NOM :
PRENOM : Corrigé

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 5
Le modèle de croissance logistique

Exercice 1. : Une population de bactéries $P(t)$ croît de manière logistique. On suppose que sa taille initiale est de 3mg, que sa capacité biotique est de 100mg et que son taux de croissance intrinsèque est de 0,2mg par heure. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $P(t)$.

L'équation différentielle est $P'(t) = 0,2\, P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{100}\right)$
C'est une équation différentielle logistique.

La solution de cette équation différentielle telle que $P(0) = 3$ est la fonction logistique

$$P(t) = \frac{300}{3 + 97e^{-0,2t}}.$$

Le vérifier (en utilisant la formule (3) cours).

La formule (3) donne pour solution la fonction $P(t) = \frac{P(0)K}{P(0) + e^{-2t}(K - P(0))}$
Ici, comme $P(0) = 3$, cela donne effectivement cette fonction.
On peut le vérifier aussi en s'assurant que la dérivée $P'(t)$ est bien égale à $0,2\, P(t)(1 - P(t)/100)$

Compléter la première ligne du tableau suivant :

t	0	5	10	15	20	30	40
$P(t)$	3	7,76	18,6	38,81	62,81	92,58	98,93
$3e^{0,2t}$	3	8,15	22,17	60,26	163,76	1210,29	8942,87

Compléter la seconde ligne du tableau et comparer avec la première. Expliquer la différence.

La première ligne montre une croissance logistique qui débute comme une exponentielle puis s'amortit pour plafonner en dessous de 100.
La seconde montre une croissance exponentielle qui explose.

Le tableau suivant indique la part de la capacité biotique encore disponible à l'instant t. Le compléter puis expliquer l'évolution de cette quantité au cours du temps.

t	0	5	10	15	20	30	40
$(1 - P(t)/K)$	0,97	0,92	0,81	0,62	0,37	0,07	0,01

Calculer le temps nécessaire pour que la population de bactéries passe de 3 à 30.

Le temps nécessaire pour qu'elle passe de 3 (sa valeur en $t=0$) à 30 est, selon le 1e tableau, compris entre 10 et 15. Pour le calculer précisément, on résoud l'équation

$$\frac{300}{3 + 97e^{-0,2t}} = 30$$

Soit $300 = 30(3 + 97e^{-0,2t})$, donc $10 = 3 + 97e^{-0,2t}$
ou encore $e^{-0,2t} = \frac{7}{97}$ et donc $t = \frac{1}{0,2}\left(-\ln\frac{7}{97}\right) \simeq 13,14$
Le temps nécessaire est donc de 13 heures et près de 9 mn.