Université de Nice
Département de Mathématiques
L3MASS, année 2018-2019
Calcul stochastique et Finance
NOM :
PRENOM :

Feuille de réponses du TD 5
Micro-crédit

Exercice 1 : La banque Grameen prête aux plus démunis dans les conditions suivantes : pour un prêt de 1000 Bangladesh Takas (BDT) l'emprunteur rembourse chaque semaine durant 50 semaines la somme de 22 BDT.

1. Quelle est la somme totale remboursée ? Quel pourcentage de la somme prètée aura-t-on remboursé en plus (flat rate) ?

2. Soit r est le "taux d'intérêt continu annuel" pratiqué et r $x = e^{-\frac{r}{52}}$ le coefficient d'actualisation hebdomadaire correspondant. Si les remboursements commencent après une semaine expliquer pourquoi x doit alors satisfaire l'équation $1000 = 22\sum_{k=1}^{50} x^k$.

3. Expliquer pourquoi ce coefficient d'actualisation x est une racine réelle et positive du polynôme de degré 51 suivant : $22x^{51} - 1022x + 1000 = 0$.

4. Pour calculer les racines, réelles ou complexes, de ce polynôme avec Scilab, on utilise le code suivante :
```
x=poly(0,"x") ; //x devient le polynome à une seule racine, 0.
[sols]=roots(22*x^51-1022*x+1000) ;
```
Que vaut la solution x qui nous intéresse ? Combien y-a-t-il d'autres solutions réelles ? complexes ?

5. En déduire le taux d'intérêt r pratiqué par la banque Grameen pour un prêt de 1000 BDT sur une année.

6. Quel serait le taux pratiqué par la Grameen si au lieu de demander des remboursements hebdomadaires de 22 BDT, il était demandé des remboursements hebdomadaires de 21.5 BDT ? Même question pour 22.5 BDT.

Exercice 2 : Pour prendre en compte des retards éventuels dans les remboursements, on introduit un processus de Bernoulli $(B_i)_{i=1,2,\ldots}$ où les v.a. B_i sont des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1,p)$, où $B_i = 1$ lorsque la i-ième semaine a donné lieu à un remboursement (avec une probabilité p) et $B_i = 0$ sinon.On pose $T_k = \mathrm{Min}\,\{n \geq 1 | B_1 + \ldots + B_n = k\} = D_1 + \ldots + D_k$.. On a donc cette fois une équation de Yunus aléatoire $1000 = 22 \sum_{k=1}^{50} Q^{T_k}$, avec $Q := e^{-\frac{R}{52}}$.

1. Sachant que l'équation de Yunus aléatoire peut se réécrire

   $$\frac{1000}{22} = Q^{D_1} + Q^{D_1+D_2} + \ldots + Q^{D_1+\ldots D_{50}} = Q^{D_1}(1 + Q^{D_2}(1 + \ldots + Q^{D_{49}}(1 + Q^{D_{50}}) \ldots)),$$

   expliquer pourquoi ce membre de droite peut se calculer à l'aide du code suivant :

   ```
    Q=poly(0,"Q");
   y=Q^D(50);
   for i=50-1:-1:1
   y=Q^D(i)*(1+y);
   end;
   ```

2. Pour $p = 0.84$ et $N = 50$, faire un tirage aléatoire des 50 durées D_k pour $k = 1, ..., 50$ en utilisant la commande `D=grand(1,N,'geom',p;` puis calculer le polynôme y à l'aide du code précédent. A combien de semaines de retard votre tirage a-t-il conduit ? Préciser leurs dates.

3. Calculer les solutions de l'équation de Yunus aléatoire au moyen de `sols=roots(1000-22*y);` en précisant celle qui nous intéresse et en déduire le taux d'intérêt qui correspond à votre tirage aléatoire.

4. Ce taux est plus petit que celui que l'on obtient lorsqu'il n'y a pas de retard. Pourquoi ?

5. Au moyen d'une boucle, effectuer 100 tirages aléatoires de durées D_k et calculer les 100 taux d'intérêts correspondant. Expliquer votre code.

6. Calculer la moyenne de ces 100 taux et représenter leur histogramme. *Attention, ces taux étant racines d'un polynôme sont considérés comme des nombres complexes (même s'ils sont réels) ; il faut donc tracer l'histogramme de leur partie réelle.*