1, j+1, max(k, sousL(i+1,j))+1))/R ;
          end ;
     end ;
end ;
```

Ici la différence entre DIC, DOC et CC

Calcul identique à celui de CC ou PP

• Pour la DOC il suffit simplement de remplacer cette condition par $\boxed{\text{if } k==0}$ puisqu'il faut que le cours n'ait pas franchi la barrière