Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS, année 2018-2019
Calcul stochastique et Finance

Feuille de réponses du TD 5
Micro-crédit

Exercice 1 : La banque Grameen prête aux plus démunis dans les conditions suivantes : pour un prêt de 1000 Bangladesh Takas (BDT) l'emprunteur rembourse chaque semaine durant 50 semaines la somme de 22 BDT.

1. Quelle est la somme totale remboursée ? Quel pourcentage de la somme prètée aura-t-on remboursé en plus (flat rate) ?

On aura remboursé 50×22 BDT $= 1100$ BDT

On aura donc payé $1100 - 1000 = 100$ BDT par 1000 BDT payé soit un "flat rate" de $\frac{100}{1000} = 10\%$

2. Soit r est le "taux d'intérêt continu annuel" pratiqué et $x = e^{-\frac{r}{52}}$ le coefficient d'actualisation hebdomadaire correspondant. Si les remboursements commencent après une semaine expliquer pourquoi x doit alors satisfaire l'équation $1000 = 22\sum_{k=1}^{50} x^k$.

Un remboursement de 22 en semaine k (i.e. $t = \frac{k}{52}$) vaut $22 e^{-\frac{r}{52}k} = 22x^k$ actualisé à $t=0$, date où les 50 remboursements équilibrent les 1000 reçu. Donc, avec $x = e^{-\frac{r}{52}}$ $1000 = 22x + 22x^2 + \dots + 22x^k + \dots + 22x^{50} = 22\sum_{k=1}^{50} x^k$

3. Expliquer pourquoi ce coefficient d'actualisation x est une racine réelle et positive du polynôme de degré 51 suivant : $22x^{51} - 1022x + 1000 = 0$.

On sait que $\sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{1-q^n}{1-q}$. Donc $1000 = 22\sum_{k=1}^{50} x^k = x\frac{1-x^{50}}{1-x} \cdot 22$

si $x \neq 1$ $\Leftrightarrow 1000 - 1000x = 22x - 22x^{51} \Leftrightarrow 22x^{51} - 1022x + 1000$ CQFD

4. Pour calculer les racines, réelles ou complexes, de ce polynôme avec Scilab, on utilise le code suivante :

```
x=poly(0,"x") ; //x devient le polynome à une seule racine, 0.
[sols]=roots(22*x^51-1022*x+1000) ;
```

Que vaut la solution x qui nous intéresse ? Combien y-a-t-il d'autres solutions réelles ? complexes ? La solution qui nous intéresse est réelle, positive, inférieure à 1, strictement. C'est sols(51) $= \underline{0,9962107}$, dans l'ordre où les racines me sont données par Scilab
Il y a 51 racines à une equation polynomiale de degré 51
On a 3 solutions réelles : $-1,09362823$, 1, et 0.9962107, les $48 = 51-3$ sont complexes conjugués

5. En déduire le taux d'intérêt r pratiqué par la banque Grameen pour un prêt de 1000 BDT sur une année.

$x = e^{-\frac{r}{52}} \Leftrightarrow -\frac{r}{52} = \ln x \Leftrightarrow r = -52\ln(x) = -52 * \log(\text{sols}(51)) = 0,1974$

$\boxed{r_{22} = 19,74175\%}$

6. Quel serait le taux pratiqué par la Grameen si au lieu de demander des remboursements hebdomadaires de 22 BDT, il était demandé des remboursements hebdomadaires de 21.5 BDT ? Même question pour 22.5 BDT.

Pour 50 versements v l'equation devient $v x^{51} - (1000+v)x + 1000 =$
En remplaçant 22 par $v = 21.5$ puis $v = 22.5$ dans le code on trouve $r_{21.5} = 14,92258$ $r_{22.5} = 24,48922$

Exercice 2 : Pour prendre en compte des retards éventuels dans les remboursements, on introduit un processus de Bernoulli $(B_i)_{i=1,2,...}$ où les v.a. B_i sont des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1,p)$, où $B_i = 1$ lorsque la i-ième semaine a donné lieu à un remboursement (avec une probabilité p) et $B_i = 0$ sinon.On pose $T_k = \text{Min}\{n \geq 1 | B_1 + \ldots + B_n = k\} = D_1 + \ldots + D_k$.. On a donc cette fois une équation de Yunus aléatoire $1000 = 22\sum_{k=1}^{50} Q^{T_k}$, avec $Q := e^{-\frac{R}{52}}$.

1. Sachant que l'équation de Yunus aléatoire peut se réécrire

$$\frac{1000}{22} = Q^{D_1} + Q^{D_1+D_2} + \ldots + Q^{D_1+\ldots D_{50}} = Q^{D_1}(1 + Q^{D_2}(1 + \ldots + Q^{D_{49}}(1 + Q^{D_{50}})\ldots)),$$

expliquer pourquoi ce membre de droite peut se calculer à l'aide du code suivant :

(*)

```
Q=poly(0,"Q");      // Q n'est pas un nombre mais le monôme de degré 1 "Q"
y=Q^D(50);          // y vaut d'abord Q^D50
for i=50-1:-1:1     // i descend de 49 à 1
y=Q^D(i)*(1+y);     // y vaut Q^Di(1+Q^Di+1(1+...+Q^D49(1+Q^D50)..)
end;                // quand i vaut 1, y vaut finalement (
```

$$Q^{D_1}(1+Q^{D_2}(1+\ldots+Q^{D_{49}}(1+Q^{D_{50}})\ldots))$$

Ici $D(i) = D_i$

2. Pour $p = 0.84$ et $N = 50$, faire un tirage aléatoire des 50 durées D_k pour $k = 1, ..., 50$ en utilisant la commande `D=grand(1,N,'geom',p;` puis calculer le polynôme y à l'aide du code précédent. A combien de semaines de retard votre tirage a-t-il conduit ? Préciser leurs dates.

La durée totale vaut sum(D) ; je trouve 60

Normalement la durée totale devrait être 50 ; il y a 10 semaines de l

date = cumsum(D) donne les dates des remboursements, la date des retards sont les i tels que date(i) > 1+date(i-1). Ici 10, 13, 25, 27, 31, 36, 41, 53, 60 gratu

ici j'ai D(8) = 3

3. Calculer les solutions de l'équation de Yunus aléatoire au moyen de `sols=roots(1000-22*y);` en précisant celle qui nous intéresse et en déduire le taux d'intérêt qui correspond à votre tirage aléatoire.

Il y a length(sols) = 60 racines ; 58 sont complexes conjuguées.

Deux racines réelles : sols(1) = −1.0769187 (< 0 : ne convient pas)

sols(60) = 0.996851 convient puisque dans]0, 1[

$r = -52 * \log(\text{sols}(\text{length}(\text{sols}))) = 0.1640062 = 16{,}40062\,\%$

4. Ce taux est plus petit que celui que l'on obtient lorsqu'il n'y a pas de retard. Pourquoi ?

Les semaines de retard n'ont pas porté d'intérêts,
Le taux effectif est donc inférieur au taux prévu.

5. Au moyen d'une boucle, effectuer 100 tirages aléatoires de durées D_k et calculer les 100 taux d'intérêts correspondant. Expliquer votre code.

```
r = zeros(100);
for client = 1:100                 // on appelle "client" chaque tirage
  D = grand(1,N,'geom',p)          // Question 2.2
  [*]                              // Question 2.1
  sols = root(1000 - 22*y)         // Question 2.3
  r(client) = -52 * log(sols(length(sols)))   // r sera la matrice des 100 taux trouvé
end;
```

6. Calculer la moyenne de ces 100 taux et représenter leur histogramme. *Attention, ces taux étant racines d'un polynôme sont considérés comme des nombres complexes (même s'ils sont réels) ; il faut donc tracer l'histogramme de leur partie réelle.*

mean(r) = 0.1685628 (plus de 3% inférieur au taux normal)

scf(1);

histplot(0.10:0.002:0.20, real(r))