Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

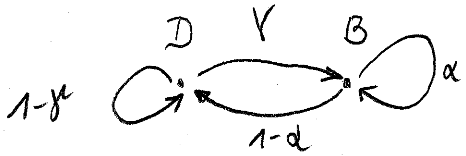
L3MASS et L3Maths, année 2018-2019
Calcul stochastique et Finance

Groupe :

Calcul stochastique : Feuille de réponses du TD 6
Modèles de microcrédit

Exercice 1. : Modèle simplifié de Tedeschi, sans exclusion. Dans ce modèle simplifié, on suppose qu'il existe deux types d'états : celui de demandeur (d'un prêt) et celui de bénéficiaire (d'un prêt). La seule sanction pour le bénéficiaire en cas de non-remboursement est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et le renvoi dans le statut de demandeur. On suppose qu'un demandeur D n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire B. On suppose aussi que tout bénéficiaire a une probabilité $1-\alpha$ de ne pas rembourser son prêt : dans ce cas il redevient demandeur.

1. Rappeler le diagramme de la chaîne de Markov à deux état D et B (dans cet ordre) correspondant à ce modèle et écrire la matrice de *passage* Q de cette chaîne.



$$Q = \begin{array}{cc} D & B \end{array}$$
$$Q = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1-\gamma & \gamma \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{array}{c} D \\ B \end{array}$$

2. Calculer (à la main) le vecteur propre unitaire π^* à gauche de Q de valeur propre 1 : explicitez vos calculs.

Notons $\pi^* = (x, y)$, avec $x+y=1$ (vecteur unitaire).

$$(x, y) \overset{\lambda=1}{=} (x,y)Q = (x\ y)\begin{pmatrix} 1-\gamma & \gamma \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} = \big(x(1-\gamma)+y(1-\alpha),\ x\gamma + y\alpha\big)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{x} = x(\cancel{1}-\gamma) + y(1-\alpha) \\ y = x\gamma + y\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma x + y(\alpha-1) = 0 \\ -\gamma x + y(\alpha-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \gamma x + y(\alpha-1) = 0.$$

avec $x+y=1$ ($\Leftrightarrow y = 1-x$) cette equation devient

$$0 = \gamma x + (1-x)(\alpha-1) = x(\gamma + 1 - \alpha) + (\alpha - 1) \Longleftrightarrow \boxed{x = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\gamma}}\ (\in[0,1]$$

enfin $y = 1-x = 1 - \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha+\gamma} = \dfrac{\cancel{1}-\cancel{\alpha}+\gamma-\cancel{1}+\cancel{\alpha}}{1-\alpha+\gamma}$

$$= \frac{\gamma}{1-\alpha+\gamma} \in [0,1]$$

Finalement $\pi^* = (x,y) = \boxed{\dfrac{1}{1-\alpha+\gamma}(1-\alpha, \gamma) = \pi^*}$

vérif : $\pi^* Q = \dfrac{1}{1-\alpha+\gamma}(1-\alpha, \gamma)\begin{pmatrix} 1-\gamma & \gamma \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1-\alpha+\gamma}\big((1-\alpha)(1-\cancel{\gamma}) + \cancel{\gamma}(1-\alpha),\ \gamma(1-\cancel{\alpha}) + \cancel{\alpha\gamma}\big)$

$$= \frac{1}{1-\alpha+\gamma}(1-\alpha, \gamma) = \pi^*$$ est bien un 1-vecteur propre.

3. Choisir $\alpha = 0.90$ et $\gamma = 0.30$; calculer π^* au moyen de la commande Scilab **spec** qui renvoie les valeurs propres et vecteurs propres à droite d'une matrice. Expliquer.

Pour obtenir les vcp à gauche, on transpose et calcule donc spec(Q')

[ppitranspo, diagvlp] = spec(Q')   // chaque ligne est un vcp à gau

ppi = ppitranspo'

pi = ppi(2,:) / sum(ppi(2,:))   // normalisation

pi * Q   // vérification

On trouve $pi = (0{,}25, 0{,}75)$

vérif : $\pi^* = \frac{1}{1-0{,}9+0{,}3}(1-0{,}9, 0{,}3) = \frac{1}{0{,}4}(0{,}1, 0{,}3) = (0{,}25, 0{,}75)$ OK

4. Rappelons que, sous des hypothèses assez générales, Q^n tend, quand n tend vers l'infini, vers une matrice dont toutes les lignes sont égales. Rappeler ces hypothèses, calculer Q^{50} et commenter.

Ceci est vrai sous l'hypothèse que la matrice Q soit primitive c'est-à-dire qu'une de ses puissance soit strictement positive, ce qui est vrai dès sa première puissance : $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} > 0$

$Q^{50} = Q\wedge 50 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^* \\ \pi^* \end{pmatrix}$.

Les deux lignes de Q^{50} sont bien égales à π^*

5. Calculer la probabilité qu'un demandeur soit encore ou à nouveau un demandeur après 3 étapes, après 10 étapes. Expliquer.

Q^3 est la matrice de la chaine des évolutions en trois périodes.

or on a $Q^3 = Q\wedge 3 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} D & B \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0{,}412 & 0{,}588 \\ 0{,}196 & 0{,}804 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} D \\ B \end{array} \end{array}$. La proba pour un demandeur d'être à nouveau demandeur après 3 période est donc $\underline{0{,}412}$

De même, après 10 périodes, $Q^{10} = Q\wedge 10 = \begin{pmatrix} 0{,}254535 & 0{,}745465 \\ 0{,}2484883 & 0{,}7515117 \end{pmatrix}$

La proba d'être à nouveau demandeur est $\underline{0{,}254535}$ (presque 0,25).

6. Si l'on suppose qu'à l'instant initial, il y a 90% de demandeurs et 10% ~~de bénéficiaires~~, calculer la proportion de bénéficiaires après 3 étapes, après 10 étapes. Expliquer.

L'hypothèse est que $\pi_0 = (0{,}9\ ,\ 0{,}1)$.

Après 3 étapes on a $\pi_3 = \pi_0\, Q^3 = [0.9, 0.1] * Q\wedge 3 = \boxed{[0{,}3904, 0{,}6096}$

Après 10 étapes, $\pi_{10} = [0{,}9, 0{,}1] * Q\wedge 10 = \boxed{0{,}2539303, 0{,}7460697}$

(presque π^*)

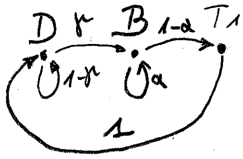
Après 3 étapes il y a 60,96% de bénéficiaires

— 10 ——— 74,61% ———

Exercice 2. : Modèle de Tedeschi avec périodes d'exclusion

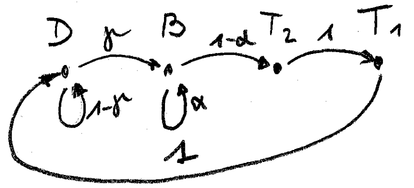
1. Rappeler le diagramme de Markov dans le cas d'une et deux périodes d'exclusion et donner leurs matrices de passage : on choisira l'ordre D, B, T_1 et D, B, T_2, T_1 pour les états possibles.

1 période d'exclusion



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} D & B & T_1 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1-\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} D \\ B \\ T_1 \end{array} \end{array}$$

2 périodes d'exclusion



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} D & B & T_2 & T_1 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1-\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} D \\ B \\ T_2 \\ T_1 \end{array} \end{array}$$

2. Calculer la probabilité qu'un demandeur soit encore ou à nouveau un demandeur après 3 étapes, après 10 étapes dans chacun des deux cas. Expliquer.

Q1 = [1-gam, gam, 0; 0, alpha, 1-alpha; 1, 0, 0]

Q2 = [1-gam, gam, 0, 0; 0, alpha, 1-alpha, 0; 0,0,0,1; 1, 0,0,0)

Mêmes explications qu'au 5.

On calcule Q1^3, Q1^10, Q2^3, Q2^10

Proba pour un demandeur de redevenir demandeur.

après 3 étapes	0,373	0,343
après 10 étapes.	0.2345628	0,2172718
	une période d'exclusion	deux périodes d'exclusion

3. Si l'on suppose qu'à l'instant initial, il y a 90% de demandeurs et 10% de bénéficiaires, calculer la proportion de bénéficiaires après 3 étapes, après 10 étapes dans chacun des deux cas. Expliquer. Qu'en concluez-vous ?

Même explication qu'au 6. ; on trouve % de bénéficiaires

3 étapes.

$\Pi^1_3 = [0{,}9, 0{,}1, 0]$ Q1^3 — 59,7%

$\Pi^2_3 = [0{,}9, 0{,}1, 0, 0] *$ Q2^3 — 59,4%

} légère baisse

10 étapes

$\Pi^1_{10} = [0{,}9, 0{,}1, 0] *$ Q1^10 — 69,62%

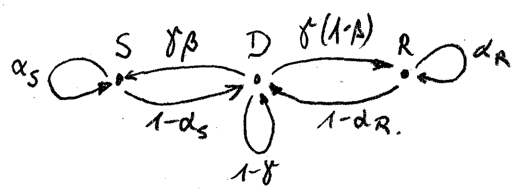
$\Pi^2_{10} = [0{,}9, 0{,}1, 0, 0] *$ Q2^10 — 65,22%.

} plus forte baisse

La présence d'un risque d'exclusion réduit la probabilité d'être bénéficiaire un peu s'il y a 1 période d'exclusion, un peu plus s'il y a 2 périodes d'exclusion

Exercice 3. : Modèle de Tedeschi avec deux catégories de demandeurs mais sans exclusion. On distingue à présent deux types de demandeurs : les sûrs S et les risqués R de probabilités de succès (et donc de remboursement) respectives égales à $\alpha_S > \alpha_R$. Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non-remboursement est que l'emprunteur perde le statut de bénéficiaire et redevient demandeur, toujours avec un proba γ de devenir bénéficiaire. La probabilité qu'un bénéficiaire tiré parmi les demandeurs soit sûr est notée β.

1. Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov à trois états S, D et R correspondant à ce modèle et écrire sa matrice de passage Q.



$$Q = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} S & D & R \end{array}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_S & 1-\alpha_S & 0 \\ \gamma\beta & 1-\gamma & \gamma(1-\beta) \\ 0 & 1-\alpha_R & \alpha_R \end{pmatrix} \begin{array}{c} S \\ D \\ R \end{array}$$

2. Pour $\alpha_S = 0.92$, $\alpha_R = 0.22$, $\beta = 0.50$, $\gamma = 0.30$; calculer Q^{50} et π^*.

$$Q^{50} = \begin{pmatrix} 0,611291 & 0,3260142 & 0,0626947 \\ 0,6112767 & 0,3260257 & 0,0626977 \\ 0,6112737 & 0,326028 & 0,0626983 \end{pmatrix}.$$

$\pi^* \approx (0,6113\ ,\ 0,3260\ ,\ 0,0627)$.

avec spec(Q) on trouve

$\pi^* = (0,6112853 \quad 0,3260188 \quad 0,0626959)$. $(= \pi^* * Q)$

3. Pensez-vous que la présence d'une activité de microcrédit au sein d'une population va modifier les proportions de bénéficiaires risqués et non risqués ? Expliquez pourquoi.

Il y a 61,1% de beneficiaire sûrs et seulement 6,2% de beneficiaires risqués, soit près de 10 fois moins. En effet, ces derniers redeviennent plus souvent demandeurs. Ceci pose d'ailleurs la question de la pertinence du modèle, puisqu'on suppose constante la proportion β de demandeurs sûrs.