

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

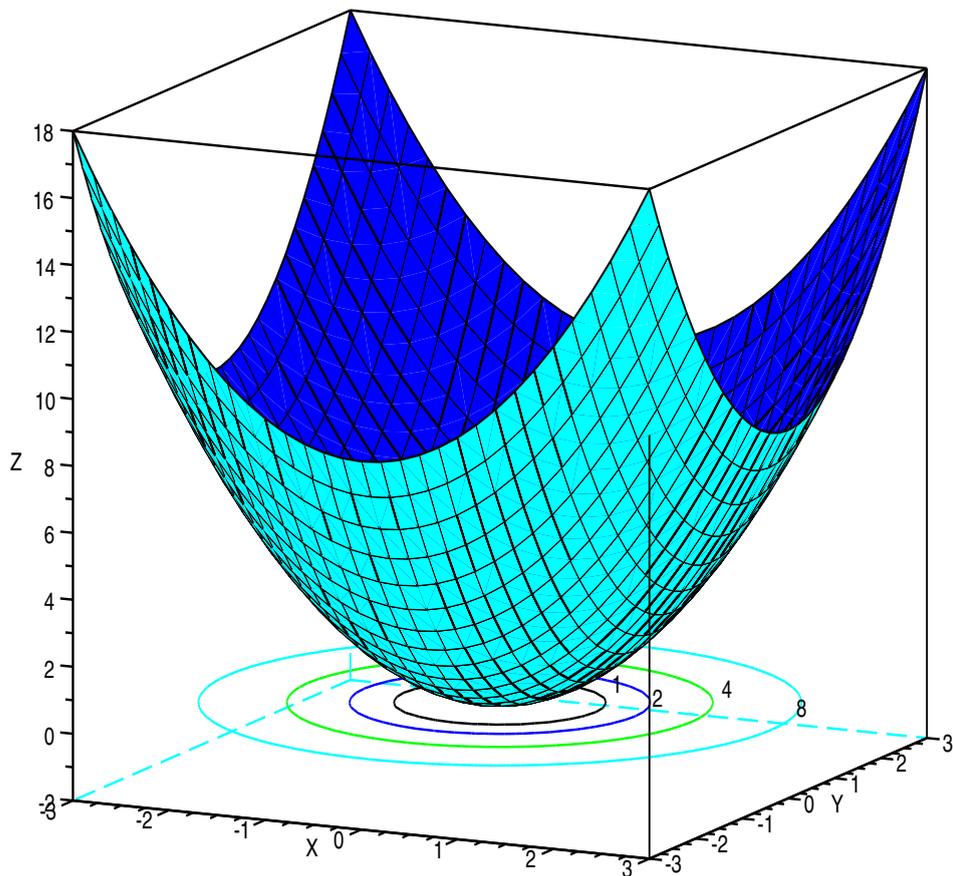
Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 4
Loi de conservation pour le modèle de Lotka-Volterra

Exercice 1. :

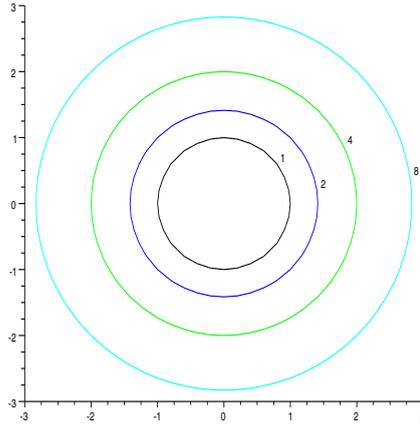
1. Soit $H(x, y) = 3 \ln y - 0.2y + 4 \ln x - 0.1x$. Calculer les deux dérivées partielles de H puis ses 4 dérivées partielles secondes.
2. Calculer la valeur de la fonction H puis la valeur de son vecteur gradient au point $(x = 70, y = 20)$.
3. Trouver le gradient de la fonction $f(x, y) = y \ln x$. Même question pour la fonction $g(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$.
4. Calculer l'équation de la courbe de niveau $k=2$ de la fonction g puis tracer cette courbe.

Exercice 2. : Le dessin suivant représente le graphe de la fonction f de deux variables, $(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ puis quelques courbes de niveau de cette fonction dans le plan $z = 0$.

1. Calculer la hauteur (on dit la cote) du point M de la surface d'abscisse et d'ordonnée $M' = (1, -2)$. Marquer sur la première figure le point M et sa projection dans le plan $z = 0$ le point M' . Tracer approximativement l'ensemble des points de la surface de même niveau que M et la projection de cette courbe. Quelle est l'équation de cette projection?



2. Dans le dessin suivant qui représente les courbes de niveau de f , marquer le point M' et tracer approximativement la courbe de niveau de f passant par M' . Quelle forme a cette courbe? Tracer la droite tangente à cette courbe de niveau en ce point.



3. Calculer le vecteur gradient de f en ce point et tracer ce vecteur sur la figure. Qu'observez-vous?

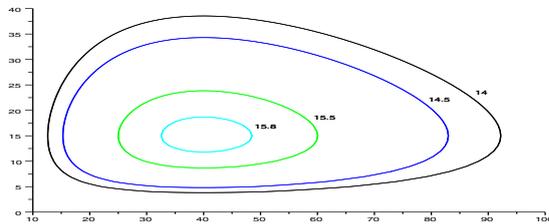
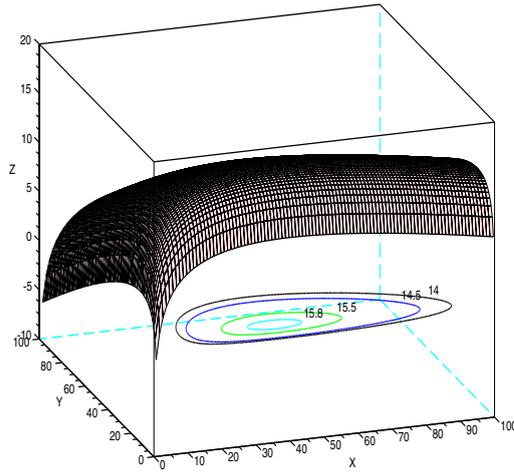
Exercice 3. : On reprend à présent l'exemple du système de Lotka Volterra étudié lors de la première séance où les proies sont des babouins et les prédateurs des guépards :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 3x(t) - 0.2x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -4y(t) + 0.1x(t)y(t) \end{cases} \quad (1)$$

. On va étudier la loi de conservation associée à ce système donnée par $H(x, y) = 3 \ln y - 0.2y + 4 \ln x - 0.1x$. Sur le dessin suivant sont représentés le graphe de la fonction H et quelques courbes de niveau de cette fonction dans le plan $z = 0$.

1. On considère le point M' du plan $z = 0$ de coordonnées $M' = (70, 20)$. Calculer son image M par H , placer M sur la surface et sa projection M' . Représenter approximativement la courbe de niveau de M sur la figure de droite.
2. Calculer le gradient de H au point M' et tracer ce vecteur sur la figure de droite.

3. Sachant que les courbes de niveau de H sont les graphes des solutions du système de Lotka-Voterra, calculer les coordonnées d'un vecteur tangent à cette courbe au point M' et tracer ce vecteur sur la figure de droite.



4. Pourquoi dit-on que la fonction H est une loi de conservation du système considéré?

5. Sachant que ce vecteur tangent est aussi un vecteur directeur de la droite tangente à cette courbe, calculer une équation de la droite tangente à cette courbe de niveau en ce point.

6. Montrer qu'en tout point (x, y) le gradient de H est perpendiculaire au champ de vecteur (x', y') donné par le système dynamique de Lotka-Volterra en calculant le produit scalaire de ces deux vecteurs.