

Calcul stochastique : énoncé du TP 9
Frontière d'exercice du Put Américain

Exercice 1. : Reprendre les codes des TP précédents pour le calcul de l'actif sous-jacent $S(i, j)$ et celui du Put Américain $PPamer(i, j)$, avec les constantes suivantes $n = 30$, $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 140$ et $r = 0.05$. Quelle est la valeur de S à l'instant $t = 2/3$ s'il y a eu 15 down? Calculer la valeur du Put Américain en ce point et comparer avec $K - S$. Expliquer.

Exercice 2. : Le code suivant permet de définir une matrice $EPA(i+1, j+1)$ (pour "Exercice du Put Américain") qui vaut 1 aux points (i, j) de l'arbre de Cox situés en dessous de la frontière d'exercice et 0 aux points situés au dessus. On initialise cette matrice par $EPA=-ones(n+1, n+1)$ pour remplir les points inintéressants de la matrice par des -1 .

```
EPA=-ones(n+1,n+1);
for j=0:n
    if S(n,j)<K+1 then EPA(n+1,j+1)=1;
    else EPA(n+1,j+1)=0; end
end;
for i=n-1:-1:0
    for j=0:i
        if max(K-S(i,j),0) > (p*PPAmer(i+2,j+2)+(1-p)*PPAmer(i+2,j+1))/R then EPA(i+1,j+1)=1;
        else EPA(i+1,j+1)=0;end
    end
end;
```

Examiner ce code et expliquer ce que vaut la matrice EPA selon les valeurs de i et j puis exécuter le programme.

Exercice 3. : On veut à présent tracer l'arbre de CRR en représentant de façon différente les points au dessus et en dessous de la frontière d'exercice. Pour cela on utilisera le code suivant :

```
for i=0:n
    for j=0:i
        if S(i,j)<2*S0
            plot2d(i,S(i,j),-2*EPA(i+1,j+1)-2) end
        end;
    end;
end;
```

Expliquer pourquoi la commande plot2d trace certains points $S(i, j)$ avec une croix et certains points avec un losange (voir l'aide en ligne pour la syntaxe de la commande plot2d).

Exercice 4. : Expliquer ce que doit faire le détenteur de l'option américaine en un point marqué d'un losange? en un point marqué d'une croix?

Exercice 5. : Le code suivant permet de tracer la frontière d'exercice sur la figure précédente (à moins d'ouvrir une nouvelle figure avant le plot afin de la tracer indépendamment) :

```
i=0;
for ii=1:n+1
    if max(EPA(ii,1:ii))==1 then i=i+1; Frontieret(i)=ii-1;
    FrontiereS(i)=S(ii,sum(EPA(ii,1:ii))-1);end
end;
plot(Frontieret,FrontiereS)
```

Décrire la figure obtenue.

Exercice 6. : Retracer la frontière d'exercice pour $n = 150$ cette fois (attention NE RETRACER PAS l'arbre CRR de la figure précédente!). Cette frontière d'exercice commence en un point $t_0 = i_0 \delta t$;

en zoomant sur la figure, indiquer quelle est cette valeur de i_0 et quelle la valeur S_{t_0} de la frontière d'exercice correspondante.

En analysant le code cette fois, déterminer la valeur exacte de (i_0, S_{t_0}) de l'extrémité "gauche" de la frontière d'exercice. Même question pour l'extrémité "droite".

Exercice 7. : Tracer la frontière d'exercice pour différentes valeurs de r , $r = 0,005$, $r = 0,01$, $r = 0,1$. Que se passe-t-il pour $r = 0$? A quelle valeur de $r \neq 0$ correspond la courbe la plus haute et la courbe la plus basse?

Exercice 8. : Pour $r = 0.05$, reprendre cette question pour différentes valeurs de σ , $\sigma = 0,4$, $\sigma = 0,2$, $\sigma = 0,1$. Qu'observez-vous?

Exercice 9. : Écrire un code qui trace au moyen d'une boucle plusieurs frontières d'exercice en fonction de r et qui permet d'ajouter à la figure un titre, le nom des axes et une légende, et de sauvegarder cette figure dans un fichier pdf.