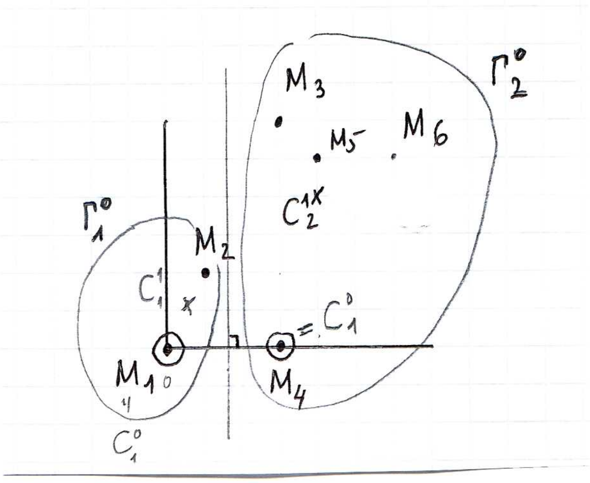
corrigé

NOM : Date :

PRENOM : Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 8
Classification par la méthode des centres mobiles

Exercice 1 : On considère les 6 points $M_1 = (0,0)$, $M_2 = (1,2)$, $M_3 = (3,6)$, $M_4 = (3,0)$, $M_5 = (4,5)$ et $M_6 = (6,5)$. En supposant que les deux points M_1 et M_4 sont les centres initiaux, décrire par une succession de dessins, les étapes de l'algorithme des centres mobiles en représentant à chaque itération de l'algorithme les centres ainsi que les classes qu'on entourera chacune d'un rond.

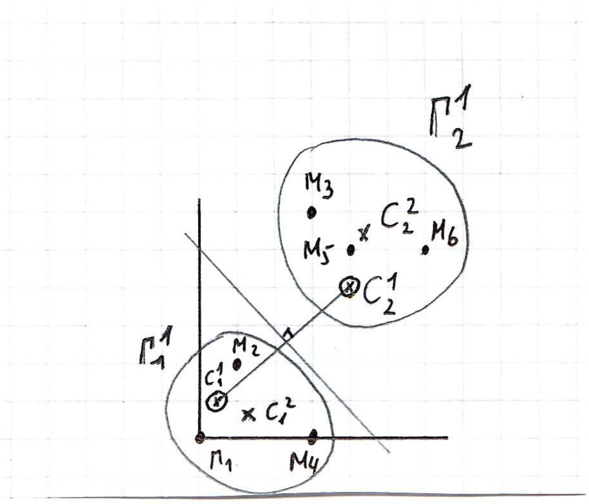


On voit que $\Gamma_1^0 = \{M_1, M_2\}$ et $\Gamma_2^0 = \{M_3, M_4, M_5, M_6\}$.

donc $\vec{OC_1^1} = \frac{1}{2}\left(\vec{OM_1} + \vec{OM_2}\right) = \frac{1}{2}\left((0,0)+(1,2)\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

et $\vec{OC_2^1} = \frac{1}{4}\left(\vec{OM_3} + \vec{OM_4} + \vec{OM_5} + \vec{OM_6}\right)$

$= \frac{1}{4}\left((3,6) + (3,0) + (4,5) + (6,5)\right) = (4,4)$



On forme les classes Γ_1^1 et Γ_2^1 autour des nouveaux centres $C_1^1 = (\frac{1}{2}, 1)$ et $C_2^1 = (4,4)$

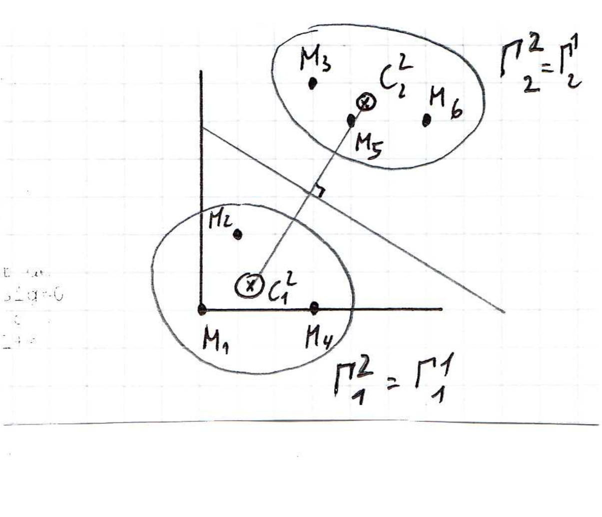
on voit que $\Gamma_1^1 = \{M_1, M_2, M_4\}$ et $\Gamma_2^1 = \{M_3, M_5, M_6\}$

donc $\vec{OC_1^2} = \frac{1}{3}\left(\vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_4}\right)$

$= \frac{1}{3}\left((0,0) + (1,2) + (3,0)\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\vec{OC_2^2} = \frac{1}{3}\left(\vec{OM_3} + \vec{OM_5} + \vec{OM_6}\right)$

$= \frac{1}{3}\left((3,6) + (4,5) + (6,5)\right) = \left(\frac{13}{3}, \frac{16}{3}\right)$



On forme les classes Γ_1^2 et Γ_2^2 autour des nouveaux centres $C_1^2 = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ et $C_2^2 = (\frac{13}{3}, \frac{16}{3})$

On observe que ceci ne change pas les classes et donc pas non plus les centres. L'algorithme converge donc vers les deux classes Γ_1^1 et Γ_2^1.

Exercice 2 : Les dessins de la page précédente représentent deux partitions différentes du même ensemble. Calculer, pour chacune des partitions, l'inertie totale du nuage puis l'inertie intra classes et vérifier qu'elle est bien décroissante au cours du processus de classification.

1. Première partition :

$\Gamma_1^0 = \{M_1, M_2\}$ centre de gravité $G_1 = C_1^1 = (\frac{1}{2}, 1)$

inertie $= J(\Gamma_1^0) = \frac{1}{6}\left(d(M_1,G_1)^2 + d(M_2,G_1)^2\right) = \frac{1}{6}\left((\frac{1}{2}-0)^2+(1-0)^2 + (\frac{1}{2}-1)^2+(1-2)^2\right) = 0,416$

$\Gamma_2^0 = \{M_3, M_4, M_5, M_6\}$ centre de gravité $G_2 = C_2^1 = (4,4)$

inertie $= J(\Gamma_2^0) = \frac{1}{6}\left(d(M_3,G_1)^2 + .. + d(M_6,G_1)^2\right)$

$= \frac{1}{6}\left((4-3)^2+(4-6)^2 + (4-3)^2+(4-0)^2 + (4-4)^2+(4-5)^2 + (4-6)^2 + (4-5)^2\right) = 4.666..$

$I_{intra} = J(\Gamma_1^0) + J(\Gamma_2^0) = 0.416.. + 4.66.. = 5.08..$

2. Deuxième partition :

$\Gamma_1^1 = \{M_1, M_2, M_4\}$ centre de gravité $G_1 = C_1^2 = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$

inertie $= J(\Gamma_1^1) = \frac{1}{6}\left((\frac{4}{3}-0)^2+(\frac{2}{3}-0)^2 + (\frac{4}{3}-1)^2+(\frac{2}{3}-2)^2 + (\frac{4}{3}-3)^2+(\frac{2}{3}-0)^2\right) = \frac{11}{9} = 1.22..$

$\Gamma_2^1 = \{M_3, M_5, M_6\}$ centre de gravité $G_2 = C_2^2 = (\frac{13}{3}, \frac{16}{3})$

inertie $= J(\Gamma_2^1) = \frac{1}{6}\left((\frac{13}{3}-3)^2+(\frac{16}{3}-6)^2 + (\frac{13}{3}-4)^2+(\frac{16}{3}-5)^2 + (\frac{13}{3}-6)^2+(\frac{16}{3}-5)^2\right) = \frac{8}{9} = 0.88..$

$I_{intra} = J(\Gamma_1^1) + J(\Gamma_2^1) = \frac{11}{9} + \frac{8}{9} = \frac{19}{9} = 2.11 < 5.08..$

bien décroissante

3. Troisième partition :

La troisième partition est identique à la deuxième.

Les inerties des parties et donc l'inertie intra sont donc inchangés

4. En calculant l'inertie inter de l'une des partition, vérifier sur l'exemple le théorème de Huygens.

Centre de gravité $G = \vec{OG} = \frac{1}{6}(\vec{OM_1} + .. + \vec{OM_6}) = (\frac{17}{6}, 3)$

Inertie totale : $J = \frac{1}{6}\left(d(M_1,G)^2 + .. + d(M_6,G)^2\right)$

$= \frac{1}{6}\left((\frac{17}{6}-0)^2+(3-0)^2 + (\frac{17}{6}-1)+(3-2)^2 + (\frac{17}{6}-3)^2+(3-6)^2 + (\frac{17}{6}-3)^2+(3-0)^2 + (\frac{17}{6}-4)^2+(3-5)^2 + (\frac{17}{6}-6)+(3-5)^2\right)$

$= \frac{1}{6 \cdot 36}\left((17-0)^2+(17-6)^2+(17-18)^2+(17-18)^2+(17-24)^2+(17-36)^2\right) + \frac{1}{6}(9+1+9+9+4+4)$

$= 9,805$

$I_{inter}(\Gamma_1^0, \Gamma_2^0) = \frac{1}{3} d(G_1,G)^2 + \frac{2}{3} d(G_2,G)^2 = \frac{1}{3}\left((\frac{17}{6}-\frac{1}{2})^2+(3-1)^2\right) + \frac{2}{3}\left((\frac{17}{6}-4)^2+(3-4)^2\right)$

$= 4.72$

$I_{intra} + I_{inter} = 5.08.. + 4.72.. = 9.80.. =$ Inertie totale