

Calcul stochastique : TP 6
Modèles de microcrédit

Exercice 1. : Modèle simplifié de Tedeschi, sans exclusion. Dans ce modèle simplifié, on suppose qu'il existe deux types d'états : celui de demandeur (d'un prêt) et celui de bénéficiaire (d'un prêt). La seule sanction pour le bénéficiaire en cas de non-remboursement est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et le renvoi dans le statut de demandeur. On suppose qu'un demandeur D n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire B . On suppose aussi que tout bénéficiaire a une probabilité $1 - \alpha$ de ne pas rembourser son prêt : dans ce cas il redevient demandeur.

1. Rappeler le diagramme de la chaîne de Markov à deux états D et B (dans cet ordre) correspondant à ce modèle et écrire la matrice de *passage* Q de cette chaîne.

2. Calculer (à la main) le vecteur propre unitaire π^* à gauche de Q de valeur propre 1 : explicitez vos calculs.

3. Choisir $\alpha = 0.90$ et $\gamma = 0.30$; calculer π^* au moyen de la commande Scilab `spec` qui renvoie les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice. Expliquer.
4. Rappelons que, sous des hypothèses assez générales, Q^n tend, quand n tend vers l'infini, vers une matrice dont toutes les lignes sont égales. Rappeler ces hypothèses, calculer Q^{50} et commenter.
5. Calculer la probabilité qu'un demandeur soit encore ou à nouveau un demandeur après 3 étapes, après 10 étapes. Expliquer.
6. Si l'on suppose qu'à l'instant initial, il y a 90% de demandeurs et 10% de bénéficiaires, calculer la proportion de bénéficiaires après 3 étapes, après 10 étapes. Expliquer.

Exercice 3. : Modèle de Tedeschi avec deux catégories de demandeurs mais sans exclusion.

On distingue à présent deux types de demandeurs : les sûrs S et les risqués R de probabilités de succès (et donc de remboursement) respectives égales à $\alpha_S > \alpha_R$. Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non-remboursement est que l'emprunteur perde le statut de bénéficiaire et redevient demandeur, toujours avec un proba γ de devenir bénéficiaire. La probabilité qu'un bénéficiaire tiré parmi les demandeurs soit sûr est notée β .

1. Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov à trois états S^+ , D et R^+ correspondant à ce modèle et écrire sa matrice de passage Q .

2. Pour $\alpha_S = 0.92$, $\alpha_R = 0.22$, $\beta = 0.50$, $\gamma = 0.30$; calculer Q^{50} et π^* .

3. Pensez-vous que la présence d'une activité de microcrédit au sein d'une population va modifier les proportions de bénéficiaires risqués et non risqués? Expliquez pourquoi.