/

NOM :
PRENOM : Corrigé

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 6
Initiation aux équations différentielles

Exercice 1. : On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y^2(t)$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Sans résoudre l'équation[1], indiquer le comportement de cette population à l'avenir, selon ce modèle (croissance, décroissance ?).

Une solution $y(t)$ aura une dérivée positive (puisque $0,1y^2(t) \geq 0$)
Elle sera donc croissante.

2. Vérifier que $y(t) = \frac{10}{1-t}$ est une solution de cette équation. Quelle est sa valeur initiale ?

On calcule $y'(t)$ et $0,1y^2(t)$ et on montre qu'elles sont égales
$y'(t) = \frac{+10}{(1-t)^2}$ $\quad 0,1\,y^2(t) = \frac{0,1(10)^2}{(1-t)^2} = \frac{10}{(1-t)^2}$
La valeur initiale $y(0)$ vaut $y(0) = 10$.

3. Remplir les valeurs manquantes de la solution $y(t)$ dans la première ligne du tableau ci dessous :

t	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	.....	$\frac{9}{30}$	$\frac{10}{30}$
$y(t) = \frac{10}{1-t}$	10	10,345	10,714	11,111	11,538	12	.....	14,286	15
$\hat{y}(t)$	10	xxxx	10,666	xxxx	11,425	xxxx	.....	xxxx	14,483
$\tilde{y}(t)$	10	10,333	10,689	11,070	11,478	11,918	.....	14,062	14,721

4. La seconde ligne du tableau calcule la valeur approchée $\hat{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant un pas de deux jours (2/30). Compléter les deux valeurs manquantes. Comparer avec la solution exacte.

On utilise : $\hat{y}_{n+2} = \hat{y}_n + \frac{1}{15}(0,1)\hat{y}_n^2$

5. La troisième ligne du tableau calcule la valeur approchée $\tilde{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant cette fois un pas d'une journée. Compléter les deux valeurs manquantes et commentez.

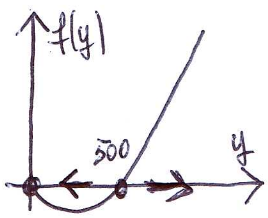
$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \frac{1}{30}(0,1)\tilde{y}_n^2$

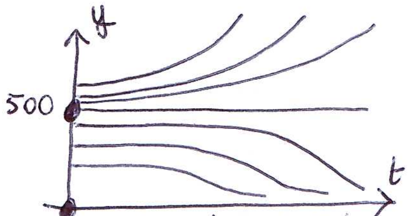
Les deux approximations $\hat{y}$ et $\tilde{y}$ donnent des valeurs inexactes qui, ici, sous-estiment la solution exacte. La seconde, $\tilde{y}$, est un peu moins inexacte car le pas $h = \frac{1}{30}$ est plus petit.

6. On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 (pour 10 000) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y(t)^2 - 50y(t).$$

Tracer le graphe de la fonction $f(y) = 0,1y^2 - 50y$ qui définie cette équation et, en vous servant du signe de cette fonction, prévoir le comportement de cette population selon sa taille initiale $y(0)$.





esquisse des solutions

On constate un comportement des solutions bien différent selon que $y(0) < 500$ ou $y(0) > 500$.

- Dans le premier cas ($y(0) < 500$) la population va décroître et tendre vers 0. Le traitement est donc efficace dans ce cas.
- Au contraire si $y(0) \geq 500$, la population reste stable (si $y(0) = 500$) ou continue à croître (si $y(0) > 500$). Le traitement ne sert donc à rien.