NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 2
Modèle dynamique pour deux espèces en compétition

Le système de Lotka-Volterra nous a permis de modèliser la dynamique de deux populations présentant une relation de type proies-prédateurs. Nous allons à présent modéliser la dynamique de *deux populations en compétition*, par exemple parce qu'elles partagent la même nourriture ou le même territoire. Notre objectif est d'étudier les possibilités de coexistence de ces deux populations. On choisit de faire les hypothèses suivantes :

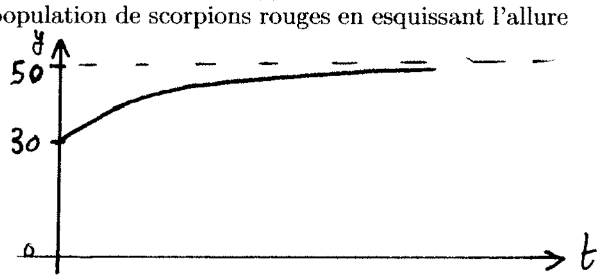
- En l'absence de l'autre espèce, chacune des deux espèces suit un modèle logistique ($x' = (\alpha_1 - \beta_1 x)x$ et $y' = (\alpha_2 - \beta_2 y)y$).
- le taux de mortalité supplémentaire pour chacune des espèces dû à la présence de l'autre espèce est proportionnel à la fois à la taille de l'une et de l'autre des deux populations (et donc proportionel à leur produit).

Voici un exemple qui modélise la compétition entre deux populations de scorpions du désert, noirs et rouges respectivement :

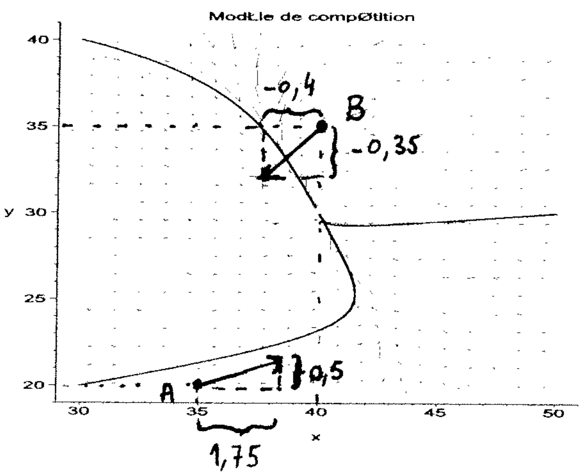
$$\begin{cases} x' &= 0,1x(3 - 0,06x - 0,02y) \\ y' &= 0,1y(1 - 0,01x - 0,02y) \end{cases} \tag{1}$$

1. Précisez quel est le taux de croissance intrinsèque r et la capacité biotique K de la population de scorpions rouges $y(t)$ lorsque l'autre population de scorpions noirs $x(t)$ est absente puis préciser quelle est, dans ce cas, le comportement de la population de scorpions rouges en esquissant l'allure du graphe de $y(t)$ en supposant $y(0) = 30$.

L'équation du modèle logistique est $y' = ry(1 - y/K)$. S'il n'y a pas de scorpions noirs on a $y' = 0,1y(1-0,02y)$ donc $r = 0,1$ et $K = \frac{1}{0,02} = 50$



2. Calculer les coordonnées (x', y') du vecteur de ce champs de vecteurs situé au point $A = (35, 20)$ et vérifier sa direction sur la figure. Même question pour celui du point $B = (40, 35)$.



$x'_A = 0,1 \times 35\ (3 - 0,06 \times 35 - 0,02 \times 20)$
$= 1,75$

$y'_A = 0,1 \times 20\ (1 - 0,01 \times 35 - 0,02 \times 20)$
$= 0,5$

Vecteur en A $= \begin{pmatrix} 1,75 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

$x'_B = 0,1 \times 40\ (3 - 0,06 \times 40 - 0,02 \times 35)$
$= -0,4$

$y'_B = 0,1 \times 35\ (1 - 0,01 \times 40 - 0,02 \times 35)$
$= -0,35$

Vecteur en B $= \begin{pmatrix} -0,4 \\ -0,35 \end{pmatrix}$

3. Calculer les équations de deux droites qui sont les isoclines $x' = 0$ du système (1).

Pour avoir $x' = 0$ il faut que $0{,}1x\,(3 - 0{,}06x - 0{,}02y) = 0$

Donc soit $\boxed{x = 0}$

soit $3 - 0{,}06x - 0{,}02y = 0$ c.a.d. $0{,}02y = 3 - 0{,}06x$

ou encore $\boxed{y = -3x + 150}$

4. Même question pour les deux isoclines $y' = 0$.

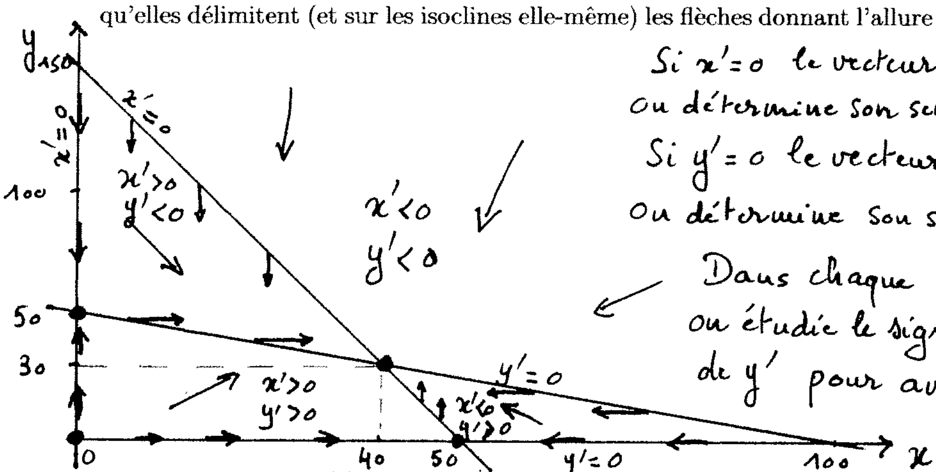
Pour avoir $y' = 0$ il faut que $0{,}1y\,(1 - 0{,}01x - 0{,}02y) = 0$

Donc soit $\boxed{y = 0}$

soit $1 - 0{,}01x - 0{,}02y = 0$ c.a.d. $0{,}02y = 1 - 0{,}01x$

ou encore $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 50}$

5. Dans un plan (x, y), tracer ci dessous les isoclines du système puis indiquer dans chaque région qu'elles délimitent (et sur les isoclines elle-même) les flèches donnant l'allure du champs de vecteurs.



Si $x' = 0$ le vecteur est vertical
On détermine son sens par le signe de y'
Si $y' = 0$ le vecteur est horizontal
On détermine son sens par le signe de x'

Dans chaque portion du plan on étudie le signe de x' et le signe de y' pour avoir la direction du vecteur.

6. Combien le système (1) a-t-il de points d'équilibres ? Calculer leurs coordonnées et les repérer sur la figure précédente. On a 4 points d'équilibre = satisfaisant $x' = 0$ et $y' = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{point } (0,0)}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + 50 \end{cases}$ $\boxed{\text{point } (0,50)}$ $\begin{cases} y = -3x + 150 \\ y = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{point } (50,0)}$

$\begin{cases} y = -3x + 150 \\ y = -\frac{1}{2}x + 50 \end{cases}$ d'où $-3x + 150 = -\frac{1}{2}x + 50$ soit $5x = 200$ donc $x = 40$
et donc $y = -3 \times 40 + 150 = 30$ $\boxed{\text{point } (40,30)}$

7. Que pensez-vous de l'évolution des deux populations selon ce modèle ? Vont-elles coexister ou l'une d'elles va-t-elle disparaître ? Expliquer.

A part les cas particuliers
$x = 0$ pas de scorpions noirs on tend vers $(0, 50)$
$y = 0$ pas de scorpions rouges on tend vers $(50, 0)$

En général si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$ les directions des vecteurs indiquent qu'on tend vers l'équilibre $(40, 30)$. Les deux populations vont coexister et tendre vers un équilibre de 40 scorpions noirs et 30 rouges.

8. Tracer approximativement les deux graphes des composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution de (1) issue du point A (question 2).