Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS, année 2018-2019
Calcul stochastique et Finance

Date :
Groupe :

Calcul stochastique : feuille réponses du TP 7
Option Collar

Option collar (tunnel)

Un particulier détient des actifs dont la valeur présente est S_0. Il souhaite se couvrir contre une baisse de S_T en dessous de la valeur présente. Pour cela il lui suffit d'acheter (pour chaque actif S détenu) un Put à la monnaie de prix $P_0^{S_0}$. Ne souhaitant rien débourser il a le moyen de vendre, en contre-partie, un Call $C_0^{K^*}$ de même prix que $P_0^{S_0}$. On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes[1] $n = 50$, $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 120$, $K = S_0$, et $r = 0.25$.

L'exercice est de déterminer ce prix d'exercice $K^* =$ `Kcollar`. Voici un code qui résoud ce problème.

```
function s=S(i,j); s=S0*up^j.*down^(i-j); endfunction
function monphi=phi(S,K); monphi=max(S-K,0); endfunction;
function moncall=Call(K); moncall=phi(S(n,0:n),K)*binomial(p,n)'/R^n endfunction
function monpsi=psi(S,K); monpsi=max(K-S,0); endfunction;
function monput=Put(K);monput=Call(K)-S0+K*exp(-r*T) endfunction
function dif=difference(K); dif=Call(K)-Put(S0)endfunction;
Kcollar=fsolve(S0,difference); disp(Kcollar,"Kcollar=");
```

1. Avant de commencer à tester ce code montrez en utilisant la relation de parité Call-Put[2] que $C_0^{S_0} > P_0^{S_0}$ et donc que $K^* > S_0$.

Par la relation Call-Put pour $t=0$ et $K=S_0$ on a $C_0^{S_0} - P_0^{S_0} = S_0 - S_0 e^{-rT} = S_0(1-e^{-rT}) > 0$, donc $C_0^{S_0} > P_0^{S_0}$.
Comme C_t^K est une fonction décroissante de K puisque c'est le cas pour $t=T$, $C_T^K = (S_T-K)^+$, pour que $C_0^K = P_0^{S_0}$ et que $C_0^{S_0} > P_0^{S_0}$ il faut que $C_0^K = P_0^{S_0} < C_0^{S_0}$ et donc $K > S_0$

2. Rappeler pourquoi la `function Call` peut être définie comme indiqué

La fonction Call donne le prix du Call C_0^K à la date $t=0$.
On sait que $C_0^K = e^{-rT} \mathbb{E}((S_T-K)^+) = e^{-rT}\mathbb{E}(\varphi(S,K))$, pour $\varphi(S,K) = (S-K)^+$
Or $\frac{1}{R^n} = (e^{-r\frac{T}{n}})^n = e^{-rT}$ et $S_T = S_0 \, up^J \, down^{n-J}$ où $J \sim \mathcal{B}(n,p)$ et donc
$\mathbb{E}(\varphi(S,K)) =$ phi(S(n,0:n),K) * binomial(p,n)'

3. Rappeler pourquoi la `function Put` peut être définie comme indiqué

La relation Call-Put pour $t=0$ montre que $P_0^K = C_0^K - S_0 + K e^{-rT}$ qui est la valeur calculée par la fonction Put(K) définie ci-dessus.

4. Après avoir appris (par `help fsolve`) ce que retourne la fonction `fsolve`, expliquer ce que vaut `Kcollar`. Quelle valeur trouvez-vous?

fsolve(S_0, difference) recherche le zéro de la fonction difference (situé à proximité de S_0), c'est à dire la solution de Call(S_0) = Put(K), c'est à dire la valeur K^* telle que $C_0 K^* = P_0^{S_0}$ le prix d'exercice du Call$^{K^*}$ qu'il faut vendre en contrepartie du Put^{S_0}. On trouve $K^* =$ Kcollar = 210.6343

1. Si vous rencontrez des difficultés avec votre programme revenez avec $n = 6$ jusqu'à ce que vous les ayez surmontées. N'oubliez pas de commencer par un `clear`

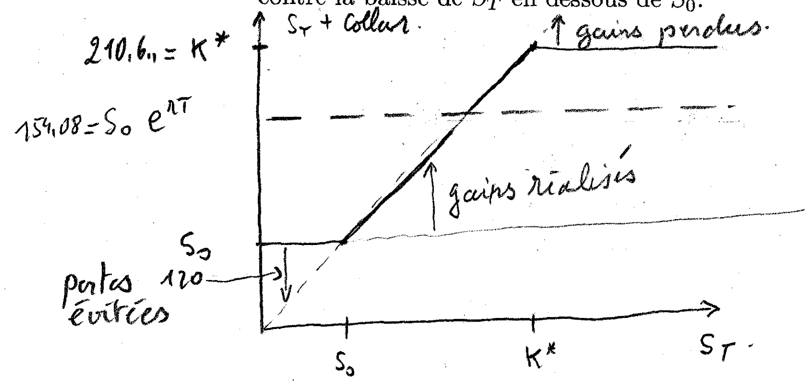
2. Relation Call-Put : $C_t^K - P_t^K = S_t - Ke^{-r(T-t)}$

5. Donner, en fonction de S_T, la valeur $S_T + P_T^{S_0} - C_T^{K^*}$ du portefeuille à la date $t = T$. On distinguera les cas $S_T \leq S_0$, $S_0 \leq S_T \leq K^*$, et enfin $K^* \leq S_T$

On a $S_T + P_T^{S_0} - C_T^{K^*} = S_T + (S_0 - S_T)^+ - (S_T - K^*)$ et donc, puisque $S_0 < K^*$

	S_T	$(S_0 - S_T)^+$	$(S_T - K^*)$	$S_T + P_T^{S_0} - C_T^{K^*}$
si $S_T \leq S_0 (< K^*)$	S_T	$S_0 - S_T$	0	$\cancel{S_T} + S_0 - \cancel{S_T} - 0 = S_0$
si $S_0 \leq S_T \leq K^*$	S_T	0	0	$S_T + 0 - 0 = S_T$
si $(S_0 <) K^* \leq S_T$	S_T	0	$S_T - K^*$	$\cancel{S_T} + 0 - (\cancel{S_T} - K^*) = +K^*$

6. Représentez ici le graphe de cette valeur, à $t = T$, du portefeuille constitué de l'action de S et du collar. Résumer en une phrase ce qu'a échangé le particulier en contre-partie de son assurance contre la baisse de S_T en dessous de S_0.



En ajoutant le collar à ses actions S le détenteur a échangé ses gains éventuels au-delà de K^* contre le fait d'éviter toute perte par rapport à son investissement initial.

7. Comparer la valeur de ce portefeuille avec la valeur à $t = T$ de la somme S_0 placée à $t = 0$ au taux sans risque r. Commenter.

Placés au taux sans risque r, S_0 vaudrait $S_0 e^{rT} = 154.08$

La stratégie d'adjoindre un collar à la monnaie permet d'éviter toute perte de capital et d'échanger un gain certain $S_0(e^{rT} - 1)$ de $154.08 - 120 = \underline{34{,}08}$ contre un gain compris entre 0 et $K^* - S_0 = 210{,}6343 - 120 = 90{,}6343$

8. Le détenteur de l'action est prêt à accepter, à la date T, de perdre jusqu'à 10% de la valeur de son action en échange des gains sur sa valeur en cas de hausse au-delà d'une valeur L^*. Quel portefeuille ~~de~~ d'options doit-il souscrire; préciser la valeur de L^*.

Il doit souscrire à $P_t^{0.9 \cdot S_0} - C_t^{L^*}$ avec L^* tel que $P_0^{0.9 \cdot S_0} = C_0^{L^*}$

En posant dif = Call(K) − Put(0.9*S0) dans la définition de la fonction difference, fsolve(S0,difference) donne

$\underline{\underline{L^* = 236{,}94304}}$ qui est bien strictement supérieur à K^*:

on échange des chances de gains supérieurs contre un risque de 10% de perte en capital.