Systèmes dynamiques en Economie et leur contrôle optimal

Marc et Francine DIENER

23 septembre 2000

Table des matières

1 Extréma d'une fonction **7**
- 1.1 Rechercher une aiguille dans une meule de foin 7
- 1.2 Extréma libres 7
- 1.3 Extréma liés 8

2 Systèmes dynamiques **11**
- 2.1 Modélisation au moyen d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ 11
- 2.2 Rappels sur les systèmes dynamiques associés à un champs de vecteurs 12
- 2.3 Dynamiques linéaires du plan 14
- 2.4 Quelques dynamiques économiques ou bioéconomiques 14
  - 2.4.1 Un modèle de croissance économique de Solow et Swan 16
  - 2.4.2 Un modèle bioéconomique de Schaefer de gestion d'une ressource renouvelable . . 17
  - 2.4.3 Un modèle cyclique de Goodwin 18
  - 2.4.4 Un modèle de Schaefer-Gordon d'exploitation d'une ressource renouvelable. 20
- 2.5 Exercices 21

3 L'équation d'Euler-Lagrange **25**
- 3.1 Un exemple 25
- 3.2 L'équation d'Euler-Lagrange 26
- 3.3 Conditions nécessaires d'Erdman-Weierstrass 27
- 3.4 Optimisation avec héritage 28
- 3.5 Une condition suffisante 29
- 3.6 Exercices 30

4 Commande des systèmes différentiels **35**
- 4.1 Commande (ou contrôle) dans le cas continu 35
- 4.2 Domaine d'accessibilité 36
- 4.3 Preuve du théorème de Kalman 36
- 4.4 Exercices 38

5 Principe du maximum de Pontryagin **41**
- 5.1 Enoncé du principe du maximum 41
- 5.2 Optimisation de la pêche 42
- 5.3 Principe du maximum de Pontryagin pour les suites finies 43
  - 5.3.1 Cas d'une récurrence d'ordre un 43
  - 5.3.2 Application à une version discrète du problème (5.1)-(5.2) 44
- 5.4 Preuve du principe du maximum de Pontryagin 44
- 5.5 Exercices 47

6 Principe de Bellman **53**
- 6.1 La fonction et le principe de Bellman 53
- 6.2 Le principe de Bellman dans le cas discrêt 54
- 6.3 L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman 55
- 6.4 Exercices 56

Avant Propos

Cet ouvrage est issu de notes préparées à l'occasion de l'Ecole d'été du CIMPA de juillet 1998 à Nouakchott, dédiée aux Mathématiques appliquées à l'Economie. Elles reprenaient du matériel réuni durant les années précédentes pour un enseignement de mathématique du DEA d'Economie "Macrodynamique et Financement des Economies Ouvertes" dont le but était de permettre à des économistes de comprendre les idées du contrôle optimal et à travers lui de découvrir les richesses de la modélisation dynamique encore peu développée en Economie où les modèles statiques restent les plus répandus.

La rédaction des notes du cours du CIMPA, destinées cette fois à des mathématiciens, a été l'occasion de compléter les principaux énoncés et de mettre en place les preuves en veillant toutefois à s'éloigner le moins possible de l'éclairage qu'apporte à ces méthodes mathématiques les situations "réelles" auxquelles on les applique. Il est par exemple tout-à-fait éclairant, même si l'on cherche seulement à comprendre le principe du contrôle optimal en tant que résultat mathématique, de pouvoir interpréter les variables adjointes comme des prix (shadow prices) ou le Hamiltonien comme un flux de dividendes actualisés.

Un point que le lecteur pourra trouver inhabituel dans ce texte est l'importance accordée aux liens entre les modèles discrets et les modèles continus. Souvent, dans le processus de modèlisation d'une dynamique économique, on dispose au départ d'une récurrence discrète exprimant l'accroissement d'une grandeur (possiblement multidimensionelle) entre deux instants "proches" t et $t + \delta t$, cet accroissement étant tout d'abord linéaire en δt. Or cette récurrence, et, partant, son étude, a une égale pertinence en termes de modélisation, que le système différentiel qui s'en déduit, par passage à la limite formel, l'utilité du second résidant avant tout dans la *simplification conceptuelle* qu'il permet. Donc si un économiste trouve le discours sur les récurences plus facile à comprendre, il convient que le mathématicien soit en mesure d'aller aussi loin que possible dans la communication de ses résultats en ces termes ; lui-même n'a pas le privilège de détenir un modèle lisse qui serait plus réel qu'un autre. Il trouvera souvent le modèle continu plus commode à manipuler que le modèle discret, en particulier lorsqu'il existe un calcul plus efficace dans ce cadre ; il lui convient alors d'en apporter des exemples tangibles et de *gagner* l'adhésion du non-mathématicien. Par ailleurs si certains résultats s'avèrent plus faciles à établir dans le cadre discrèt, il n'y a plus de raison de faire disparaitre cette preuve dans un discours heuristique plus fumeux que rigoureux : il est au moins aussi utile de donner la preuve discrète rigoureuse que la preuve continue. C'est dans cet esprit que nous avons choisi d'énoncer le principe du maximum de Pontryagin pour les récurrences commandées discrètes, et de le montrer en appliquant simplement la méthode des multiplicateurs de Lagrange, raccrochant ainsi ce résultat élaboré à une technique plus simple avec laquelle le lecteur économiste est souvent bien familiarisé.

En 1998-1999 et en 1999-2000, ces notes ont été utilisées comme support d'un cours de maitrise MASS à l'Université de Nice, ce qui a permis notamment d'y incorporer de nombreux exercices conçus pour ces étudiants. Ces exercices, comme le reste de l'ouvrage, cherchent avant tout à développer l'aptitude à la modélisation en insitant moins sur la maitrise des techniques mathématiques en elles-mêmes que sur l'aptitude à proposer des modèles pertinents et à les *faire parler* de la réalité en faisant usage des méthodes mathématiques introduites. Comme enseignants, nous avons constaté que la modélisation est une aptitude difficile à enseigner ; elle se situe à la frontière entre deux disciplines, ici les mathématiques et l'économie mais ne peut pas pour autant faire l'économie d'une bonne maitrise de l'outils mathématique et elle est donc à ce titre plus difficile à acquérir qu'une aptitude en mathématique seule, de plus elle pose un serieux problème au moment des évaluations car il est infiniment plus facile de noter un exercice de mathématique pure qu'un exercice de modélisation mathématique.

Nous espérons que ces notes pourront aider ceux qui souhaitent apprendre à tirer partie des outils mathématiques des systèmes dynamiques et de leur contrôle optimal dans des problèmes économiques. Beaucoup d'exemples et certains exercices que nous proposons s'inspirent plus ou moins directement de situations décrites dans les ouvrages cités en référence, et plus spécialement dans [4], [8] ou [7], ouvrages dont nous recommandons vivement la lecture.

Nice, le 18 Août 2000 — Marc et Francine Diener

Chapitre 1

Extréma d'une fonction

1.1 Rechercher une aiguille dans une meule de foin

L'objet de ce cycle de cours est de donner des méthodes opérationnelles pour déterminer où une fonction ou une fonctionnelle est extrémale, c'est-à-dire minimale ou maximale. Nous nous concentrerons sur les conditions nécessaires d'extrémalite : il s'agit de déterminer, dans l'énorme meule de foin que constitue le domaine de définition d'une fonction voire d'une fonctionnelle, une petit nombre de points pouvant être l'extrémum ou l'un des extréma recherchés. En pratique, on souhaite produire une liste suffisante d'équations indépendantes pour que leur conjonction n'ait que des solutions isolées. Dans le cas linéaire, cela reviendrait à trouver autant d'équations (indépendantes) que de dimensions du domaine.

Nous n'aurons pas le temps de considérer des résultats indiquant des situations où ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes. De tels résultats existent. Il reviennent souvent à faire des hypothèse de convexité ou concavité sur la fonction ; ou alors, pour obtenir un résultat local, à imposer des conditions de convexité ou concavité stricte sur la hessienne. A défaut d'avoir ces résultats, une fois le candidat-extrémum cerné, il est toujours possible d'amener ce point et sa valeur en zéro : on est alors confronté au problème de montrer que la fonction est de signe constant, ce qui est souvent beaucoup plus simple.

1.2 Extréma libres

Proposition 1.1 *Soit $\gamma : u \mapsto \gamma(u) \in \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur un intervalle ouvert. Pour que u^* soit un extrémum local, il faut que $\gamma'(u^*) = 0$.*

Preuve : Quitte à remplacer γ par $-\gamma$ on peut supposer que u^* est un maximum local. Soit $\varepsilon > 0$ tel que γ soit défini sur $[u^* - \varepsilon, u^* + \varepsilon]$ et que pour tout $0 < \delta u \leq \varepsilon$ on ait $\gamma(u^* \pm \delta u) \leq \gamma(u^*)$; ceci montre que pour $u = u^* + \delta u$ voisin de u^* le rapport

$$\frac{\delta\gamma}{\delta u}(u^*) := \frac{\gamma(u^* + \delta u) - \gamma(u^*)}{\delta u}$$

est du signe de δu. Donc le nombre $\gamma'(u^*) := \lim_{\delta u \to 0} \frac{\delta\gamma}{\delta u}(u^*)$ est à la fois proche de réels positifs et négatifs. Donc $\gamma'(u^*) = 0$. □

Définition : Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ définie au voisinage de y^*. On dit que y^* est un *point critique* de g si et seulement si la différentielle $Dg(y^*)$ est l'application linéaire nulle, ou encore

$$g'_{y_i}(y^*) = 0 \ , \ i = 1..d. \tag{1.1}$$

Rappelons que $g'_{y_i}(y^*)$ représente la dérivée de la fonction partielle $\gamma_i : u \mapsto g(y^* + ue_i)$. On sait que la matrice de $Dg(y^*)$ dans la base canonique $\{e_1, \ldots, e_d\}$ de $\mathbb{R}^d$ est de *vecteur gradient* $\mathrm{Grad}\, g(y^*) := (g'_{y_1}(y^*), ..., g'_{y_d}(y^*))$. On a donc, en vertu de la formule de dérivation des fonctions composées :

Théorème 1.2 *Pour que y^* soit un extrémum de g, il faut que y^* soit un point critique de g.*

Le système (1.1) constitue un ensemble de d équations (généralement non linéaires) à d inconnues ; dans les bons cas ce système n'a qu'un petit nombre de solutions, des *candidats-extréma*, qu'il convient alors d'examiner individuellement.

1.3 Extréma liés

On appelle *extrémum* de la fonction g sous la contrainte[1] $f = 0$ tout point y^* tel que $f(y^*) = 0$ et tel que $g(y) - g(y^*)$ soit de signe constant sur tous les y vérifiant $f(y) = 0$. Comme y^* n'est plus un extrémum pour *toutes* les valeurs de y, le théorème 1.2 ne s'applique plus ; la méthode des multiplicateurs de Lagranges va permettre d'introduire un nouveau système d'équations pour déterminer les candidats-extréma.

Un cas avec un unique multiplicateur

Posons $y = (x, u)$, avec x et u dans $\mathbb{R}$, et supposons en outre qu'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(y) = 0$ si et seulement si $x = \varphi(u)$. Si $y^* = (x^*, u^*)$ est un extrémum local de g sous la contrainte $f = 0$ alors u^* est un extrémum de $\gamma(u) := g(\varphi(u), u)$, et donc $\gamma'(u^*) = 0$. Si g est $\mathcal{C}^1$, nous avons donc la condition nécessaire d'extrémalité locale suivante :

$$g'_x(y^*)\varphi'(u^*) + g'_u(y^*) = 0, \tag{1.2}$$

mais comme $f(\varphi(u), u) = 0$ pour tout u, on a

$$f'_x(y^*)\varphi'(u^*) + f'_u(y^*) = 0 \ ; \tag{1.3}$$

en combinant (1.2) et (1.3) de manière à éliminer $\varphi'(u^*)$, on obtient

$$f'_x(y^*)g'_u(y^*) - f'_u(y^*)g'_x(y^*) = 0, \tag{1.4}$$

ce qui montre que les vecteurs $\mathrm{Grad}\, f(y^*)$ et $\mathrm{Grad}\, g(y^*)$ sont colinéaires. Si $f'_x(y^*)$ (par exemple) n'est pas nul, il existe donc un coefficient de proportionalité μ^* tel que

$$\mathrm{Grad}\, g(y^*) + \mu^* \mathrm{Grad}\, f(y^*) = 0. \tag{1.5}$$

Considérons la fonction

$$L(\mu, x, u) := g(x, u) + \mu f(x, u) \ ;$$

il est immédiat de voir que la relation (1.5) et le fait que $f(y^*) = 0$ impliquent que (μ^*, y^*) est un point critique de la fonction L, dite *Lagrangien* de ce problème d'optimisation sous contrainte. En exprimant que toutes les dérivées partielle de L s'annulent au point (μ^*, x^*, u^*), on obtient un système d'équations analogue au système (1.1) du cas non contraint ! L'inconnue auxiliaire μ s'appelle le *multiplicateur de Lagrange* de ce problème. Nous allons voir que cette très jolie "astuce" d'introduction d'une variable auxiliaire se généralise à toute dimension finie et aussi, sous la forme du principe du maximum de Pontryagin, à d'importants problèmes d'optimisation de fonctionnelles.

Sur la condition "$(\partial f/\partial x)\,(y^*)$ inversible"

Pour établir l'existence du multiplicateur μ^* nous avons utilisé de façon essentielle que $\mathrm{Grad}\, f(y^*)$ est non nul. Voici un exemple qui montre que si $f'_x(y^*) = 0$, il se peut qu'il n'y ait plus de μ^*. Posons

$$\begin{aligned} f(x,u) &:= (u-1)^3 - x^2 \\ g(x,u) &:= x^2 + u^2. \end{aligned}$$

Chercher le minimum de g sous la contrainte $f = 0$ admet une interprétation géométrique simple : on cherche le point (x^*, u^*) de la cissoïde d'équation $(u-1)^3 - x^2 = 0$ qui est le plus proche de $(0,0)$. Comme $x^2 \geq 0$, cette cissoïde est contenue dans le demi-plan $u \geq 1$. On a donc facilement que $(x^*, u^*) = (0, 1)$. Ici $L(\mu, x, u) = x^2 + u^2 + \mu((u-1)^3 - x^2)$; que (μ^*, x^*, u^*) soit un point critique de L équivaut donc à

$$\begin{aligned} L'_u(\mu^*, x^*, u^*) &:= 2u^* - 3(u^*-1)^2\mu^* = 0 \\ L'_x(\mu^*, x^*, u^*) &:= 2x^* - 2x\mu^* = 0 \\ L'_\mu(\mu^*, x^*, u^*) &:= (u-1)^3 - x^2 = 0 \end{aligned}$$

qui n'admet aucune solution μ^* pour $(x^*, u^*) = (0, 1)$.

Voici comment se généralise la méthode en dimension finie quelconque. On note $(\cdot)$ le produit scalaire usuel $\mu \cdot f := \sum_{i=1..n} \mu_i f_i$. La condition "$f'_x(y^*) \neq 0$" devient ici "$(\partial f/\partial x)\,(y^*)$ inversible".

[1] Nous adoptons la lettre f pour caractériser la contrainte car cette lettre sert généralement aussi pour dénoter une équation différentielle, et ce sera bien une contrainte différentielle à laquelle nous aurons affaire aux chapitres 5 et 6. Ceci présente toutefois une inversion des conventions habituelles en matière de Lagrangien, qui ici sera égal à $g + \mu f$, le multiplicateur de Lagrange étant ici noté μ, et non λ, une autre tradition que nous bousculons pour pouvoir poser plus bas $\mu := -\lambda$ et passer du Lagrangien au Hamiltonien tout en respectant la notation usuelle pour la variable adjointe λ du principe du maximum de Pontryagin. Nous espérons que cette note permettra d'éviter les risques de confusion.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$

Théorème 1.3 *Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^p_u$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et g une fonction $\mathcal{C}^1$ définie sur le même ouvert, à valeurs réelles. Soit $(x^*, u^*) \in \mathcal{D}$. On fait l'hypothèse que la matrice*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) := ((f_i)'_{x_j}(x^*, u^*))_{i=1..n, j=1..n}$$

est inversible. Pour $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathcal{L}(\mu, x, u) := g(x, u) + \mu \cdot f(x, u)$$

Si (x^*, u^*) est un maximum (resp. un minimum) local de g sous la contrainte $f(x, u) = 0$, alors il existe $\mu^* \in \mathbb{R}^n$ tel que (μ^*, x^*, u^*) est un point critique du lagrangien *$\mathcal{L}$, c'est-à-dire que*

$$g'_{x_j}(x^*, u^*) + \mu^* \cdot f'_{x_j}(x^*, u^*) = 0 \quad , \quad j = 1..n \tag{1.6}$$

$$g'_{u_k}(x^*, u^*) + \mu^* \cdot f'_{u_k}(x^*, u^*) = 0 \quad , \quad k = 1..p \tag{1.7}$$

De plus (x^*, u^*) est un maximum (resp. un minimum) de la fonction

$$\mathcal{L}_*(x, u) := \mathcal{L}(\mu^*, x, u).$$

Preuve : Remarquons que (1.6) et (1.7) peuvent encore s'écrire

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, u^*) + {}^t\mu^* \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x^*, u^*) + {}^t\mu^* \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) = 0 \tag{1.9}$$

Comme la matrice $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*)$ est inversible, le système (1.6) admet une unique solution μ^* donnée par :

$${}^t\mu^* = -\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, u^*) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*)\right]^{-1}.$$

De plus, le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$, définie au voisinage de u^* telle que $x^* = \varphi(u^*)$, et telle que l'équation $f(x, u) = 0$ équivaut, au voisinage de (x^*, u^*) à $x = \varphi(u)$. En particulier, $f(\varphi(u), u) = 0$ pour tout u et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*)\varphi'(u^*) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) = 0 \tag{1.10}$$

et, comme g est extrémale sur $\{f(x, u) = 0\}$, u^* est un extremum de

$$u \mapsto \gamma(u) := g(\varphi(u), u).$$

On en déduit que $\gamma'(u^*) = 0$, d'où en tirant $\varphi'(u^*)$ de (1.10),

$$\begin{aligned} 0 = \gamma'(u^*) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, u^*)\varphi'(u^*) + \frac{\partial g}{\partial u}(x^*, u^*) && (1.11) \\ &= -\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, u^*) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) + \frac{\partial g}{\partial u}(x^*, u^*) && (1.12) \\ &= {}^t\mu^* \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) + \frac{\partial g}{\partial u}(x^*, u^*), && (1.13) \end{aligned}$$

ce qui montre que μ^* satisfait également (1.9), c'est-à-dire le système (1.7). □

Chapitre 2

Systèmes dynamiques

2.1 Modélisation au moyen d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

La modélisation de grandeurs économiques par une fonction d'une variable de temps continu ne va pas de soit. Généralement, il est des intervalles de temps ou "grains de temps" en-dessous desquels la modélisation perdrait son sens : la quinzaine de jours pour les intérêts sur un compte épargne, la durée moyenne de production d'une unité dans une chaine, la durée –généralement d'une année– d'un cycle biologique. Il est alors naturel de choisir cette unité pour modéliser la dynamique de cette grandeur ; nous noterons n la valeur du temps exprimé dans cette unité, et si X désigne la grandeur considérée dans une unité ad'hoc, dans bien des cas on aura un modèle réaliste de la forme

$$X_{n+1} = R(n, X_n) \tag{2.1}$$

qu'il est souvent commode de noter

$$X_{n+1} = X_n + F(n, X_n) \tag{2.2}$$

de manière à mettre l'accent sur l'accroissement de X, en posant tout simplement $F(n, X_n) := R(n, X_n) - X_n$. Convenons d'appeler cette échelle de temps l'échelle micro-bioéconomique ou simplement microscopique.

Nous nous intéresserons ici souvent aux propriétés qualitatives de ces systèmes dynamiques sur longues périodes (correspondant aux grandes valeurs de n). Il est donc utile d'introduire une seconde échelle de temps, macro-bioéconomique ou simplement macroscopique, par exemple le mois lorsque le grain de temps est la journée, l'année lorsque le grain de temps est la quinzaine ou le mois, la décénie pour une grandeur à cycle annuel. Nous noterons t la valeur du temps à cette échelle de temps, a priori t ne sera pas grand et on aura des relations du type

$$n = n(t) = \omega t \quad \text{ou} \quad t = t_n = \varepsilon n$$

avec ω grand (30, 24 ou 12, et 10 dans les exemples ci-dessus) et ε petit avec $\varepsilon\omega = 1$. A ces deux échelles, le grain de temps est donc

$$\delta n = 1 \quad \text{et} \quad \delta t = \varepsilon = 1/\omega. \tag{2.3}$$

A l'échelle macroscopique, il est naturel de changer aussi d'unité pour la grandeur bioéconomique ; nous noterons x ou $x(t)$ cette grandeur à l'échelle macroscopique, avec $x = \varepsilon^a X$, où le choix de a dépend

FIG. 2.1: Le temps microscopique n et le temps macroscopique t dans le cas où n compte les mois et t les années. Ici $\varepsilon = \frac{1}{12}$ et $\omega = 12$.

fondamentalement du choix de la théorie mathématique que l'on pense pertinente. Ainsi, dans le cas d'une grandeur stochastique, ce serait $a = \frac{1}{2}$ qui serait le choix efficace. Dans ce cours, au contraire, nous tablons sur des modèles linéaires à petite échelle et nous choisissons donc $a = 1$. D'où

$$x = \varepsilon X \quad ; \quad X = \omega x \tag{2.4}$$

ou, en termes de fonction,

$$\tilde{x}(t) := \varepsilon X_{\omega t} \quad ; \quad X_n = \omega \tilde{x}(t_n) = \omega \tilde{x}(\varepsilon n) \tag{2.5}$$

en multipliant les deux membres de (2.2) par ε, on obtient immédiatement :

$$\tilde{x}(t+\delta t) := \varepsilon X_{n+1} = \varepsilon X_n + \varepsilon F(n, X_n) =: \tilde{x}(t_n) + \varepsilon f(t_n, \tilde{x}(t_n)) \tag{2.6}$$

où l'on a posé $f(t,x) = F(\omega t, \omega x)$. En utilisant (2.3) et le fait que ε est la valeur macroscopique du grain de temps δt, la relation (2.6) implique donc

$$\frac{\tilde{x}(t+\delta t) - \tilde{x}(t)}{\delta t} = f(t, \tilde{x}(t)) \tag{2.7}$$

pour $t = t_0, t_1, \ldots$. Plusieurs théories mathématiques, telle l'analyse numérique de la *méthode d'Euler* ou la théorie de la *stroboscopie*, montrent que, pourvu que f soit régulière (par exemple $\mathcal{C}^1$), la suite des valeurs $\tilde{x}(t_n)$ est proche de la suite, notée $\overline{x}(t_n)$, des valeurs de la solution du problème différentiel ordinaire associé :

$$x' = f(t,x) \tag{2.8}$$
$$x(t_0) = \tilde{x}(t_0) \tag{2.9}$$

pourvu que δt soit petit et que t ne soit pas grand.

Une fois la modélisation posée, on constate souvent que le problème de Cauchy (2.8-2.9) est, à bien des égars, plus simple sur le plan conceptuel que son analogue discret, d'où l'intérêt de la fonction $\overline{x}(t)$ à la place de la suite $\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2), \ldots$; en économie, on utilise le joli terme de *flux* pour désigner une fonction telle que $\overline{x}(t)$ et celui de *série* pour la suite des $\tilde{x}(t_i)$. Lors d'une modélisation ce sont souvent des récurrences telles que (2.2) qui sont aisées à motiver ; avec un peu d'expérience, la relation de flux (2.8) devient aussi naturelle. En cas de doute, il est prudent de revenir à une relation de type (2.2) d'où l'on peut déduire facilement la relation de flux.

Exemple : Intérêts composés à taux fixe : La valeur d'un placement à taux fixe R et à intérêts composés vérifie

$$X_{n+1} = X_n + RX_n$$

Ici $F(n,X) = RX$; posons $r = \omega R$. On obtient $X_n = X_0(1+R)^n$ et donc

$$\tilde{x}(t_n) = \varepsilon X_n = \varepsilon X_0 (1+R)^n = \tilde{x}(0) \left(1 + \frac{r}{\omega}\right)^{\omega t}.$$

On sait[1] que $(1+\frac{r}{\omega})^\omega = e^r(1+\phi(\omega))$, où $\lim_{\omega\to\infty} \phi(\omega) = 0$. Donc $\tilde{x}(t) = x(0)e^{rt}(1+\phi(\omega))^t$; pourvu que t ne soit pas trop grand, par exemple $t \in [0,T]$ avec T fixé, la quantité $(1+\phi(\omega))^t$ tend uniformément vers 1 quand ω tend vers l'infini. L'approche au moyen d'un flux conduit à $f(t,x) = F(\omega t, \omega x) = R\omega x = rx$ et

$$x' = rx$$

d'où $\overline{x}(t) = \overline{x}(0)e^{rt}$.

2.2 Rappels sur les systèmes dynamiques associés à un champs de vecteurs

Soit $\mathcal{X}$ une variété rapportée aux coordonnées x, par exemple $\mathcal{X}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, voire $\mathbb{R}^d$ tout entier. Un *champs de vecteurs* sur $\mathcal{X}$ est la donnée d'une fonction $\mathcal{V}$ définie pour tout $x \in \mathcal{X}$, à valeurs

[1]nous notons systématiquement ϕ une quantité petite

dans $\mathbb{R}^d$. On s'intéresse à trouver les fonctions $t \mapsto \overline{x}(t)$ telles que, pour tout t, $\overline{x}'(t) := \frac{d}{dt}\overline{x}(t) = \mathcal{V}(\overline{x}(t))$; c'est pourquoi il est d'usage d'appeler champs de vecteurs l'équation

$$x' = \mathcal{V}(x) \tag{2.10}$$

Comme $\mathcal{V}(x) \in \mathbb{R}^d$, on a $\mathcal{V}(x) = (\mathcal{V}_1(x), \ldots, \mathcal{V}_n(x))$, avec $\mathcal{V}_i(x) \in \mathbb{R}$ et donc l'équation (2.10) est une écriture compacte pour le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & \mathcal{V}_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots & = & \ldots \\ x_n' & = & \mathcal{V}_n(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right. \tag{2.11}$$

A noter que la fonction $\mathcal{V}$ ne dépend pas de la variable indépendante t ; on dit que l'équation (2.10) ou le système (2.11) sont *autonômes*. Un système *non-autonôme* est une équation

$$y' = f(t, y) \tag{2.12}$$

où $y \in \mathbb{R}^m$. Ce problème, en apparence plus général, se réduit au précédent moyennant la petite astuce suivante : on pose $x := (t, y)$

$$(x_0, x_1, \ldots, x_m) = x := (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^d \ ;$$

et on pose $\mathcal{V}_0(x) = \mathcal{V}_0(t, y) := 1$ et, pour $i \geq 1$, $\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i(t, y) := f_i(t, y)$. Ainsi (2.10) devient :

$$x_0' \ = \ 1 \tag{2.13}$$

$$x_i' = y_i' \ = \ f_i(t, y_1, \ldots, y_d) \ \ , i \geq 1 \tag{2.14}$$

Les solutions de (2.13) sont évidemment $x_0(t) = t + C$; en ne considérant que les solutions telles que $C = 0$, nous voyons que $t \mapsto \overline{x}(t) = (\overline{x}_0(t), \overline{y}(t))$ est une solution de (2.10) telle que $x_0(t) = t$ si et seulement si $t \mapsto \overline{y}(t)$ est une solution de (2.12).

Les systèmes autonômes ont cet avantage que leurs solutions sont indépendantes de l'origine des temps ; précisément, si $t \mapsto \overline{x}(t)$ est une solution de (2.12) alors $t \mapsto \hat{x}(t) := \overline{x}(t - t_0)$, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, est encore une solution de (2.12), puisque $\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \overline{x}'(t - t_0) = \mathcal{V}(\overline{x}(t - t_0)) = \mathcal{V}(\hat{x}(t))$. C'est pourquoi, pour un système autonôme, il est naturel de choisir $t_0 = 0$ comme origine des temps.

Ce raisonnement ne s'applique plus pour un système non autonôme puisque, si $t \mapsto \overline{x}(t)$ est une solution de (2.12) et si on pose $\hat{y}(t) := \overline{y}(t - t_0)$, on a, généralement :

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = \overline{y}'(t - t_0) = f(t - t_0, \overline{y}(t - t_0)) \neq f(t, \overline{y}(t - t_0)) = f(t, \hat{y}(t)).$$

Il est une situation intéressante où le signe $\neq$ peut être remplacé par une égalité : c'est celui où f est t_0-périodique en t, c'est-à-dire lorsque $f(t - t_0, y) = f(t, y)$ pour tous t et y.

Définition : On appelle *système dynamique* φ sur $\mathcal{X}$ toute fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ satisfaisant, pour tous s et t réels et tout $x_0 \in \mathcal{X}$, les propriétés suivantes

- $\varphi(0, x_0) = x_0$
- $\varphi(s, \varphi(t, x_0)) = \varphi(s + t, x_0)$.

Un *système dynamique local* a ces mêmes propriétés sauf que que $\varphi(t, x_0)$ n'est défini que sur un ouvert $\mathcal{D}_\varphi \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ dit *en brosse*, c'est-à-dire tel que pour chaque $x_0 \in \mathcal{X}$, il existe $t_-(x_0) < 0 < t_+(x_0)$, avec

$$(t, x) \in \mathcal{D}_\varphi \quad \Leftrightarrow \quad t \in]t_-(x), t_+(x)[.$$

Exemple : Considérons l'équation autonôme pour $x \in \mathbb{R}$

$$x' = x^2. \tag{2.15}$$

Il est facile de voir que les solutions de (2.15) sont toutes les fonctions $t \mapsto \overline{x}(t) = \varphi(t, x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, avec $\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$. Nous voyons que $\varphi(0, x_0) = x_0$ et que $\varphi(t, x_0)$ reste défini de 0 à t tant que t n'atteint pas la valeur $1/x_0$. Selon le signe de x_0, si $x_0 > 0$ on aura $t_+(x_0) = 1/x_0$ et $t_-(x_0) = -\infty$, et si $x_0 < 0$ on aura $t_-(x_0) = 1/x_0$ et $t_+(x_0) = +\infty$. Si $x_0 = 0$, $t_-(x_0) = -\infty$ et $t_+(x_0) = +\infty$. Par ailleurs

$$\varphi(s, \varphi(t, x_0)) = \frac{\frac{x_0}{1 - x_0 t}}{1 - \frac{x_0}{1 - x_0 t} s} = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \frac{1 - x_0 t}{1 - x_0 t - x_0 s} = \varphi(s + t, x_0).$$

Ce petit miracle est général ; rappelons qu'on dit que le champs de vecteurs $\mathcal{V}$ est *localement lipschitzien* si chaque $x_0 \in \mathcal{X}$ admet un voisinage V_{x_0} et un $k_0 \geq 0$ tel que $\|\mathcal{V}(x') - \mathcal{V}(x'')\| \geq k_0 \|x' - x''\|$ pour tout x' et x'' dans V_{x_0} ; par le théorème des accroissement finis, toute fonction $\mathcal{C}^1$ est localement lipschizienne.

Théorème 2.1 *Supposons que $\mathcal{V}$ est localement lipschizienne. Il existe un plus grand ouvert en brosse $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ et un unique système dynamique local $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ tel que pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$, $]t_-(x_0), t_+(x_0)[\ni t \mapsto \overline{x}(t) := \varphi(t, x_0)$ soit solution de l'équation (2.10). Réciproquement, si $t \mapsto \overline{x}(t)$ est une solution de (2.10) définie sur un intervalle contenant $t_0 = 0$, alors $\overline{x}(t) = \varphi(t, x(0))$ pour tout t dans le domaine de $\overline{x}$.*

Si $\mathcal{V}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, il en est de même de φ. Enfin si $\varphi([0, t_+(x_0)[, x_0)$ est d'adhérence compacte dans $\mathcal{X}$ alors $t_+(x_0) = +\infty$ et analogue pour $t_-(x_0)$.

Ce théorème est la version géométrique efficace du théorème d'existence, unicité, dépendance régulières par rapport aux conditions initiales et prolongeabilité des solutions de toute équation (2.10), avec f continue et localement lipschizienne en x (voir par exemple [3] ou [8]).

La dernière assertion sur la relative compacité de $\varphi([0, t_+(x_0)[, x_0)$ implique, par exemple, que si $\lim_{t \to t_+(x_0)} \varphi(t, x_0)$ existe dans $\mathcal{X}$, nécessairement $t_+(x_0) = +\infty$. Dans l'exemple ci-dessus, nous voyons que si t est de signe opposé à celui de x_0, $\varphi(t, x_0)$ reste défini et tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

2.3 Dynamiques linéaires du plan

Henri Poincaré a introduit une classification des champs de vecteurs linéaires du plan, plus fine que la classification topologique, qui regroupe ces champs en un nombre fini de classes selon l'aspect géométrique de la famille des courbes intégrales du champs. Elle est géométrique en ce sens qu'elle ne s'attache qu'aux aspects retenus lors de l'étude des courbes paramétriques (point limite, tangente, direction asymptotique) au détriment d'aspects tels que le type de croissance.

On utilise souvent cette classification non seulement lors de l'étude de champs linéaires mais aussi lors de l'étude de champs non linéaires dont on approxime l'allure des trajectoires au voisinage des points d'équilibre en étudiant l'allure de celles du linéarisé du champs.

Un système différentiel linéaire du plan s'écrit $x' = Ax$ où $x \in \mathbb{R}^2$ et A est une matrice réelle 2×2. On supposera que A est *non dégénérée*, c'est-à-dire que 0 n'est pas une valeur propre. On notera λ et μ les deux valeurs propres de A lorsqu'elles sont réelles et on notera $\alpha \pm i\omega$ les deux valeurs propres lorsqu'elles sont complexes. On sait qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle l'application linéaire associée à A a pour matrice l'une des suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

En notant X et Y les coordonnées dans cette base, il est aisé de résoudre le système en X et Y : dans le premier cas on a $(X, Y) = (e^{\lambda t} X_0, e^{\mu t} Y_0)$, dans le second $(X, Y) = e^{\lambda t}(X_0 + tY_0, Y_0)$ et enfin dans le troisième

$$(X, Y) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \\ -\cos \omega t & \sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}.$$

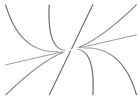
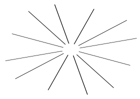
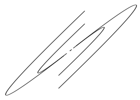
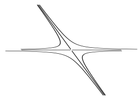
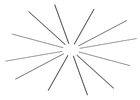
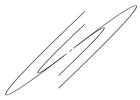
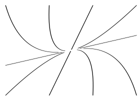
Il est dès lors facile d'en déduire le comportement des solutions. La figure 2.2 indique, selon les valeurs respectives de λ, μ et α, ce comportement ainsi que les noms donnés par Poincaré à ces divers cas. On a tracé en gras la direction correspondant aux vecteurs propres associés à λ et en pointillés celle des vecteurs propres associés à μ.

2.4 Quelques dynamiques économiques ou bioéconomiques

Voici quelques systèmes dynamiques constituant des modèles basiques. Nous adoptons les notations généralement en vigueur. Pour l'étude des propriétés de ces systèmes, une fois les équations dégagées, le mathématicien pourra souhaite revenir aux notations habituelles pour les systèmes dynamiques telles que x, (x_1, x_2) ou (x, y). Il lui reviendra alors de revenir aux variables initiales pour exprimer les propriétés dégagées en termes économiques.

Les deux premiers exemples sont des dynamiques unidimensionnelles et les deux suivants des dynamiques en dimension deux. Les exemples en dimensions un ou deux permettent notamment d'utiliser les propriétés géométriques des trajectoires, ce qui serait bien plus difficile en dimension trois et quasi impossible en dimension supérieure.

Valeurs propres réelles λ et μ

$0 < \lambda < \mu$		Noeud instable
$0 < \lambda = \mu$, A diagonalisable		Noeud dégénéré instable
$0 < \lambda = \mu$, A non diagonalisable		Noeud instable
$\lambda < 0 < \mu$		Col
$\lambda = \mu < 0$, A diagonalisable		Noeud dégénéré stable
$\lambda = \mu < 0$, A non diagonalisable		Noeud stable
$\mu < \lambda < 0$		Noeud stable

Valeurs propres complexes ($\alpha \pm i\omega$, $\omega \neq 0$)

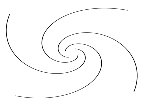
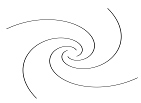
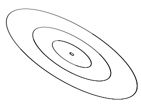
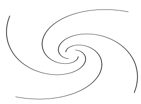
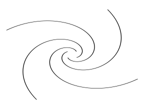
$\alpha > 0$	 ou 	Foyer instable
$\alpha = 0$		Centre
$\alpha < 0$	 ou 	Foyer stable

FIG. 2.2: Classification de Poincaré des champs linéaires du plan

2.4.1 Un modèle de croissance économique de Solow et Swan

Après la seconde guerre mondiale, on a observé dans les économies des pays industrialisés une période de croissance continue, pratiquement sans chomage, que les économistes ont cherchée à modéliser. Cela a conduit au modèle de *croissance équilibrée* de Slow-Swan[2] qui sera notre premier exemple. Dans ce modèle, la richesse est représentée par le capital noté K et il y a deux autres variables, la production, notée Y (Yield) et la force de travail, notée L (Labour). Trois équations gouvernent l'évolution dans le temps de ces trois quantités. Elles correspondent chacunes à des hypothèses, bien entendu extrêmement simplificatrices, faites sur le modèle :

- On suppose que la force de travail L croît à un taux constant λ :
$$L' = \lambda L \tag{2.16}$$
La variable L représente par exemple le nombre d'employés dans les entreprises. On ne fait pas ici de distinction entre l'offre de travail et la demande de travail, l'économie étant supposée sans chomage.
- On suppose que la production peut s'exprimer comme une fonction du stock de capital et de la force de travail disponible :
$$Y = F(K, L). \tag{2.17}$$
Pour simplifier son traitement mathématique, on considère que cette fonction F est constante dans le temps (absence de progrès technique), qu'elle est homogène de degré 1 (rendements d'échelle constants), et qu'elle est croissante par rapport à chacune de ses deux variables et concave par rapport à K. Un exemple d'une telle fonction est la fonction de Cobb Douglas $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$.
- La dernière équation affirme simplement que l'accroissement du capital est proportionnel à la production, hypothèse qui suppose que la totalité du flux de production est réinvesti dans la richesse, et donc qu'il n'y a pas de consommation :
$$K' = sY. \tag{2.18}$$

On déduit facilement des trois relations (2.16), (2.17) et (2.18) une équation différentielle qui gouverne la dynamique de la richesse K, ou plutôt la dynamique de la *richesse par tête*, $k := \frac{K}{L}$. En effet les équations (2.17) et (2.18) entrainent que $K' = sF(K, L)$, soit en utilisant l'homogénéité de F,
$$\frac{K'}{K} = s\frac{1}{K}F(K, L) = s\frac{L}{K}F(\frac{K}{L}, 1).$$
Le résultat très simple suivant sur les dérivées logarithmiques est bien utile pour calculer rapidement $\frac{k'}{k}$:

Lemme 2.2 *Si $f := f_1 \cdot f_2/f_3$, où les f_i sont des fonctions de $\mathcal{C}^1$, alors $\frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} - \frac{f_3'}{f_3}$.*

Ainsi, comme $k = \frac{K}{L}$, on a
$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}$$
et donc, si l'on pose $f(k) := F(k, 1)$, et compte tenu de (2.16), on obtient finalement l'équation différentielle :
$$k' = sf(k) - \lambda k. \tag{2.19}$$
L'étude de cette dynamique est élémentaire sur un simple dessin (voir la figure 2.3) ; comme f est une fonction croissante et concave (par exemple $f(k) = k^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$), l'équation $sf(k) = \lambda k$ a en général une solution unique k^* (c'est vrai par exemple dès que $f'(0) > \lambda$), d'ou l'on déduit que la dynamique (2.19) possède un unique équilibre stable $k = k^*$ que l'on peut calculer facilement.

Si l'on suppose que la richesse initiale est inférieure à la *richesse à l'équilibre* k^*, ce modèle montre effectivement une croissance équilibrée et durable.

On peut modifier légèrement le modèle de telle sorte à ce qu'il prenne en compte la consommation ou bien encore la dépréciation du capital. Par exemple pour modéliser le fait que la consommation par tête c est non nulle parce qu'une partie du flux de production n'est pas réinvesti, on remplace simplement l'équation (2.18) par l'équation $K' = sY + cL$, ce qui a pour effet de transformer la dynamique (2.19) en
$$k' = -\lambda k + f(k) - c. \tag{2.20}$$

[2]Solow, R.M. *A contribution to the theory of economic growth* Quaterly Journal of Economics 70 :65-94, February, 1956 Swan, T.W. *Economic growth and capital accumulation* Economic Record 32 :334-361, November, 1956

FIG. 2.3: Dans un plan (k, k'), on a tracé la droite $k' = \lambda k$ et la courbe croissante et concave $k' = sf(k)$. Ces deux courbes se coupent en $k = k^*$. On voit alors que lorsque $k < k^*$, la courbe est au dessus de la droite et donc l'équation (2.19) indique que $k' > 0$, c'est-à-dire que k est croissant. Ceci reste valable aussi longtemps que $k < k^*$, k va donc tendre vers k^*. Le même raisonnement s'applique lorsque $k > k^*$, et permet de se convaincre que dans ce cas k décroit vers k^*.

Le raisonnement sur la figure 2.3 qui met en évidence un équilibre $k = k^*$ en l'absence de consommation, s'étend facilement à ce cas : il suffit de remplacer la droite $k' = \lambda k$ par la droite $k' = \lambda k + c$ qui est parallèle et située au dessus de la précédente. On constate alors qu'une consommation par tête modérée ne fait pas disparaître l'équilibre mais le déplace un peu vers la gauche, faisant ainsi baisser le niveau de richesse k^*. Par contre une consommation trop grande le fait disparaître, la dynamique présentant alors une décroissance inexorable de k vers 0. Nous étudierons au chapitre 3 un exemple d'optimisation issu de ce modèle au moyen de l'équation d'Euler-Lagrange.

Pour prendre en compte dans ce modèle de la dépréciation du capital, au taux ν, on peut remplacer l'équation (2.18) par l'équation $K' = sY - \nu K$, ce qui a pour effet de transformer la dynamique (2.19) en

$$k' = -(\lambda + \nu)k + f(k). \tag{2.21}$$

Le raisonnement sur la figure 2.3 s'étend aussi facilement ici : il suffit de remplacer la droite $k' = \lambda k$ par la droite $k' = (\lambda + \nu)k$, ce qui change simplement sa pente. La encore, une dépréciation modérée ne fait pas disparaître l'équilibre mais le déplace un peu vers la gauche, faisant ainsi baisser le niveau de richesse à l'équilibre k^* mais une trop grande valeur de ν le fait disparaître, la droite n'ayant plus de point d'intersection avec la courbe $k' = sf(k)$.

Remarque : On notera que si l'on choisit une fonction de production F (et donc une fonction f) assez simple, comme l'exemple de Cobb Douglas, les équations différentielles (2.19), (2.20) ou (2.21) peuvent se résoudre explicitement (ce sont des équations de Bernouilli). Cependant une telle résolution explicite n'apporte rien à l'analyse que l'on peut faire facilement sur la figure 2.3, évitant ainsi tous calculs préalables.

2.4.2 Un modèle bioéconomique de Schaefer de gestion d'une ressource renouvelable

Le second exemple est celui d'une ressource renouvelable telle que la biomasse d'une espèce de poissons, les arbres d'une forêt ou une ressource agricole de type cueillette. On désigne par ν le taux de croissance naturel de la ressource. On a donc :

$$x' = F(x) = \nu x$$

Si l'on suppose ce taux ν constant, la croissance sera exponentielle et la taille de la ressource tendra rapidement vers l'infini, ce qui n'est guère réaliste. Afin de tenir compte de l'*effet de saturation* du aux limitations de l'écosystème, P.F.Verhulst[3] a proposé un modèle logistique en posant $\nu = r(1 - \frac{x}{K})$, où r est le taux de croissance de la ressource en l'absence de toute limitation (lorsque sa taille est petite) et K une valeur d'équilibre stable de la dynamique de la ressource livrée à elle-même. On choisit donc pour la taille de la ressource, en l'absence d'exploitation, la dynamique suivante :

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

[3] P.F.Verhulst *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement* Correspondance Mathématique et Physique, 10, 113-121, 1838

Et si l'on applique à cette ressource un prélèvement au taux h, sa dynamique devient :

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h$$

où h (harvest) représente le taux de prélèvement par unité de temps. On peut supposer que ce prélèvement est constant, ou égal à une fonction du temps $h(t)$ ou encore, proportionnel à la taille de la ressource.

Dans le premier cas (prélèvement constant), une étude qualitative du modèle, comme celle faite ci-dessus pour le modèle de Solow, conduit facilement à la conclusion suivante : si le prélèvement h n'est pas trop important, plus précisément si $h < \frac{rK}{4}$, il existe un équilibre stable comme dans le cas où il n'y a pas de prélèvement mais le niveau d'équilibre de la population s'établit un peu en dessous de l'équilibre existant en l'absence de prélèvement. On peut donc envisager dans ce cas une exploitation durable qui ne conduise pas à l'extinction de la ressource. Par contre si le niveau de prélèvement h dépasse le niveau critique $h = \frac{rK}{4}$, l'exploitation conduit inexorablement à l'extinction de la ressource car la population x décroit, quelque soit sa valeur initiale, vers le seul équilibre stable de la dynamique qui est alors $x = 0$. A noter que dans ce modèle, bien que le niveau critique $h = \frac{rK}{4}$ fournisse évidemment un niveau d'exploitation maximal qui soit viable pour la ressource, on ne peut guère imaginer établir durablement l'exploitation à ce niveau de prélèvement car l'équilibre $x(t) = \frac{K}{2}$ qui en résulte n'est pas un équilibre stable de la dynamique (les solutions issues de conditions initiales supérieures s'en rapprochent mais celles issues de conditions initiales inférieures s'en éloignent) et donc cela correspond à une situation particulièrement peu robuste.

Si l'on veut maximiser de façon plus réaliste l'exploitation de la ressource, il convient de passer d'un prélèvement constant à un prélèvement qui dépende du temps, c'est-à-dire de remplacer h par une fonction $h(t)$. Le problème d'un choix optimal de la politique d'exploitation $h(t)$ relève alors du contrôle optimal ; nous reviendrons sur cet exemple en détail au chapitre 5.

Mais on peut aussi améliorer le modèle précédent en tenant compte du fait que plus la taille de la ressource est petite et plus elle est difficile à exploiter. Ce point de vue conduit au *modèle de Schaefer*[4] où l'on choisit un prélèvement de la forme $h(x, E) = qEx$, où E représente un *effort de pèche*, mesuré par exemple en nombre de bateaux utilisés pour la pèche, et q est un coefficient d'*attrapabilité* de l'espèce :

$$x' = rx(1 - \frac{x}{K}) - qEx \tag{2.22}$$

L'étude de cette dynamique se fait de façon qualitative comme précédemment. On trace dans un plan (x, x') la droite $x' = qEx$ et la parabole $x' = rx(1 - \frac{x}{K})$. Si l'effort E n'est pas trop important (plus précisément si $qE > r$), ces deux courbes se coupent, non seulement en x=0 mais aussi en $x = x^* = K(1 - \frac{qE}{r})$. Ce dernier point d'intersection fournit un équilibre stable puisque si $x(t) < x^*$, alors, la droite étant située en dessous de la parabole, $x'(t) > 0$ d'après l'équation (2.22) et donc $x(t)$ croît et tend vers l'équilibre et de même si $x(t) > x^*$, $x(t)$ décroît et tend aussi vers x^*. L'expression de l'équilibre x^* indique que si l'effort est nul (c'est-à-dire en l'absence d'exploitation) on retrouve bien l'équilibre $x = K$ de la ressource livrée à elle-même et que plus l'effort E augmente et plus l'équilibre diminue. L'effort maximal viable, c'est-à-dire l'effort maximal qui permette une exploitation durable ne conduisant pas à l'extinction de la ressource, est fourni par la valeur de x correspondant au sommet de la parabole, c'est-à-dire par $x = \frac{K}{2}$ et donc l'effort $E = \frac{r}{2q}$ apparaît comme l'effort maximal viable. Dans ce cas le prélèvement h vaut $h = qEx = \frac{rK}{4}$.

On notera que l'exploitant maximise son exploitation s'il choisit cet effort maximal viable et qu'il n'a pas alors interêt à augmenter son effort car cela n'augmenterait pas son prélèvement mais le diminuerait ; de plus l'équilibre que l'exploitant cherchera ainsi à atteindre est un équilibre stable. En comparant ce modèle avec celui, étudié ci-dessus, où l'on supposait le taux de prélèvement h constant, on peut comprendre qu'il peut être préférable d'exprimer les limites légales destinées à protéger des espèces exploitées contre le risque d'extinction par surexploitation plutot en termes d'effort maximum autorisé, qu'en termes de quota maximum autorisé.

2.4.3 Un modèle cyclique de Goodwin

Le modèle de Goodwin[5] a été l'un des premier modèle de cycle économique. Avant Goodwin on considérait volontiers que les oscillations parfois présentes dans les évolutions de quantités économiques

[4]M. Schaefer *Some considerations of population dynamics and economics in relation to the management of marine fischeries* Journal of Fischeries Research Bord of Canada, 14, pp 669-681, 1957

[5]Goodwin R.M. *A growth cycle*, in C.F. Feinstein ed. Socialism, capitalism and economic growth, Cambridge University Press, 1967

que l'on étudie s'expliquaient avant tout par des chocs externes intervenus comme perturbations des dynamiques de ces quantités. On pensait en effet que ces dynamiques, elles, n'avaient aucune raison de présenter des oscillations par elles-mêmes. C'est la notion de cycles *exogènes*, par opposition à celle de cylces *endogènes* qui, eux, sont des trajectoires oscillantes, naturellement présentes dans la dynamique. Le modèle de Goodwin fut l'un des premiers exemples de cycles endogènes ; il s'agit de cycle de répartition salaire/profit. Il montre une dynamique qui ne tend pas vers un équilibre mais au contraire est constituée de cycles dont la période et l'amplitude dépendent des conditions initiales.

Dans ce modèle, les variables Y, K et L représentent, comme c'est le cas habituellement, la production nationale, le capital ou richesse du pays et la force de travail ou nombre d'employés dans les entreprises. Il s'agit d'un modèle dans lequel on ne suppose pas le plein emploi, c'est-à-dire que l'on aura à distinguer la quantité L d'une autre quantité, notée N qui représente l'offre d'emploi et qui n'a pas de raison d'être identique. Les deux variables économiques dont on se propose d'étudier la dynamique sont respectivement le *taux d'emploi de la main d'oeuvre*, noté x,

$$x := \frac{L}{N}$$

et la *part des salaires dans le revenu national*, noté z,

$$z = \frac{wL}{Y}$$

où w représente le salaire moyen et donc wL le salaire total.

Cinq équations gouvernent l'évolution dans le temps de ces diverses quantités. Elles correspondent chacunes à des hypothèses, bien entendu extrêmement simplificatrices, faites sur le modèle :

- Le revenu national est proportionnel au capital investi, ce qui permet d'écrire K comme une fonction linéaire de Y, le coefficient v, représentant la *productivité* du capital, étant supposé constant :
$$K = vY \tag{2.23}$$
- Ce revenu nécessite une main d'oeuvre dont la productivité évolue au cours du temps selon la relation :
$$L = \frac{e^{-\mu t}}{u} Y, \ \mu > 0 \text{ et } u > 0 \text{ constantes.} \tag{2.24}$$
- La demande de travail augmente au taux constant n (=natalité $-$ mortalité) :
$$N' = nN \tag{2.25}$$
- L'accroissement du capital (épargne) est égal au solde "revenus moins salaires" qui est ainsi supposé entièrement réinvesti :
$$K' = Y - wL. \tag{2.26}$$
- Le taux d'accroissement du salaire moyen est une fonction croissante du taux d'emploi : c'est la loi de Phillips[6]. Pour simplifier, on suppose ici que cette fonction croissante est simplement affine :
$$\frac{w'}{w} = ax + b, \ a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ constantes.} \tag{2.27}$$

On déduit facilement de ces cinq relations les deux équations différentielles qui gouvernent la dynamique de z et de x. Tout d'abord on calcule, à partir de la définition de z en faisant usage du lemme 2.2, le rapport $\frac{z'}{z}$:

$$\frac{z'}{z} = \frac{w'}{w} + \frac{L'}{L} - \frac{Y'}{Y}.$$

Donc, de (2.27) et (2.24) on déduit une première équation

$$\frac{z'}{z} = ax - b - \mu.$$

Puis on calcule, à partir de la définition de x en faisant usage du lemme 2.2, le rapport $\frac{x'}{x}$:

$$\frac{x'}{x} = \frac{L'}{L} - \frac{N'}{N}.$$

[6]Phillips A.W. *The relationship between unemployment and the rate of money wage rates in the United Kingdom 1861-1957*, Econmica, vol 25, 1958

FIG. 2.4: Les cycles d'un modèle de Voltera-Lotka (ou de Goodwin).

Donc, de (2.25), (2.23) et (2.24) on déduit :

$$\frac{x'}{x} = -\mu + \frac{K'}{K} - n.$$

Mais comme, en appliquant (2.26) et (2.23), $\frac{K'}{K} = \frac{Y(1-z)}{vY}$, on obtient une deuxième équation :

$$\frac{x'}{x} = \frac{1-z}{v} - (\mu + n).$$

Finalement la dynamique du vecteur (x, z) est donc régie par le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \frac{-z}{v} - (\frac{1}{v} - (\mu + n)) \\ z' & = & z(ax - (b + \mu)) \end{array} \right. \tag{2.28}$$

Ce système différentiel a la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x(-Az + B) \\ z' & = & z(Cx - D) \end{array} \right. \tag{2.29}$$

où les constantes A, B, C et D sont strictement positives. Un tel système, qui porte le nom de *système de Voltera-Lotka*, est bien connu en dynamique des populations comme un modèle *proie-prédateur*, les variables x et z représentant alors respectivement les quantités de proies (nourriture des prédateurs) et de prédateurs (se nourrissant de proies) et le système (2.29) modélisant l'évolution dans le temps de ces quantités.

L'étude d'un système de type Voltera-Lotka (et donc aussi d'un système de Goodwin (2.28)) est simple : on voit immediatement qu'il possède deux équilibres (zéros communs de x' et de z'), $(0, 0)$ et $(\frac{B}{A}, \frac{D}{C})$, le premier étant un col et le second un centre. Ceci permet de deviner le portrait de phase (voir figure 2.4) dans les trois quadrants dans lesquels x ou z sont négatifs, ce qui ne nous interesse guère puisque ces quantités modélisent des grandeurs positives. Dans le quadrant où elles sont toutes les deux positives, un simple examen du signe des quantités x' et z' montre que les trajectoires tournent autours de l'équilibre $(\frac{B}{A}, \frac{D}{C})$. Mais cet équilibre étant un centre, sa nature seule ne permet pas de savoir si ses trajectoires correspondent à des oscillations amorties, explosives ou périodiques. Mais on peut prouver qu'il s'agit d'oscillations périodiques, donc de cycles, en vérifiant que la fonction $F(z, x) := Cx - D\ln x + Az - B\ln z$ est une *intégrale première*, c'est-à-dire que ses courbes de niveau sont des trajectoires (pour cela on s'assure simplement que les vecteurs $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial z})$ et (x', z') sont perpendiculaires en montrant que leur produit scalaire est nul).

La dynamique du modèle de Goodwin fait donc bien apparaître des cycles mais on notera qu'aucun d'eux n'est un *cycle-limite*, c'est-à-dire un cycle vers lequel les autres solutions convergent. L'amplitude de ces cycles et leur période dépendent de la valeur de ces deux quantités à l'instant initial.

2.4.4 Un modèle de Schaefer-Gordon d'exploitation d'une ressource renouvelable.

Ce modèle reprend celui de Schaefer étudié ci-dessus et a été complété par Gordon[7] pour tenir compte du fait que l'exploitation de la ressource a un coût, fonction de l'effort E, et qu'elle dégage un profit fonction de la production. Il est donné par les équations différentielles suivantes :

[7]H.S. Gordon *The economic theory of common property resource :the fischery*, Journal of Political Economy, 62, pp124-142, 1954

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= F(x) - h(x,E) \\ \frac{dE}{dt} &= kR(x,E) \end{cases} \tag{2.30}$$

où la quantité $x(t)$ désigne la taille de la ressource à l'instant t et la quantité $E(t)$ l'effort d'exploitation à l'instant t. La fonction $F(x)$ désigne le taux de croissance naturel biologique de la ressource (taux de natalité moins taux de mortalité (hors exploitation)) ; la fonction $h(x,E)$ représente, du point de vue de la ressource, le taux de mortalité par exploitation, et du point de vue de l'exploitant, sa fonction de production ; k est un coefficient de réaction ; et enfin $R(x,E)$ est la rente procurée par l'exploitation de la ressource (revenus moins coûts).

Diverses hypothèses concernant l'exploitation de la ressource sont ici sous entendues. Il s'agit d'une part d'un modèle *aggrégé*, c'est-à-dire que tous les exploitants de la ressource sont considérés comme agissant de concert comme un producteur unique. Par ailleurs la forme de la première équation (modèle de Schaefer) suppose un taux de croissance naturel indépendant de l'action du producteur ce qui correspond à une exploitation de type *cueillette*, et écarte la prise en compte par ce modèle d'un type d'exploitation dans laquelle le producteur pourrait, par son action, favoriser (ou au contraire freiner) la croissance de la ressource qu'il exploite. Enfin, et c'est probablement l'hypothèse la moins innocente, la seconde équation suppose que la variation de l'effort est simplement proportionnelle au profit. C'est l'hypothèse de *rente nulle* selon laquelle un producteur tend vers une position d'équilibre où ses coûts marginaux compensent exactement ses revenus marginaux. En particulier, cela suppose qu'il agit en l'absence de toute règlementation et également qu'il ne possède aucune stratégie d'avenir. Enfin on exprime, pour simplifier, la rente $R(x,E)$ à l'aide d'un prix p que l'on choisit fixe (et exogène).

les propriétés de la dynamiques considérée dépendent, bien entendu, du choix des fonctions F, h, R et de la constante k. Nous discutons ci-dessous de ces choix. L'étude de la dynamique dans le plan (x,E) fait apparaître généralement des oscillations analogues à celles du modèles de Goodwin mais le plus souvent non périodiques.

Le choix le plus courant pour la fonction $F(x)$ est celui d'une croissance logistique $F(x) = rx(1-x/K)$, où r et K sont des constantes strictement positives représentant respectivement le *taux de croissance intrinsèque* et le *niveau de saturation*, niveau limite, vers laquelle tend la taille de la ressource lorsqu'elle ne cesse de croître.

La fonction $h(x,E)$ mesure la production par unité de temps. Elle est fonction de l'effort, c'est-à-dire de la plus ou moins grande énergie déployée pour exploiter la ressource et aussi, biensûr, de la taille de la ressource, puisqu'à effort constant l'exploitation est plus ou moins aisée selon que la ressource est abondante ou non. Pour simplifier, on suppose souvent que h est une fonction linéaire de E.

La fonction $R(x,E)$ représente la rente économique. Il est habituel de choisir une expression du type $R(x,E) = ph(x,E) - c(E)$, où p est le prix de marché de la ressource supposé fixe dans le temps et indépendant à la fois de la quantité produite et du niveau de la ressource, ce qui est une hypothèse très restrictive ; la fonction $c(E)$ est le coût de production au niveau d'effort E. Il convient de le comprendre comme un coût d'opportunité, c'est-à-dire tenant compte à la fois des coûts effectifs de l'exploitation (entretien des bateaux, salaires, ...) et d'un coût non effectif mesurant le fait de ne pas avoir eu une activité alternative plus rentable. La forme la plus souvent retenue pour cette fonction $c(E)$ (c'est celle choisie par Gordon) est simplement celle d'une fonction linéaire de E, soit $c(E) = cE$, où c est une constante.

Le coefficient k mesure la réaction ou la réponse de l'exploitant dans le choix de son niveau d'effort compte tenu de son profit. S'il est grand, *par rapport* au taux de variation de la ressource elle-même, cela signifie que l'exploitant peut faire varier très rapidement son effort. On modélise ainsi un comportement de type *tout ou rien :* si la pêche est rentable, presque tous les pêcheurs mobiliseront rapidement leurs forces pour profiter de la situation et si elle cesse d'être rentable, le plus grand nombre arrêtera très vite l'exploitation.

2.5 Exercices

Exercice 2.1 *On désigne par $p(t)$ l'évolution du prix en fonction du temps. On suppose que la demande D est une fonction linéaire de $p(t)$ de la forme $D(p(t)) = a - bp(t)$, avec $a > 0$ et $b > 0$, que l'offre S est une fonction linéaire du prix anticipé $p^e(t)$ de la forme $S(p^e(t)) = cp^e(t) - d$, avec $c > 0$ et $d > 0$ et que les anticipations de prix sont extrapolatives, c'est-à-dire qu'on a $p^e(t) = p(t) + hp'(t)$, avec $h > 0$.*

1. *De l'égalité de l'offre et de la demande, déduire l'équation différentielle donnant la dynamique de $p(t)$ et la résoudre.*

2. *Calculer le prix d'équilibre et montrer que, lorsque le prix n'est pas à l'équilibre, il tend vers le prix d'équilibre de façon monotone.*
3. *Que peut-on dire du même problème si l'on ne fait pas les hypothèses de dépendance linéaire sur* p *et* p^e *? A-t-on un prix d'équilibre ? Si oui, comment déterminer sa stabilité ?*

Exercice 2.2 1. *Montrer qu'une dynamique linéaire du plan* $U' = AU + B$ *telle que le déterminant* δ *de la matrice et sa trace* τ *vérifient les conditions* $\delta > 0$ *et* $\tau < 0$ *possède une unique équilibre stable.*

2. *On considère le modèle keynesien ISLM simplifié suivant : on désigne par* Y *le revenu national dont la dérivée est supposée proportionnelle à l'excès d'investissement* I *sur l'épargne* S *et on désigne par* r *le taux d'interêt dont la dérivée est supposée proportionnelle à l'excès de liquidité* L *sur l'offre de monnaie* M *(qu'on supposera fixée de façon exogène). La dynamique a donc la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y' & = & h_1(I-S) \\ r' & = & h_2(L-M) \end{array} \right. \tag{2.31}$$

On suppose en outre que l'investissement I *vérifie* $I = I_0 - \alpha r$*, que l'épargne est la somme de l'épargne privée (proportionnelle à la différence revenus moins impôts) et de l'épargne publique (impôts moins dépences publiques), soit* $S = s(Y-T) + (T-G)$ *et enfin que la fonction de liquidité* L *est la différence de la demande d'échanges et de la demande spéculative, soit* $L = kY - \beta r$*. On pose en outre, pour simplifier,* $h_1 = h_2 = 1$ *et* $I_0 = 0$*, les constantes* $s, \alpha, \beta, k, G, M$ *étant toutes strictement positives. Ecrire la dynamique du vecteur* (Y, r)*.*

3. *Montrer que cette dynamique possède un unique équilibre stable.*
4. *Cet équilibre peut être un foyer (*Y *et* r *convergent alors vers l'équilibre de façon oscillante) ou un noeud (*Y *et* r *convergent alors vers l'équilibre de façon non oscillante). Ecrire une condition sur les paramètres du modèle qui assure que l'on est dans le premier cas.*

Exercice 2.3 *Dans une économie d'échange de* n *biens, on suppose que les ajustements de chacun des prix* p_k, $k = 1, \ldots, n$ *sont proportionnels aux excès de demande* $D_k(P) = D_k(p_1, \ldots, p_n)$*, c'est-à-dire qu'on a pour tout* $k = 1, \ldots, n$ *:*

$$p_k' = a_k D_k(P) \tag{2.32}$$

avec $a_k > 0$ *pour tout* $k = 1, \ldots, n$*. On suppose en outre que* P *satisfait à la loi de Walras* $P \cdot D(P) = 0$*.*

1. *Montrer que* $(P, Q) \mapsto < P, Q > := \sum_{k=1}^{n} a_k p_k q_k$ *est un produit scalaire.*
2. *Soit* $\nu(P) := \sqrt{< P, P >}$ *la norme associée. Montrer que* ν *est une intégrale première de (2.32).*
3. *On suppose qu'il existe un unique prix d'équilibre* P^* *tel que pour tout* $P \neq P^*$ *on ait* $P^* \cdot D(P) > 0$*. Indiquer une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi. Montrer que dans ce cas la fonction* $L(P) := (\nu(P - P^*))^2$ *est une fonction de Lyapounov pour le système (2.32). En déduire la stabilité de l'équilibre* P^**.*

Exercice 2.4 *Etudier la stabilité des équilibres du système suivant en fonction du paramètre* α *(on pourra utiliser la fonction* $H(x, y) = x - \ln x + y - \ln y$*) :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & (1 - y - \alpha x)x \\ y' & = & (x - 1 - \alpha y)y \end{array} \right. \tag{2.33}$$

Indiquer une généralisation du modèle de Goodwin faisant apparaître un équilibre stable (au lieu d'un centre). Commentez la pertinence du modèle proposé.

Exercice 2.5 *Etudier la dynamique d'un modèle de Schaefer de gestion d'une ressource renouvelable lorsque la production issue de l'exploitation est une fonction non linéaire de la taille de la ressource de la forme* $h = qEx^\beta$*, avec* $0 < \beta < 1$*.*

Même exercice en gardant cette fois la production constante h *mais en choisissant le taux de croissance naturel de la ressource non pas logistique mais de la forme* $F(x) = rx \ln \frac{K}{x}$ *ou encore de la forme* $F(x) = rx(1 - \frac{x}{K})(\frac{x}{K_0} - 1)$*.*

Exercice 2.6 *Un individu reçoit un flux de salaire* $s(t)$ *qu'on suppose donné de façon exogène, et qu'il partage en un flux de consommation* $c(t)$ *et un flux d'épargne* $e(t)$*. On a donc* $s(t) = c(t) + e(t)$*. On suppose que sa richesse* $x(t)$ *évolue au cours du temps de la façon suivante :*

$$x'(t) = rx(t) + e(t).$$

1. *Commenter le choix de cette dynamique en indiquant notamment ce que représente* r.
2. *Comment l'individu peut-il choisir sa consommation de telle sorte que cette dynamique ait un équilibre ? Peut-il le faire de sorte que cet équilibre soit stable ?*
3. *Calculer sa richesse* $x(t)$ *en fonction de sa richesse initiale* $x(0)$, *si l'on suppose que son salaire est constant et qu'il consomme* 90% *de son salaire.*

Exercice 2.7 *Deux entreprises* X *et* Y *dont les productions à chaque instant* t *sont notées* $x(t)$ *et* $y(t)$ *respectivement, se partagent un marché qui vient de se créer. Elles ne fabriquent pas des produits identiques mais la plupart des consommateurs ayant acheté l'un n'achèteront pas l'autre.*

On suppose que la dynamique de croissance de chacune de ces entreprises en l'absence de l'autre est caractérisée par un taux de croissance intrinsèque et un seuil dû aux limitations du marché. On suppose également que la présence de l'autre entreprise introduit pour chacune une diminution du taux de croissance de sa production d'autant plus important que la production de l'entreprise concurrente est importante.

La modélisation de la dynamique des productions des deux entreprises conduit au système dynamique suivant (r, s, K, L, k, l,x_0 *et* y_0 *sont des constantes positives) :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & rx(1-\frac{x}{K}) - kxy \\ y' & = & sy(1-\frac{Y}{L} - lxy) \end{array}\right. \tag{2.34}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \end{array}\right. \tag{2.35}$$

1. *Que représentent les constantes* K *et* L *? Quels sont les taux de croissance intrinsèques de chacune des entreprises ?*
2. *Quelle est la dynamique de l'entreprise* X *en l'absence de l'entreprise* Y *? Comment est modèlisée l'interaction entre les entreprises ?*
3. *Lorsque la production de l'entreprise* Y *est nulle, indiquer vers quelle valeur d'équilibre tend la production de* X *et vérifier que cet équilibre est stable.*
4. *Montrer que si à l'instant initial la production de l'entreprise* Y *est nulle, elle le reste pour tout instant ultérieur.*
5. *Calculer les différents équilibres possibles* (x^*, y^*) *pour cette dynamique.*
6. *Dans le cas particulier où* $K = L = k = l = 1$, *et* $r, s \in]0, 1[$, *calculer le linéarisé de la dynamique au voisinage de l'équilibre dont les deux coordonnées sont non nulles (il n'y en a qu'un seul ayant cette propriété).*
7. *En déduire que, sauf condition initiale très particulière, les deux entreprises ne pourront pas, pour ces valeurs des constantes, survivre durablement toutes les deux.*
8. *Y a-t-il d'autres valeurs des paramètres pour lesquelles les deux entreprises pourraient survivre durablement toutes les deux ?*

Chapitre 3

L'équation d'Euler-Lagrange

3.1 Un exemple

Le modèle suivant, dit *modèle de consommation-épargne*, s'intéresse aux choix d'un ménage concernant la répartition de ses revenus entre épargne et consommation. Il suppose qu'elle est faite en optimisant la "satisfaction" à la fois instantanée et à venir de la consommation du ménage. Il conduit à un problème d'optimisation que l'on peut résoudre à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange.

On désigne par $s(t)$ le flux de salaire (supposé donné, ou "éxogène") que le ménage partage en (flux de) consommation $c(t)$ et (flux d')épargne $e(t)$. On a donc :

$$s(t) = c(t) + e(t) \tag{3.1}$$

On suppose que la richesse du ménage $x(t)$ évolue de la façon suivante : sa valeur marginale est la somme du flux d'intéret et du flux d'épargne :

$$\dot{x}(t) = rx(t) + e(t) \tag{3.2}$$

où r est le taux d'escompte financier. D'où l'expression suivante pour la consommation du ménage, en fonction, cette fois, du flux de salaire et de sa richesse :

$$c(t) = s(t) + rx(t) - \dot{x}(t) \tag{3.3}$$

La satisfaction procurée à chaque instant t par la consommation $c(t)$ s'apprécie au travers d'une *fonction d'utilité* notée U, généralement choisie croissante, concave, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $t > 0$ (c'est-à-dire $\ddot{U}(c) \leq 0 < \dot{U}(t)$) et l'*utilité actuelle* de cette même consommation $c(t)$ s'en déduit par une formule d'actualisation à un taux δ dit *taux d'escompte psychologique :*

$$\tilde{U}(t) = e^{-\delta t} U(c(t)) \tag{3.4}$$

Le ménage choisit sa consommation $c(t)$ de façon à maximiser l'*utilité intertemporelle*

$$\int_0^T \tilde{U} = \int_0^T U(c(t)) e^{-\delta t} dt$$

ou encore, en utilisant l'expression (3.3) de $c(t)$, il choisit sa courbe de richesse $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ de façon à maximiser

$$J(x) = \int_0^T U(s(t) + rx(t) - \dot{x}(t)) e^{-\delta t} dt.$$

Le problème est donc de déterminer une fonction x qui maximise une fonctionnelle $J(x)$ de la forme

$$J(x) = \int_0^T g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

avec, pour ce modèle, $g(t, x, v) = U(s(t) + rx - v)e^{-\delta t}$. C'est précisément l'objet de l'équation d'Euler-Lagrange.

3.2 L'équation d'Euler-Lagrange

Soit $g : [0,T]_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Pour toute fonction $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note $\dot{x}$ sa dérivée, et on pose :

$$J(x) := \int_0^T g(t, x(t), \dot{x}(t))dt.$$

Théorème 3.1 *Si x^* est une fonction $\mathcal{C}^2$ qui donne à J une valeur extrémale $J^* := J(x^*)$ parmi toutes les fonctions $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant*

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad x(T) = x_T \tag{3.5}$$

alors nécessairement x^* satisfait la formule d'Euler-Lagrange :

$$g'_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}(g'_v(t, x(t), \dot{x}(t))) \tag{3.6}$$

Signalons que, réciproquement, si $x^* : [0,T] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ satisfaisant l'équation d'Euler-Lagrange (3.6) et si pour tout $t \in [0,T]$ la fonction $g_t : (x,v) \mapsto g(t,x,v)$ est concave, alors J^* est le maximum des $J(x)$ pour les fonctions $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant (3.5) ; si de plus les f_t sont strictement concaves, x^* est l'*unique* maximum parmi ces fonctions.

Preuve : L'idée est d'utiliser le fait que toutes les dérivées partielles de la fonctionnelle J dans toutes les directions x satisfaisant (3.5) sont nécessairement nulles, et d'écrire x sous la forme $x = x^* + hX$.

Soit $X : [0,T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X(0) = 0 = X(T)$ et soit $\Phi_X(h) := J(x^* + hX)$. On a $\Phi_X(0) = J^*$ et comme ceci est la plus grande valeur de J, 0 est un extrémum de Φ_X, d'où $\frac{d}{dh}\Phi_X(0) = 0$; en d'autres termes, en dérivant sous le signe intégral puis en intégrant par partie, on a successivement :

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dh}\Phi_X(0) &= \frac{d}{dh}J(x^* + hX)|_{h=0} \\
&= \int_0^T \frac{d}{dh}g(t, x^*(t) + hX(t), \dot{x}^*(t) + h\dot{X}(t))|_{h=0}dt \\
&= \int_0^T g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))X(t) + g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\dot{X}(t)dt \\
&= \int_0^T \left[g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt}g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\right] X(t)dt + [g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))X(t)]_{t=0}^{t=T} \\
&= \int_0^T G(t)X(t)dt
\end{aligned}$$

puisque $X(0) = 0 = X(T)$, avec $G(t) := g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt}g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$, qui est continue puisque g est $\mathcal{C}^2$. Le théorème découle donc immédiatement du lemme suivant, souvent appelé *lemme fondamental du calcul des variations.* □

Lemme 3.2 *Soit $G : [0,T] \to \mathbb{R}$ continue. Si pour toute fonction continue $X : [0,T] \to \mathbb{R}$ telle que $X(0) = 0 = X(T)$ on a $\int_0^T G(t)X(t)dt = 0$ alors nécessairement la fonction G est nulle.*

Preuve : Soit $\varphi_\varepsilon : [0,T] \to [0,1]$ continue telle que $\varphi_\varepsilon(0) = 1 = \varphi_\varepsilon(T)$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \varphi_\varepsilon = 0$, par exemple $\varphi_\varepsilon(t) = e^{t(t-T)/\varepsilon}$; alors $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T G^2\varphi_\varepsilon = 0$ puisque $0 \le \int_0^T G^2\varphi_\varepsilon \le \text{Max}\,(G^2)\int\varphi_\varepsilon$. Posons $X(t) = G(t)(1 - \varphi_\varepsilon(t))$. On a :

$$0 = \int_0^T G(t)X(t)dt = \int_0^T G^2(t)dt - \int_0^T G^2(t)\varphi_\varepsilon(t)dt.$$

En passant à la limite sur ε, on a $\int_0^T G^2(t)dt = 0$ et donc $G = 0$. □

Application à l'exemple

Revenons à l'exemple du premier paragraphe ; Nous avions $g(t,x,v) = U(s(t)+rx-v)e^{-\delta t}$, d'où l'on déduit les deux dérivées partielles

$$g'_x(t,x,v) = rU'(s(t)+rx-v) \quad , \quad g'_v(t,x,v) = -U'(s(t)+rx-v)e^{-\delta t}.$$

En utilisant l'égalité $c(t) = s(t) + rx(t) - \dot{x}(t)$,

$$g'_x(t,x,v) = rU'(c(t)) \quad , \quad g'_v(t,x,v) = -U'(c(t))e^{-\delta t}.$$

En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient

$$rU' \circ c(t)e^{-\delta t} = \frac{d}{dt}\left(-U' \circ c(t)e^{-\delta t}\right) = \frac{d}{dt}\left(-U' \circ c\right)(t)e^{-\delta t} + \delta U' \circ c(t)e^{-\delta t}$$

Après simplification par $e^{-\delta t}$, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{d}{dt}\ln(U' \circ c) = (\delta - r)$$

et la résoudre

$$U' \circ c(t) = Ke^{(\delta-r)t}$$

où $K > 0$ est une constante. On peut déterminer cette constante à l'aide de la condition initiale. On obtient ainsi une relation implicite d'où l'on peut généralement déduire la consommation optimale $c^*(t)$. On peut observer notamment que, dans le cas où U' est une fonction décroissante, c'est-à-dire lorsque U est concave, le profil de consommation optimal est croissant précisément dans le cas où $(\delta - r) < 0$, c'est-à-dire dans le cas où le taux d'intérêt r est plus grand que le taux d'escompte psychologique δ.

3.3 Conditions nécessaires d'Erdman-Weierstrass

Les exercices 3.2 et 3.3 ci-dessous donnent des exemples où la valeur minimale de J est obtenue nécessairement pour une fonction dont la dérivée présente des discontinuités. Dans ce cas le théorème 3.1 ne s'applique plus tel quel mais doit être adapté.

Définition : On dit que $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et on note $x \in \mathcal{C}^1_{mcx}[0,T]$, si $x \in \mathcal{C}^0[0,T]$, et s'il existe des instants $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, dits *instants de rupture de* $\dot{x}$, et des fonctions $\mathcal{C}^1$ $x_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $x|_{[t_i,t_{i+1}]} = x_i$. Dans ce cas, on notera $\dot{x}(t_i^+) := \dot{x}_i(t_i)$ et $\dot{x}(t_{i+1}^-) := \dot{x}_i(t_{i+1})$, et

$$\int_0^T g(t,x(t),\dot{x}(t))dt := \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t,x_i(t),\dot{x}_i(t)) \tag{3.7}$$

Avec ces notations, on a le théorème suivant, qui constitue une forme intégrale du théorème 3.1 et de la formule d'Euler-Lagrange :

Théorème 3.3 *Si $x^* \in \mathcal{C}^1_{mcx}[0,T]$ donne une valeur J^* à J extrémale parmi les fonctions $x \in \mathcal{C}^1_{mcx}[0,T]$, alors il existe une constante C telle que pour tout $i = 0..n-1$*

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t,x_i^*(t),\dot{x}_i^*(t)) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,x_i^*(s),\dot{x}_i^*(s))ds + C \tag{3.8}$$

Preuve : Soit X une perturbation, c'est-à-dire une fonction telle que $X(0) = 0 = X(T)$ que nous préciserons plus loin. Il sera aisé de vérifier que la fonction X que nous choisirons est $\mathcal{C}^1_{mcx}$ et que x^* et $x^* + hX$ ont les mêmes points de rupture de leurs dérivées respectives. En procédant comme dans la preuve du théorème 3.1, la condition nécessaire $\frac{d}{dh}\Phi_X(0) = 0$ devient ici

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_i(t)X_i(t) + \beta(t)\dot{X}_i(t)dt \tag{3.9}$$

avec $\alpha_i(t) := \frac{\partial g}{\partial x}(t,x_i^*(t),\dot{x}_i^*(t))$ et $\beta_i(t) = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t,x_i^*(t),\dot{x}_i^*(t))$. Soit α telle que $\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]} = \alpha_i$ et A une primitive (continue) de α ; la constante d'intégration sera choisie plus loin. En intégrant par parties, on a

$$\int_0^T \alpha(t)X(t)dt = [A(t)X(t)]_{t=0}^T - \int_0^T A(t)\dot{X}(t)dt = 0 - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} A_i(t)\dot{X}_i(t)dt,$$

en appliquant cette relation, (3.9) devient

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\beta_i(t) - A_i(t))\dot{X}_i(t)dt. \tag{3.10}$$

A présent, choisissons la primitive A de α de manière à ce que

$$\int_0^T A(s)ds = \int_0^T \beta(s)ds, \tag{3.11}$$

et choisissons

$$X := \int_0^t (\beta(s) - A(s))ds,$$

qui est la primitive d'une fonction continue par morceaux ayant pour points de discontinuité ceux de $\dot{x}^*$; X est donc bien une fonction $\mathcal{C}^1_{mcx}$ dont les points de rupture de $\dot{X}$ coïncident avec ceux de $\dot{x}^*$. Enfin $X(0) = 0$ et $X(T) = \int_0^T \beta(s)ds - \int_0^T A(s)ds = 0$ de par notre choix de la constante d'intégration, et donc X est bien une perturbation telle qu'annoncée.

Par construction de X on a $\dot{X} = \beta - A$, et donc (3.10) devient

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\beta_i(t) - A_i(t))^2 dt \ ; \tag{3.12}$$

Comme la fonction $(\beta_i - A_i)^2$ est continue et positive, la relation (3.12) implique qu'elle est nulles, et donc $\beta_i(t) = A_i(t)$ pour tout $i = 0..n-1$ et $t \in [0,T]$, ce qui implique bien que

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x_i^*(t), \dot{x}_i^*(t)) = \beta(t) = A(t) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, x_i^*(s), \dot{x}_i^*(s))ds + C.$$

$\square$

En utilisant les propriétés de continuité et de dérivabilité des primitives on a

Corollaire 3.4 *Avec les notations du théorème, on a*

- *Pour $t \in]t_i, t_{i+1}[$, x^* satisfait à l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$g'_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}(g'_v(t, x(t), \dot{x}(t))$$

- *Pour $t = t_i$, on a la* relation *de continuité* d'Erdman-Weierstrass

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t_i, x^*(t_i), \dot{x}^*(t_i^-)) = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t_i, x^*(t_i), \dot{x}^*(t_i^+)).$$

3.4 Optimisation avec héritage

Supposons que l'on souhaite ne plus imposer la valeur $x(T)$ mais la faire intervenir dans le choix de la solution optimale, c'est-à-dire qu'on se préoccupe également, dans le problème d'optimisation, de l'héritage qu'on laisse au terme de la période $[0,T]$, *sans que l'on n'impose une valeur finale x_T.* Concrètement, soit $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ la *fonction d'héritage* et cherchons dorénavant à optimiser

$$J_H(x) := H(x(T)) + \int_0^T g(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

parmi les fonctions telles que $x(0) = x_0$. Nous obtenons un problème différent de celui étudié jusqu'ici, pour lequel on a l'analogue suivant du théorème 3.3 :

Théorème 3.5 *Si $x^* \in \mathcal{C}^1_{mcx}[0,T]$ donne une valeur J_H^* à J_H extrémale parmi les fonctions $x \in \mathcal{C}^1_{mcx}[0,T]$ telles que $x(0) = x_0$, alors*

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) = -H'(x^*(T)) - \int_t^T \frac{\partial g}{\partial x}(s, x^*(s), \dot{x}^*(s))ds. \tag{3.13}$$

Le lecteur désireux de démontrer ce théorème par lui-même trouvera à l'exercice 3.11 une décomposition en étapes de la preuve.

Preuve : Nous procèdons comme dans la preuve du théorème 3.3 : soit X une perturbation $\mathcal{C}^1_{mcx}$ que nous préciserons plus loin. Ici, par perturbation, il convient d'entendre une fonction telle que $X(0) = 0$, mais sans contrainte sur $X(T)$, puisque qu'ici $x(T)$ n'est pas imposé. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, posons ici $\Phi_X(h) := J_H(x^* + hX)$; comme x^* est un extremum de J_H, 0 est un extremum de Φ_X, et donc $\Phi'_X(0) = 0$ ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} 0 &= H'(x^*(T))X(T) + \int_0^T \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))X(t)dt + \int_0^T \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\dot{X}(t)dt && (3.14) \\ &=: \gamma X(T) + \int_0^T \alpha(t)X(t)dt + \int_0^T \beta(t)\dot{X}(t)dt && (3.15) \end{aligned}$$

où on a posé $\alpha(t) := \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$, $\beta(t) := \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$, et $\gamma := H'(x^*(T))$; les fonctions α et β sont donc continues par morceaux. Soit A la primitive suivante de α :

$$A(t) := -\gamma - \int_t^T \alpha(s)ds \text{ , d'où } A(T) = -\gamma.$$

Avec ce choix, une intégration par parties de la première intégrale de (3.15) donne

$$0 = \gamma X(T) + \int_0^T (\beta(t) - A(t))\dot{X}(t)dt - \gamma X(T) = \int_0^T (\beta(t) - A(t))\dot{X}(t)dt.$$

Il suffit à présent de choisir X tel que $\dot{X}(t) = \beta(t) - A(t)$, c'est-à-dire $X(t) := \int_0^t (\beta(t) - A(t))dt$ pour voir que $\int_0^T (\beta(t) - A(t))^2 dt$, et donc que $A(t) = \beta(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) = -H'(x^*(T)) - \int_t^T \frac{\partial g}{\partial x}(s, x^*(s), \dot{x}^*(s))ds.$$

□

Comme pour le théorème 3.3, nous en déduisons un corollaire, qui débouche sur les mêmes formules qu'alors :

Corollaire 3.6 *Si x^* est un optimum $\mathcal{C}^1_{mcx}$ de J_H parmi les fonctions telles que $x(0) = x_0$, et ayant les points de rupture de sa dérivée aux points $0 := t_0 < t_1 < \ldots < t_n := T$ on a :*

- *Pour $t \in]t_i, t_{i+1}[$, x^* satisfait à l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$g'_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}(g'_v(t, x(t), \dot{x}(t))$$

- *Pour $t = t_i$, on a la* relation *de continuité* d'Erdman-Weierstrass

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t_i, x^*(t_i), \dot{x}^*(t_i^-)) = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t_i, x^*(t_i), \dot{x}^*(t_i^+)).$$

3.5 Une condition suffisante

Comme c'est souvent le cas dans les questions d'optimisations, les conditions nécessaires d'optimalité sont aussi des conditions suffisantes sous des hypothèses de concavité. En voici un nouvel exemple :

Théorème 3.7 *Supposons que la fonction H soit concave, de même que les fonctions $(x, v) \mapsto g(t, x, v)$ pour tout $t \in [0, T]$. Soit $x^* \in \mathcal{C}^1_{mcx}$.*

1. *S'il existe une constante telle que pour tout $t \in [0, T]$*

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x_i^*(t), \dot{x}_i^*(t)) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, x_i^*(s), \dot{x}_i^*(s))ds + C \tag{3.16}$$

alors x^* est un maximum de J parmi les fonctions $x \in \mathcal{C}^1_{mcx}$ telles que $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_T$.

2. *Si pour tout $t \in [0, T]$ x^* satisfait à*

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) = -H'(x^*(T)) - \int_t^T \frac{\partial g}{\partial x}(s, x^*(s), \dot{x}^*(s))ds. \tag{3.17}$$

alors x^* est un maximum de J_H parmi les fonctions $x \in \mathcal{C}^1_{mcx}$ telles que $x(0) = x_0$.

Preuve : Rappelons que si f est une fonction différentiable au point x de différentielle $Df(x)$ en ce point, alors, si f est concave, on a, pour tout accroissement X,

$$f(x+X) - f(x) \leq Df(x)[X].$$

Observons que l'hypothèse (3.16) équivaut à l'hypothèse (3.17) si l'on choisi H telle que

$$H'(x^*(T)) = -C - \int_0^T \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))dt,$$

par exemple une fonction affine, donc concave. Pour l'essentiel de la preuve nous pouvons donc nous borner à étudier la seule hypothèse (3.17).

Soit $X \in \mathcal{C}^1_{mcx}$ quelconque telle que $X(0) = 0$; nous devons montrer que

$$\Delta := J_H(x^* + X) - J_H(x^*) \leq 0.$$

Posons une nouvelle fois

$$\alpha(t) := \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \ , \ \beta(t) := \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \ , \text{ et } \gamma := H'(x^*(T)).$$

L'hypothèse (3.17) (ou (3.16)) implique que

$$\beta(t) := \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) = -H'(x^*(T)) - \int_t^T \frac{\partial g}{\partial x}(s, x^*(s), \dot{x}^*(s))ds =: -\gamma - \int_t^T \alpha(s)ds,$$

et donc $\alpha(t) = \dot{\beta}(t)$. Par concavité des fonctions $(x, v) \mapsto g(t, x, v)$ et H on a

$$\begin{aligned} g(t, x^*(t) + X(t), \dot{x}^*(t) + \dot{X}(t)) - g(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) &\leq \alpha(t)X(t) + \beta(t)\dot{X}(t), \\ H(x^*(T) + X(T)) - H(x^*(T)) &\leq \gamma X(T). \end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} \Delta &:= J_H(x^* + X) - J_H(x^*) \\ &\leq \gamma X(T) + \int_0^T \alpha(t)X(t) + \beta(t)\dot{X}(t)dt \\ &= \gamma X(T) + \int_0^T \dot{\beta}(t)X(t) + \beta(t)\dot{X}(t)dt \\ &= \gamma X(T) + [\beta(t)X(t)]_0^T =: Z. \end{aligned}$$

Reséparons les deux cas pour conclure. Dans la situation 1. nous avons $X(0) = 0 = X(T)$ et donc $Z = 0$. Dans la situation 2. nous avons $X(0) = 0$ et donc, par (3.17) pour $t = T$,

$$\begin{aligned} Z &= \gamma X(T) + \beta(T)X(T)X(T) \\ &= (H'(x^*(T)) + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)))X(T) \\ &= (H'(x^*(T)) - H'(x^*(T)) - \int_T^T \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)))X(T) = 0. \end{aligned}$$

□

3.6 Exercices

Exercice 3.1 *Trouver les fonctions $x(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telles que $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$ qui optimisent parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, l'intégrale*

$$J(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + 2x(t))dt.$$

Même question pour l'intégrale

$$J(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + 2\dot{x}(t) + t^2)dt.$$

Exercice 3.2 *1. Trouver une fonction $x : [-1,1] \to \mathbb{R}$ telle que $x(-1) = 0$, $x(1) = 1$ qui réalise le minimum de*

$$J(x) = \int_{-1}^{1} x^2(t)(1 - \dot{x}(t))^2 dt.$$

2. *Soit $\varepsilon \simeq 0$. Trouver une fonction $x_\varepsilon(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $x(-1) = 0$, $x(1) = 1$, vérifiant $J(x_\varepsilon(t)) \simeq Min_x J(x(t))$.*
3. *Montrer qu'il n'existe aucune fonction $x(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $x(-1) = 0$, $x(1) = 1$, qui réalise ce minimum.*

Exercice 3.3 *L'exemple suivant est du à Weierstrass. On recherche une fonction $x^* : [-1,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que $x^*(-1) = -1$, $x^*(1) = 1$ qui réalise le maximum de*

$$J(x) = -\int_{-1}^{1} t^2(\dot{x}(t))^2 dt.$$

1. *Montrer que pour toute fonction $x : [-1,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que $x(-1) = -1$, $x(1) = 1$, on a nécessairement $J(x(t)) < 0$.*
2. *Soit $\omega > 0$ et soit $x_\omega(t) = \frac{Arctg(\omega t)}{Arctg(\omega)}$. Montrer que l'on a $J(x_\omega(t)) \geq -\frac{1}{\omega}$.*
3. *En déduire que J n'admet pas de maximum $x^*(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que $x^*(-1) = -1$, $x^*(1) = 1$.*

Exercice 3.4 *L'exemple suivant est dû à Weierstrass. On recherche une fonction $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que $x(0) = 1$ et $x(1) = 0$ qui réalise le minimum de*

$$J(x) = -\int_{0}^{1} t(\dot{x}(t))^2 dt.$$

1. *Montrer que pour toute fonction $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $x(0) = 1$ et $x(1) = 0$, on a nécessairement $J(x(t)) \leq 0$ et $J(x(t)) = 0$ seulement si $x(t) \equiv 0$.*
2. *Ecrire la condition nécessaire d'Euler-Lagrange et en déduire que le problème n'a pas de solution de classe $\mathcal{C}^1$.*
3. *Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal et soit $x_\varepsilon(t)$ la fonction définie par :*

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [0,\varepsilon] \\ \frac{\ln t}{\ln \varepsilon} & si\ t \in [\varepsilon, 1] \end{cases}$$

   Montrer que $J(x_\varepsilon(t))$ est infinitésimale et donc que si le minimum cherché existe dans la classe des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il est nul.
4. *En déduire que J n'admet pas non plus de minimum $x(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*

Exercice 3.5 *Soit $x(t)$, $t \in [a,b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui minimise une intégrale de la forme*

$$J(x(t), x'(t)) = \int_a^b f(x(t), x'(t)) dt$$

où $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. *Montrer que dans ce cas la quantité suivante est nécessairement constante :*

$$f(x(t), x'(t)) - x'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), x'(t)).$$

2. *Sachant que la surface de révolution engendrée par une fonction $x(t)$ est donnée par :*

$$S = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{1 + (x'(t))^2} dt.$$

   Montrer que si cette surface est minimale alors la courbe $x(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$(x'(t))^2 = \frac{x(t)^2}{\lambda^2} - 1$$

   où λ est une constante. (On pourra vérifier que cette équation posséde des solutions de la forme $\lambda ch(\frac{t}{\lambda} + \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$).

Exercice 3.6 *Gestion d'une ressource renouvelable :*

1. *Dynamique de la ressource en l'absence d'exploitation.*
   On désigne par $x(t)$ la taille de la ressource en fonction du temps. Pour fixer les idées, on supposera ici qu'il s'agit d'une ressource halieutique (poissons) mais on pourrait appliquer le même type de raisonnement à des ressources forestières ou des investissements à rendements constants. On suppose que la fonction $x(t)$ est définie sur l'intervalle $[t_-, t_+]$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle $x' = F(x)$. Décrire sa dynamique, (ses équilibres, leur stabilité, le comportement des trajectoires selon les valeurs initiales $x(t_-)$, ...) dans les deux cas suivants (on suppose $r > 0$ et $K > 0$) :
   (a) $F(x) = rx$ *(modèle de croissance exponentielle)*
   (b) $F(x) = rx(1 - \frac{x}{K})$ *(modèle de croissance logistique)*
2. *Dynamique de la ressource en présence d'exploitation.*
   Pour modéliser l'exploitation de la ressource, on suppose que le taux de croissance intrinsèque instantané $F(x)$ est diminué d'une quantité $u(t, x)$ représentant le taux de prélèvement instantané pour exploitation de la ressource. On a alors la dynamique :
   $$x' = F(x) - u(t, x) \tag{3.18}$$
   Etudier cette dynamique dans le cas où $u(t, x)$ est une fonction constante $u(t) \equiv \overline{u}$. Pour quelles valeurs de cette constante $\overline{u}$ l'exploitation conduit-elle, dans tous les cas, à l'extinction de la ressource ?
3. *Etudier cette dynamique dans le cas où $u(t, x)$ est de la forme $u(t) \equiv Ex$, où la constante E s'interprète ici comme un effort de pèche, par exemple mesuré en nombre de bateaux utilisés. Indiquer pour quelle valeur de l'effort E l'exploitation de la ressource est-elle la plus productive. Existe-t-il des valeurs de e conduisant, dans tous les cas, à l'extinction de la ressource ?*
4. *Il y a deux façons au moins de définir une politique de limitation de la pèche : soit en imposant des quotas de pèche à ne pas dépasser, soit en limitant l'effort de pèche. Discuter les mérites et les dangers de ces deux politiques en termes de développement durable.*
5. *Critère à optimiser.*
   On suppose que la ressource peut être vendue au prix fixe (exogène) p et que son exploitation a un coût unitaire $c(x)$, fonction de la taille de la ressource. On désigne par δ le taux d'escompte du marché. Quel est le profit net $R(x)$ induit par un prélèvement $u(t, x)$? Quel est le profit total actualisé $J(x)$ (ou profit intertemporel) sur la période $[t_-, t_+]$?
6. *En utilisant l'équation différentielle (3.18) qui modélise la dynamique de la ressource en présence d'exploitation, montrer que l'on peut écrire le profit total J sous la forme*
   $$\int_{t_-}^{t_+} g(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$
   et en déduire une condition nécessaire sur $x(t)$ pour que J soit maximal. A quelle politique de prélèvement cette solution optimale correspond-elle ?
7. *Reprendre l'exercice si $p = p(t)$ est fonction du temps.*

Exercice 3.7 *Ce problème traite de l'exploitation optimale d'une ressource non renouvelable de dynamique $x'(t) = -u(t)$. On désigne respectivement par $x_0 = x(0)$ et $x_T = x(T)$ le stock à l'instant initial et le stock à la fin de la période considérée $[0, T]$ et par $p(u)$ la valeur d'une unité extraite de la ressource lorsque le niveau de production est égal à u. On recherche le niveau u qui permette de maximiser la quantité :*

$$J(u) = \int_0^T e^{-rt}u(t)p(u(t))dt + e^{-rT}x_T \tag{3.19}$$

1. *Expliquer ce que représente la quantité $J(u)$.*
2. *On propose de choisir pour p la fonction $p(u) = \frac{1-e^{-u}}{u}$. Discuter la pertinence de ce choix.*
3. *Après transformation de $J(u)$ au moyen de la dynamique, montrer que la solution optimale $x_*(t)$ vérifie nécessairement l'équation $x_*''(t) = -r$. Tracer les graphes de ces fonctions.*
4. *En déduire le niveau optimal de la ressource $x_*(t)$ ainsi que la production optimale $u_*(t)$ en fonction des constantes T, r, x_0 et x_T.*
   Application numérique : $r = 0.1$, $T = 10$, $x_0 = 5$, $x_T = 2$.

Exercice 3.8 *Les coupes de forêts fraichement exploitées sont souvent le lieu de reproduction de faisans et on peut alors admettre qu'à cet endroit la dynamique de la population des faisans, notée $x(t)$, a les caractéristiques logistiques habituelles*

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K(t)})$$

mais avec un coefficient de saturation K qui n'est pas constant durant la période correspondante $t \in [0, T]$ mais qui dépend du temps t.

Déterminer une politique de chasse qui maximise le profit des chasseurs durant la période considérée en supposant pour simplifier que le taux d'escompte de l'argent est nul et le prix de vente du gibier constant.

Exercice 3.9 *On reprend le modèle de* consommation-épargne *(traité au début du chapitre) dans lequel $x(t)$ désigne la richesse de dynamique $x'(t) = rx(t) + e(t)$, où $e(t)$ est l'épargne, $s(t)$ le salaire et $c(t)$ la consommation (égale à $s(t) - e(t)$). On suppose que les ménages cherchent à optimiser leur utilité intertemporelle, donnée par*

$$J(x) = \int_0^T U(c(t))e^{-\delta t}dt.$$

1. *On choisit une fonction d'utilité de la forme $U(c) = \ln c$. Montrer que dans ce cas la fonction de consommation qui maximise J est la fonction $c(t) = c(0)e^{(r-\delta)t}$. Interpréter le choix de U et la conclusion obtenue.*
2. *On choisit un salaire de la forme $s(t) = s_0 e^{\sigma t}$, avec $r < \sigma$. Calculer la solution $x(t)$ optimale (on pourra utiliser le fait que si $\hat{x}(t)$ est une solution particulière d'une équation différentielle de la forme $ax'(t) + bx(t) = f(t)$ et si $\tilde{x}(t)$ est une solution particulière de $ax'(t) + bx(t) = g(t)$ alors $\hat{x}(t) + \tilde{x}(t)$ est une solution particulière de $ax'(t) + bx(t) = f(t) + g(t)$). Etant donné $x(0) = x_0$, pourra-t-on choisir une solution optimale qui satisfasse également une valeur finale $x(T) = x_T$ donnée ? Interpréter le choix de s et les solutions trouvées.*

Exercice 3.10 *On reprend le problème de consommation-épargne (traité au début du chapitre) mais cette fois avec un terme d'héritage : on cherche une fonction $x(t)$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que $x(0) = x_0$, qui maximise*

$$\int_0^T e^{-\delta t}u(s(t) + rx(t) - x'(t))dt + A(x(T)).$$

On suppose que $u(c) = \ln c$ et $A(x) = e^{-\delta T}\ln x$.

1. *Ecrire la condition nécessaire d'Euler-Lagrange correspondant au cas de solutions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (forme intégrale) avec terme d'héritage.*
2. *En déduire qu'en $t = T$, on a nécessairement $x(T) = c(T)$.*
3. *En reprenant les calculs fait dans le cas où il n'y a pas de terme d'héritage, montrer que $c(T) = c(0)e^{(r-\delta)T}$.*
4. *Montrer que l'on a $x(T) = x(0)e^{rT} + \int_0^T (s(\tau) - c(\tau))e^{r(T-\tau)}d\tau$.*
5. *On désigne par R la richesse totale actualisée du ménage :*

$$R := x_0 + \int_0^T s(\tau)e^{-r\tau}d\tau$$

Montrer que l'on doit avoir $c(0) = \frac{R\delta}{(\delta-1)e^{-\delta T}+1}$. En déduire la solution du problème.

Exercice 3.11 *On se propose de démontrer le théorème 3.5 que nous reénonçons :*
Théorème : *Soit $g(t, x, \dot{x})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\frac{\partial g}{\partial x}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $H(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$; une condition nécessaire pour qu'une fonction $x : [t_-, t_+] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que $x(t_-) = x_-$, soit un extrémum de $J_H(x) := H(x(t_+)) + \int_{t_-}^{t_+} g(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ est que*

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t_+, x(t_+), \dot{x}(t_+)) = -H'(x(t_+)) - \int_{t_-}^{t_+} \frac{\partial g}{\partial x}(\tau)d\tau. \tag{3.20}$$

1. *Montrer que si $x^*(t)$ est un extrémum de $J_H(x)$ dont les points de discontinuité de la dérivée sont $t_- := t_0 < t_1 < \ldots < t_n := t_+$, alors, pour toute perturbation $h(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $h(t_-) = 0$ et tout $s > 0$, la fonction $j_h(s)$ définie par $j_h(s) := J_H(x^*(t) + sh(t)) - J_H(x^*(t))$ est une somme de fonctions dérivables et possède un maximum en $s = 0$.*

2. *On pose* $\gamma = H'(x^*(t_+))$, $\alpha(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$ *et* $\beta(t) = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$. *Déduire de la question précédente que, si* $x^*(t)$ *est un extrémum de* $J_H(x)$, *on doit avoir :*

$$\gamma h(t_+) + \int_{t_-}^{t_+} \alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)dt = 0 \tag{3.21}$$

3. *On pose* $a(t) := -\gamma - \int_t^{t_+} \alpha(\tau)d\tau$. *Déduire de (3.21) que, si* $x^*(t)$ *est un extremum de* $J_H(x)$, *on a*

$$\int_t^{t_+} (\beta(t) - a(t))\dot{h}(t)dt = 0 \tag{3.22}$$

4. *En observant que la condition (3.22) doit être satisfaite pour toute fonction* h *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $h(t_-) = 0$, *montrer le théorème.*

Exercice 3.12 *On considère le problème classique de gestion de ressource de pèche : maximiser* $J(h)$ *lorsque*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & F(x) - h(t) \\ J(h) & = & \int_0^\infty e^{-\delta t}(p - c(x))h(t)dt \end{array} \right. \tag{3.23}$$

et on suppose que $c(x) = c/x$ *et*

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} rx & si\ x < K \\ 0 & si\ x \geq K \end{array} \right.$$

1. *Montrer en utilisant le critère d'Euler-Lagrange que la pèche optimale* $h^*(t)$ *consiste à maintenir la ressource au niveau* x^* *tel*

$$x^* = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\gamma x_\infty}{\gamma - 1} & si\ \gamma \geq \frac{K}{K - x_\infty} \\ K & sinon \end{array} \right.$$

où $x_\infty = c/p$ *et* $\gamma = \delta/r$.

2. Application : *Si l'on suppose* $r = 0,08$, $K = 400000$ *et* $x_\infty = 40000$ *(chiffres concernant la population de baleines bleues dans l'antarctique), indiquer la population optimale* x^* *et la pèche optimale* h^* *dans les trois cas suivants :* $\delta = 0,01$, $\delta = 0,05$ *et* $\delta = 0,10$. *Comparer ces chiffres avec ceux que l'on obtient lorsque l'on suppose la dynamique logistique* $(F(x) = rx(1 - \frac{x}{K}))$.

Exercice 3.13 *On suppose que la grandeur* x *est contrôlée par la dynamique*

$$\dot{x} = F(x) - u \tag{3.24}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}$ *et* $u(t) \in \mathbb{R}$.

On s'intéresse à maximiser l'utilité intertemporelle suivante :

$$J(u) := \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\pi(x, u)dt \tag{3.25}$$

où $\delta > 0$ *est une constante, et* π *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$. *Soit* x^* *une solution* stationnaire *(c'est-à-dire constante) de (3.24).*

1. *Montrer que* $F(x^*) = u(t) =: u^*$ *pour tout* $t \geq 0$.
2. *Montrer que si* x^* *est un optimum de (3.25), alors*

$$F'(x^*) + \frac{\pi'_x(x^*, u^*)}{\pi'_u(x^*, u^*)} = C^*, \tag{3.26}$$

où C^* *est une constante que l'on précisera.*

Rep : $C^* = \delta$

Exercice 3.14 *On dénote par* x *le stock d'une entreprise d'un de ses produits. Cette entreprise souhaite en produire une quantité* Q *dans le temps, imposé,* T. *En fonction du stock et du taux de production* $\dot{x}$, *le coût de production durant la période* $[0, T]$ *considérée est donnée par*

$$J = \int_0^T \left(\frac{a}{2}\dot{x}^2 + 2bx\right) dt, \ a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ constantes données.} \tag{3.27}$$

1. *Au moyen de la méthode d'Euler-Lagrange, déterminer, en fonction de* t *et du taux de production initial* $u_0 := \dot{x}(0)$, *le stock optimal intantané* x.
2. *En déduire le taux de production initial* u_0 *optimal, en fonction de* Q.
3. *En déduire, en fonction de* t, *le stock optimal* x.

Chapitre 4

Commande des systèmes différentiels

Commande ou *contrôle* sont deux synonymes dans ce contexte : la première terminologie se réfère à l'usage en Union Soviétique et la seconde à l'usage aux Etats-Unis. Cette dualité de terminologie remonte à la Guerre Froide , ce qui explique l'existence de deux théories qui se sont développées longtemps de façon complètement séparée. La première a été initiée par Pontryaguin et la seconde par Bellman.

4.1 Commande (ou contrôle) dans le cas continu

On considère une variable $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, dite *variable d'état*, soumise à une dynamique de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,u) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{4.1}$$

où u est une fonction $u : [0,T] \to U \subseteq \mathbb{R}^p$ appelée *commande* ou *contrôle*. On appelle *réponse* du système l'unique solution $x = x_u(t)$ de l'équation non autonôme $\dot{x} = f(x, u(t))$ vérifiant la condition initiale $x_u(0) = x_0$.

Exemple : Dans le cas où la dynamique (4.1) est linéaire, c'est-à-dire si $f(x,u) = Ax + Bu$, où A et B sont des matrices $n \times n$ et $n \times p$ respectivement, et si de plus A est une matrice constante, on dispose d'une formule explicite de résolution qui permet d'exprimer explicitement la réponse en fonction du contrôle :

$$x_u(t) = x_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds. \tag{4.2}$$

Dans le cas général, la commande $u(t)$ étant donnée, il n'existe aucune formule explicite fournissant la réponse en fonction de la commande ; cependant le théorème d'existence et d'unicité locale (voir chapitre 2) permet d'assurer l'existence d'une réponse unique, moyennant des hypothèses de régularité convenables. C'est le cas par exemple dès que u est une fonction continue, pourvu que $f(x,u)$ soit continue et localement lipschitzienne en $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}$ sous-ensemble ouvert. Malheureusement dans beaucoup de problèmes, les contrôles les plus intéressants (notamment les contrôles optimaux) ne sont pas continus. Il convient donc d'élargir quelque peu la classe des contrôles que l'on considère.

Définition : Une fonction $u : [0,T] \to \mathbb{R}^p$ est dite *càdlàg* (pour *continue à droite avec limite à gauche*) s'il existe une suite d'instants $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ tels que pour tout $n = 1..N$, on ait $u|_{[t_{n-1},t_n[}$ est continu et $\lim_{t \to t_n^-} u(t) =: u_n^-$ existe.

Lorsque le contrôle est càdlàg, il coïncide en particulier sur chaque intervalle de continuité $[t_{n-1}, t_n[$ avec une fonction continue $u_n : [t_{n-1}, t_n] \to U$; la réponse $x_u(t)$ est donc définie, par récurrence, sur $[0, t_1], \ldots, [t_{n-1}, t_n], \ldots$, comme *la* solution de $\dot{x} = f(x, u_1(t)), \ldots, \dot{x} = f(x, u_N(t))$ respectivement, la valeur finale pour $t = t_n$ de la solution $x_n(t)$ servant de condition initiale à $x_{n+1}(t)$. Ainsi le théorème d'existence et d'unicité usuel assure qu'il y a bien au plus une réponse x_u pour chaque commande càdlàg.

Définition : Une fonction u, càdlàg et à valeurs dans U, est appelée une *commande admissible*. On notera $\mathcal{U}$ l'*ensemble des commandes admissibles*. La donnée (f,U) d'un système dynamique de type (4.1) et d'un ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^p$ est appelé un *système commandé*.

Outre les cas où $U = \mathbb{R}^p$, on considère souvent des cas où U est compact (*commandes bornées*), parfois convexe, parfois "au contraire" $U = \{-1,+1\}$ ou $U = \{-1,+1\}^p$ (commandes *bang-bang*) ; dans ce cas, $u(t)$ ne peut être continue à moins d'être constante. Notons que le cas d'une commande bang-bang avec $U = \{-1, +1\}$ correspond en fait à la donnée de deux champs de vecteurs $\dot{x} = f_1(x) := f(x, 1)$ et $\dot{x} = f_{-1}(x) := f(x, -1)$. La réponse suit tantôt le premier champs de vecteurs, lorsque la commande vaut 1, et tantôt le second, lorsqu'elle vaut -1.

4.2 Domaine d'accessibilité

Ce paragraphe ne fait qu'aborder la vaste question de la contrôlabilité d'un système commandé. Nous nous bornerons à définir le domaine d'accessibilité et à énoncer le théorème de Kalman.

Définition : Etant donné un système commandé de type (4.1), on dit qu'un point $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ *peut être atteint*, en temps T, par une commande admissible s'il existe une commande admissible $u(t)$ dont la réponse $x_u(t)$ vérifie $x_u(T) = x$. Le *domaine d'accessibilité*, noté $\mathcal{A}_T(x_0, U)$ ou simplement $\mathcal{A}_T$, est l'ensemble des points $x \in \mathcal{X}$ pouvant être atteint, en temps T, par une commande admissible :

$$\mathcal{A}_T(x_0, U) = \{x_u(T), u \in \mathcal{U}\}.$$

Si $\mathcal{A}_T(x_0, U) = \mathcal{X}$, pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$, on dit que le système (f, U) est *complètement contrôlable* en temps T.

Exemple : Il est très facile de vérifier que le système controlé suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 + u \\ \dot{x}_2 & = & -2x_2 \end{array} \right. \tag{4.3}$$

avec $u(t) \in U = \mathbb{R}$, n'est pas complètement contrôlable. En effet, quelque soit le contrôle choisi, la réponse est telle que $|x_2(t)|$ décroit.

Une commande est dite *saturée* si elle ne prend ses valeurs que dans la frontière de U, donc extrémale dans un certain sens. Par exemple à valeurs dans $\{-1, +1\}$ si $U = [-1, +1]$. Si f est linéaire et U convexe et compact, on peut montrer que les points de la frontière du domaine d'accessibilité $\mathcal{A}_T$ peuvent être atteint au moyen des seules commandes saturées.

Théorème 4.1 (Kalman) *On suppose que $f(x, u) = Ax + Bu$, où A et B sont des matrices $n \times n$ et $n \times p$ respectivement. Soit C la matrice $n \times np$*

$$C = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B)$$

obtenue en juxtaposant les matrices A^jB, $j = 0..n-1$. Soit $Im\, C = \{Cu, \ \ u \in \mathbb{R}^p\}$. On a

$$\mathcal{A}_T(x_0, \mathbb{R}^p) = e^{AT}x_0 + Im\, C.$$

En particulier, si C est de rang maximal, $\mathcal{A}_T(0, \mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n$.

4.3 Preuve du théorème de Kalman

Ici l'ensemble $\mathcal{U}$ des commandes admissibles est un espace vectoriel ; notons Φ_{AB} l'application linéaire sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie, pour $u \in \mathcal{U}$, par

$$\Phi_{AB}[u] := \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)ds,$$

et notons $\mathcal{L}(A, B) := \{\int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)ds \quad , \quad u \in \mathcal{U}\}$ son image. La formule (4.2) montre que pour $f(x, u) = Ax + Bu$ le domaine d'accessibilité est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_T(x_0, \mathbb{R}^p) &= e^{AT}x_0 + \left\{ \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)ds \ \ , \ \ u \in \mathcal{U} \right\} && (4.4) \\ &=: e^{AT}x_0 + \mathcal{L}(A, B). && (4.5) \end{aligned}$$

La preuve du théorème de Kalman revient donc à démontrer que $\mathrm{Im}\, C = \mathcal{L}(A, B)$. En fait, nous allons montrer, par double inclusion, que ${}^{\perp}\mathrm{Im}\, C = {}^{\perp}\mathcal{L}(A, B)$.

Quelques rappels d'algèbre linéaire.

Soit E un espace vectoriel, et $X \subseteq E$ un sous-ensemble. Notons E^* le dual de E, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit l'*orthogonal* de X par

$$^{\perp}X := \{\psi \in E^* \ \mid \ \forall x \in X \ \ \psi(x) = 0\} \ ; \tag{4.6}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E^*.

1. Si $E = \mathbb{R}^n$, on identifie E^* à l'ensemble des vecteurs-lignes à n composantes :

$$^{\perp}X := \{{}^t w \ \mid \ w \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ \forall x \in X \ \ {}^t wx = 0\}. \tag{4.7}$$

2. Si $c : E \longrightarrow F$, $^{\perp}(\operatorname{Im} c) = \{\psi \in F^* \ \mid \ \psi \circ c = 0\}$
3. Si $C \in \mathcal{M}_{n\times q}$, $^{\perp}(\operatorname{Im} C) = \{{}^t w^* \ \mid \ w \in \mathbb{R}^n \ \ {}^t wC = 0\}$
4. Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, de dimension finie,

$$E_1 \subseteq E_2 \ \ \Leftrightarrow \ \ {}^{\perp}E_1 \supseteq {}^{\perp}E_2. \tag{4.8}$$

Rappelons également le théorème d'algèbre linéaire suivant :

Théorème 4.2 (Cayley-Hamilton) *Soit* $P(\lambda) := \det(A - \lambda\mathbb{I})$ *le polynôme caractéristique de la matrice* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *; alors*

$$P(A) = 0. \tag{4.9}$$

Ce théorème va nous être utile du fait qu'il montre que A^n peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $A^0 = \mathbb{I}$, A, $\ldots$, A^{n-1}, puis, par récurrence sur $p \geq 0$, qu'on a de façon générale le corollaire suivant :

Corollaire 4.3 *Il existe des constantes* a_k^p *telles que, pour tout* $p \geq 0$,

$$A^{n+p} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^p A^k. \tag{4.10}$$

Preuve de 4.1 : montrons l'inclusion $^{\perp}\mathbf{Im}\, C \subseteq {}^{\perp}\mathcal{L}(A, B)$

Preuve : Soit ${}^t w \in {}^{\perp}\operatorname{Im} C$; donc ${}^t wC = 0$, et donc

$${}^t wB = 0 = {}^t wAB = \ldots = {}^t wA^{n-1}B,$$

par définition de C. De plus, d'après (4.10), pour $p \geq 0$,

$${}^t wA^{n+p}B = {}^t w \sum_{k=0}^{n-1} a_k^p A^k B = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^p {}^t wA^k B = 0.$$

Finalement, ${}^t wA^k B = 0$ pour tout $k \geq 0$. A présent, comme la multiplication par ${}^t w$ est une application continue, on a pour tout $u \in \mathcal{U}$

$${}^t w \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s)ds = \int_0^T {}^t w(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-s)^k}{k\,!} A^k)Bu(s)ds = \int_0^T (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-s)^k}{k\,!} ({}^t wA^k B)u(s)ds = 0,$$

et donc ${}^t w \in {}^{\perp}\mathcal{L}(A, B)$. □

Preuve de 4.1 : montrons enfin l'inclusion $^{\perp}\mathbf{Im}\, C \supseteq {}^{\perp}\mathcal{L}(A, B)$

Preuve : Pour tout $\tau \in [0, T]$ et tout $V \in \mathbb{R}^p$, considérons la commande $u^{\tau,V}(t)$ définie par

$$u^{\tau,V}(t) = \begin{cases} V & \text{si } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, soit

$$\varphi(\tau) = \varphi_{w,V}(\tau) := {}^t w \Phi_{A,B}[u^{\tau,V}] = {}^t w \int_0^\tau e^{(T-s)A} BV ds.$$

On a donc $\varphi'(\tau) = {}^t w e^{(T-\tau)A} BV$ et plus généralement

$$\varphi^{(k+1)}(\tau) = (-1)^k {}^t w e^{(T-\tau)A} A^k BV.$$

A présent, si ${}^t w \in {}^\perp\mathcal{L}(A, B)$ $(= {}^\perp\Phi_{A,B}[\mathcal{U}])$, comme $\varphi(\tau) = {}^t w \Phi_{A,B}[u^{\tau,V}]$ et que $u^{\tau,V} \in \mathcal{U}$, $\varphi_{w,V}(\tau) = 0$ pour tout τ, et donc $0 = \varphi^{(k+1)}(T) = (-1)^k {}^t w e^{(T-T)A} A^k BV = (-1)^k {}^t w A^k BV$ pour tout $k \geq 0$. Finalement ${}^t w A^k BV = 0$ pour tout $k \geq 0$ et tout $V \in \mathbb{R}^p$.

Soit $\hat{V} := {}^t({}^t V_1, \ldots, {}^t V_n) \in \mathbb{R}^{np}$ quelconque (c'est-à-dire $V_i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1..n$), et considérons $C\hat{V} \in \operatorname{Im} C$. On a donc

$${}^t w C\hat{V} = {}^t w BV_1 + {}^t w ABV_2 + \ldots + {}^t w A^{n-1} BV_n = 0,$$

et cela pour tout $\hat{V} \in \mathbb{R}^{np}$, et donc ${}^t w \in {}^\perp\operatorname{Im} C$.

□

4.4 Exercices

Exercice 4.1 *Donner un exemple de système dynamique controlé*

$$X' = AX + BU$$

dans $\mathbb{R}^n$ qui est complètement contrôlable et un exemple qui ne l'est pas. Pour ce dernier indiquer deux points mettant en défaut la complète contrôlabilité.

Exercice 4.2 *On considère le système $\dot{X} = AX + Bu$ où X et B sont dans $\mathbb{R}^2$ et $u \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que, si A est la matrice identité, le système n'est pas complètement contrôlable en explicitant deux points (X_0) et (X_1) qui mettent en défaut la complète contrôlabilité.*
2. *Même question si A est quelconque et B est un vecteur propre de A. Caractériser le domaine des points accessibles à partir d'un point donné.*
3. *En choisissant X et B dans $\mathbb{R}^3$, trouver un exemple de système non complètement contrôlable, $\dot{X} = AX + Bu$, $u \in \mathbb{R}$, où le domaine d'accessibilité d'un point soit un sous espace de dimension deux.*

Exercice 4.3 *Dans ce problème on se propose de tester sur quelques cas particuliers puis de montrer le résultat suivant : un système $X' = AX + bu$, où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}(n \times n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}$, tel que la matrice A ne possède qu'une seule valeur propre de multiplicité n, est complètement contrôlable si et seulement s'il existe une base (de Jordan pour A) dans laquelle A s'écrive :*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

et dans laquelle la dernière composante du vecteur b soit non nulle.

1. *On suppose $\lambda \neq 0$ et $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$.Donner un critère de contrôlabilité du système*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u$$

2. *On suppose $\lambda \neq 0$ et $\varepsilon_i = 0$ ou $\varepsilon_i = 1$. Donner un critère de contrôlabilité du système*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u$$

3. *Montrer le résultat énoncé (en se plaçant éventuellement dans le cas $n = 2$).*

Exercice 4.4 *Montrer que le système suivant n'est pas contrôlable (on suppose x, y et u réels) :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & 2y + u \end{array} \right. \tag{4.11}$$

1. *en appliquant le théorème de Kalman*
2. *en explicitant deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) qui mettent en défaut la contrôlabilité.*

Exercice 4.5 *Pour quelles valeurs du paramètre ρ le système suivant est-il contrôlable :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & \rho - 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho(\rho - 1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

On dit que ce système peut être réduit à un système contrôlable par un unique contrôle s'il existe $u \in \mathbb{R}$ et $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & \rho - 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho(\rho - 1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} u$$

Pour quelles valeurs de ρ cela est-il possible ?

Exercice 4.6 *Vérifier que le système suivant est contrôlable lorsque $u \in \mathbb{R}$*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x + u \\ y' & = & -2y + u \end{array} \right. \tag{4.12}$$

On suppose que $|u| \leq 1$. On pose $L(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Montrer que $\frac{dL}{dt} = -2(x^2 + y^2) + (2x + y)u$, et donc que, si $r = \|(x, y)\| \geq 2$, $\frac{dL}{dt} < 0$. En déduire qu'on ne peut quitter l'ellipse $L(x, y) \leq 1$ avec un contrôle $u(t) \in [-1, +1]$.

Exercice 4.7 *Montrer que le système différentiel associé à une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants ($u \in \mathbb{R}$)*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = u$$

est complètement contrôlable.

Exercice 4.8 *On considère le système différentiel associé à l'équation $\ddot{x} = -x + u$, $u(t) \in \{-1, +1\}$. Tracer les trajectoires des deux systèmes correspondant à $u(t) \equiv -1$ et $u(t) \equiv 1$ respectivement. En déduire l'ensemble des points (x, x') du plan de phase accessibles à partir de l'origine pour l'équation considérée, au moyen de contrôles admissibles.*

Exercice 4.9 *Soient $x' = Ax + Bu$ un système différentiel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. On dit qu'un contrôle $u : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ est admissible si ses composantes sont des fonctions cadlag et si $u([0, T]) \subseteq \mathcal{U}$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $A(x_0)$ l'ensemble des points accessibles à partir de x_0. Montrer que si $\mathcal{U}$ est convexe alors $A(x_0)$ est aussi convexe.*

Exercice 4.10 *On considère le système linéaire contrôlé*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -x + u \\ \dot{y} & = & ax + by + cu \end{array} \right. \tag{4.13}$$

1. *On suppose que l'on peut choisir $u \in \mathbb{R}$. A quelles conditions sur a, b, et c le système (4.13) est-il complètement contrôlable ?*
2. *On suppose que $a = 1$; on impose à présent que $u \in [-1, +1]$. Ce système est-il complètement contrôlable ?* Indication : *peut-on toujours quitter la région $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq x_0\}$?*

Exercice 4.11 *On considère le système linéaire contrôlé suivant*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x + u \end{array} \right. \tag{4.14}$$

1. *On suppose que l'on peut choisir le contrôle $u = \overline{u}(t)$ parmi toutes les fonctions càdlàg. Le système (4.14) est-il complètement contrôlable ?*

2. *On suppose à présent que $u(t) \in \{-1,+1\}$ (contrôle* bang-bang*). Déterminer les trajectoires de (4.14) dans le cas où $u(t) = +1$ pour tout t. (Indication : on pourra chercher à déterminer un nombre a tel que la fonction $I(x,y) := (x-a)^2 + y^2$ soit constante sur toute solution). Même question pour $u(t) = -1$ pour tout t.*

   Rep : $I(x,y) := (x+1)^2 + y^2$, *resp.* $I(x,y) := (x-1)^2 + y^2$.

3. *Indiquer sur une figure dans $\mathbb{R}^2_{x,y}$ comment choisir un contrôle $u : [0,T] \longrightarrow \{-1,+1\}$ continue par morceaux (T non imposé) telle que $(x_u(0), y_u(0)) = (x_0, y_0)$ et $(x_u(T), y_u(T)) = (x_T, y_T)$, avec $(x_0, y_0) = (-1,+1)$ et $(x_T, y_T) = (+1,-2)$. Précisez la valeur de $u(0)$ et de $u(T)$.*

   Rep : $u(0) = -1$, $u(T) = +1$.

4. *La question précédente admet-elle une une solution pour n'importe quelles valeurs $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_T, y_T) \in \mathbb{R}^2$? (Expliquez).*

Exercice 4.12 Problème de la péniche : *Une péniche dont la position à l'instant t est repérée par $x(t)$, se déplace selon la dynamique $x"(t) = u(t)$ avec la contrainte $u(t) \in [-1,+1]$. A l'instant initial $t = 0$ on a $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x'_0$ et on cherche à amener la péniche à l'instant final $t = T$ à la position $x(T) = 0$ avec une vitesse nulle $x'(T) = 0$.*

1. *Si l'on restreint le contrôle à un contrôle obtenu en saturant la contrainte (contrôle* bang-bang*), trouver une trajectoire réalisant l'objectif dans le cas où $x_0 = 1$ et $x'_0 = 0$ et calculer le temps nécessaire T.*

2. *Même question pour $x_0 = x'_0 = -1$.*

Exercice 4.13 *Considérons une particule de masse m dont la position est $x(t)$ à l'instant t, qui est attirée à l'origine par une force de rappel $-k^2x(t)$ proportionnelle à sa position et controlée par une force $u(t)$ vérifiant $-1 \leq u(t) \leq 1$. D'après la loi de Newton, $F = m\gamma$, la dynamique de la particule sera donc*

$$mx"(t) + k^2x(t) = u(t).$$

Comme dans le problème de la péniche, on se propose de choisir u de telle sorte à amener la particule en $x = 0$ avec une vitesse nulle $x' = 0$. Montrer que le problème admet une solution pour toute position et vitesse initiales (x_0, x'_0), même dans le cas où l'on suppose le contrôle bang-bang.

Chapitre 5

Principe du maximum de Pontryagin

5.1 Enoncé du principe du maximum

Comme l'équation d'Euler-Lagrange, le principe du maximum de Pontryagin (PMP) est une méthode pour trouver des candidats optima d'une fonctionnelle J ; toutefois, l'optimum recherché ici est un contrôle $t \to u(t)$ et la valeur de la fonctionnelle ne dépend pas seulement de u, mais aussi de la réponse x_u d'un système dynamique contrôlé par u ; il s'agit donc de la recherche d'un *optimum sous contrainte*. Nous verrons d'ailleurs, au paragraphe 5.3 que le principe du maximum de Pontryagin est une généralisation tout-à-fait naturelle de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Mais commençons par expliciter en (5.1) la fonctionnelle à optimiser (l'objectif) et en (5.2) la contrainte. Posons

$$J(u) := \int_0^T g(t, x(t), u(t))dt + k(x(T)) \tag{5.1}$$

où x est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& f(t, x, u) \\ x(0) &=& x_0 \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Le terme $k(x(T))$ peut être compris comme un terme d'héritage laissé pour la période suivante. Nous supposons que f, g et k sont des fonctions continues, $\mathcal{C}^1$ en x, définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^p_u$. Nous recherchons des contrôles continus à droite avec limite à gauche (càdlàg) à valeurs dans un ensemble U, appelés *contrôles admissibles.*

Tout comme dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, le principe du maximum de Pontryagin introduit une fonction auxiliaire ; une petite différence dans le choix d'un signe conduit à appeler cette fonction non pas le lagrangien mais le *hamiltonien* H du problème. Il est défini sur $\mathbb{R}^n_\lambda \times \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^p_u$ par

$$H(t, \lambda, x, u) := \lambda \cdot f(t, x, u) + g(t, x, u). \tag{5.3}$$

La variable auxiliaire λ s'appelle la *variable adjointe* de la *variable d'état* x. Il serait naturel de la choisir dans l'espace $(\mathbb{R}^n)^*$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ et d'écrire, pour $y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda[y]$. Mais en considérant le produit scalaire usuel, noté $\cdot$, sur $\mathbb{R}^n$, nous ne faisons pas la distinction entre $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^*$ et nous écrirons simplement $\lambda \cdot y$ au lieu de $\lambda[y]$. Pour énoncer une version fondamentale du principe du maximum de Pontryagin , il est utile, étant donné un contrôle $u : [0, T] \to \mathbb{R}^p$ et la réponse $x = x_u$ du système (5.2) associé, de considérer le *système adjoint* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dot{\lambda}_i &=& \lambda \cdot f'_{x_i}(t, x, u) + g'_{x_i}(t, x, u) \;\; (= H'_{x_i}(t, \lambda, x, u)) \qquad (i = 1..n) \\ \lambda_i(T) &=& k'_{x_i}(x(T)). \end{array} \right. \tag{5.4}$$

Théorème 5.1 (Principe du maximum de Pontryagin)
Soit U un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$; si l'application $u^* : [0, T] \to U$ est un contrôle admissible tel que $J(u^*)$ soit maximal sur l'ensemble $\mathcal{U}$ des contrôles admissibles, alors, pour tout $t \in [0, T[$,

$$H(t, \lambda^*(t), x^*(t), u^*(t)) = Max_{v \in U}\{H(t, \lambda^*(t), x^*(t), v)\} \tag{5.5}$$

où $x^* := x_{u^*}$ est la réponse du système (5.2) au contrôle u^*, et λ^* désigne la solution du système (5.4) pour $x = x^*$ et $u = u^*$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, (5.5) devient

$$H'_u(t, \lambda^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0. \tag{5.6}$$

Avant de donner la preuve de ce théorème, nous allons successivement voir sur un exemple comment il peut être utilisé, puis nous verrons le lien de la variable adjointe avec les multiplicateurs de Lagrange à l'occasion de la preuve d'une version discrète de ce principe. Alors seulement nous donnerons sa preuve (paragraphe 5.4).

5.2 Optimisation de la pêche

Revenons sur le problème de gestion d'une ressource de pêche que nous avions introduit en 2.4.2. On peut par exemple choisir, pour variable de contrôle u, la pêche par unité de temps (que nous avions noté h). Si l'on désigne par x le stock (ou taille de la ressource de pèche), la dynamique s'écrit

$$\dot{x} = F(x) - u(t) \tag{5.7}$$

où F est par exemple la fonction $F(x) = rx(1 - x/K)$. Le revenu brut d'une pêche u peut être choisi de la forme $p(u)u$, où $p(u)$ représente le prix de vente unitaire (qui peut dépendre de l'offre u). Nous supposerons pour simplifier que p est constant. Par ailleurs, on choisit un coût de la forme $c(x)u$, où le coût unitaire c est par exemple une fonction décroissante du stock x. Ainsi le revenu net, évalué à l'instant t, est $R(u) = pu - c(x)u$ et le revenu intertemporel, si l'on désigne par δ le taux d'escompte, est donc :

$$J(u) = \int_0^T (p - c(x(t)))u(t)e^{-\delta t}dt. \tag{5.8}$$

Appliquons le principe du maximum de Pontryagin pour déterminer la pêche optimale, en supposant que $u \in [u_-, u_+]$, avec $u_- = 0$ par exemple. Le hamiltonien[1] est donc donné par

$$H(t, \lambda, x, u) = (p - c(x))ue^{-\delta t} + \lambda(F(x) - u)$$

et la dynamique adjointe est donc déterminée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dot{\lambda} & = & H'_x(t, \lambda, x, u) = \lambda F'(x) - c'(x)ue^{-\delta t} \\ \lambda(T) & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.9}$$

puisqu'il n'y a pas de terme d'héritage k dans l'expression de l'objectif J. Le principe du maximum nous assure que le contrôle optimal u^* est tel que H est maximal à chaque instant $t \in [0, T]$. Comme H est une fonction qui dépend linéairement de u, et comme $u(t) \in [u_-, u_+]$, le maximum de cette fonction est déterminé par le signe du coefficient de u, $s(x, \lambda) := (p - c(x))e^{-\delta t} - \lambda$ qui sert de *fonction discriminante* (switching function) :

- si $s(x(t), \lambda(t)) > 0$, alors $u^*(t) = u_+$
- si $s(x(t), \lambda(t)) < 0$, alors $u^*(t) = u_-$
- si $s(x(t), \lambda(t)) = 0$, alors l'optimisation de H seule ne permet plus de déterminer $u^*(t)$; en revanche, nous voyons qu'alors $\lambda = (p - c(x))e^{-\delta t}$ et donc que l'équation adjointe devient

$$(c'(x)\dot{x} + \delta(p - c(x)))e^{-\delta t} = -\dot{\lambda} = \lambda F'(x) - c'(x)ue^{-\delta t} = [(p - c(x))F'(x) - c'(x)u]e^{-\delta t}.$$

Comme $u = F(x) - \dot{x}$ d'après (5.7), on a donc

$$F'(x) - \frac{c'(x)F(x)}{p - c(x)} = \delta. \tag{5.10}$$

Si l'on désigne par x^* la solution de cette équation algébrique, on a $x(t) \equiv x^*$ et donc $\dot{x}(t) = 0$. Le contrôle correspondant est alors constant et vaut $u^* = F(x^*)$. Nous voyons finalement qu'une commande optimale prend les valeurs u_+, u_- et $u = F(x^*)$, où x^* satisfait à la relation (5.10). Une telle valeur x^* est vraissemblablement à interpréter comme un équilibre bioéconomique optimal ; pour l'assurer, il conviendrait d'avoir plus de précision sur les fonctions F et c. A noter que la condition $\lambda(T) = 0$ montre que la valeur de u dans la phase finale est déterminée par le signe de $p - c(x(T))$.

[1] Le hamiltonien dépend ici du temps t, ce qui ne présente pas de difficulté particulière : on peut poser $y := (t, x)$ (voir l'exercice 5.6 en fin de chapitre.)

5.3 Principe du maximum de Pontryagin pour les suites finies

5.3.1 Cas d'une récurrence d'ordre un

Donnons nous trois fonctions $R(x,u)$, $G(x,u)$, et K(x), et considérons une récurrence finie $X = (X_0, \dots, X_N)$ définie, pour $\nu = 0, \dots, N-1$, par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{\nu+1} & = & R(X_\nu, U_\nu) \\ X_0 & = & X^0 \text{ (fixé)} \end{array} \right. \tag{5.11}$$

où R est une fonction supposée $\mathcal{C}^1$, et $U = (U_0, \dots, U_{N-1})$ est une suite finie de contrôles. On suppose que les U_ν sont astreints à appartenir à un *ouvert* de $\mathbb{R}$, et on souhaite choisir le contrôle U de manière à optimiser la quantité

$$J(X,U) := \sum_{\nu=0}^{N-1} G(X_\nu, U_\nu) + K(X_N). \tag{5.12}$$

Les relations (5.11) peuvent s'écrire sous la forme

$$S(X,U) = 0,$$

avec $S = (S_0, \dots, S_N)$, où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_0(X,U) & = & X_0 - X^0 \\ S_\nu(X,U) & = & X_\nu - R(X_{\nu-1}, U_{\nu-1}), \quad \nu = 1, \dots, N \end{array} \right. \tag{5.13}$$

Comme la contrainte sur les U_ν est ouverte, on peut appliquer la méthode d'optimisation locale des *multiplicateurs de Lagrange ;* soit $M = (M_0, \dots, M_N)$ et soit

$$\mathcal{L}(M,X,U) = J(X,U) + M \cdot S(X,U) = \sum_{\nu=0}^{N-1} G(X_\nu, U_\nu) + K(X_N) + M_0(X_0 - X^0) + \sum_{\nu=1}^{N} M_\nu \cdot (X_\nu - R(X_{\nu-1}, U_{\nu-1}))$$

Si (X,U) est un optimum de J sous la contrainte (5.13), il existe un multiplicateur M tel que (M,X,U) soit un point critique de $\mathcal{L}$; en pratique, outre (5.13), on a pour tout $\nu = 0, \dots, N$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_\nu} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\nu}$ et donc

$$\begin{array}{rrcl} \text{pour } \nu = 0..N-1, & 0 & = & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_\nu} = G'_x(X_\nu, U_\nu) + M_\nu - M_{\nu+1} \cdot R'_x(X_\nu, U_\nu) \quad (5.14) \\ & 0 & = & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_N} = K'(X_N) + M_N \quad (5.15) \\ \text{pour } \nu = 0..N-1, & 0 & = & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\nu} = G'_u(X_\nu, U_\nu) - M_{\nu+1} \cdot R'_u(X_\nu, U_\nu) \quad (5.16) \end{array}$$

Posons $\Lambda := -M$ et $H(\lambda, x, u) = G(x,u) + \lambda \cdot R(x,u)$; les trois relations précédentes deviennent

$$\begin{array}{rrcl} \text{pour } \nu = 0..N-1, & \Lambda_\nu & = & H'_x(\Lambda_{\nu+1}, X_\nu, U_\nu) \quad (5.17) \\ & \Lambda_N & = & K'(X_N) \quad (5.18) \\ \text{pour } \nu = 0..N-1, & 0 & = & H'_u(\Lambda_{\nu+1}, X_\nu, U_\nu) \quad (5.19) \end{array}$$

Or ces relations déterminent, par récurrence descendante, une suite $\Lambda = (\Lambda_0, \dots, \Lambda_N = K'(X_N))$. Nous venons de montrer le principe du maximum de Pontryagin discret :

Théorème 5.2 *Soit $U = (U_0, \dots, U_N)$ un contrôle de la récurrence (5.11) qui optimise la quantité $J(X,U)$ définie par (5.12). Soit $\Lambda = (\Lambda_0, \dots, \Lambda_N)$, la* récurrence adjointe *descendante, définie par*

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} & \Lambda_N & = & K'(X_N) \\ \textit{pour } \nu = 0..N-1, & \Lambda_{\nu-1} & = & H'_x(\Lambda_\nu, X_{\nu-1}, U_{\nu-1}) \end{array} \right. \tag{5.20}$$

Alors, pour $\nu = 1, \dots, N$, on a :

$$H'_u(\Lambda_\nu, X_{\nu-1}, U_{\nu-1}) = 0. \tag{5.21}$$

5.3.2 Application à une version discrète du problème (5.1)-(5.2)

Au paragraphe 2.4.2, nous avons vu comment l'étude d'une équation telle que (5.2) s'introduit par une récurrence

$$\begin{aligned} X_{\nu+1} &= X_\nu + F(\nu, X_\nu) && (5.22)\\ &= X_\nu + f(\varepsilon X_\nu, \varepsilon U_\nu) =: R(X_\nu, U_\nu) && (5.23) \end{aligned}$$

en posant $x(t_\nu) = \varepsilon X_\nu$, relation à laquelle nous adjoignons $u(t_\nu) = \varepsilon U_\nu$. Il est bien connu qu'une expression telle que (5.1) est une version continue d'une somme finie

$$\begin{aligned} J(X,U) &= \sum_{\nu=0}^{N-1} g(x(t_\nu), u(t_\nu))\delta t + k(x(t_N)) && (5.24)\\ &= \sum_{\nu=0}^{N-1} G(X_\nu, U_\nu) + K(X_N) && (5.25) \end{aligned}$$

en posant $G(X_\nu, U_\nu) := \varepsilon g(\varepsilon X_\nu, \varepsilon U_\nu)$ et $K(X_N) = k(\varepsilon X_N)$ avec $\varepsilon = \delta t$. Appliquons le théorème 5.2 à cette récurrence particulière. On a

$$H(\Lambda, X, U) = \varepsilon g(\varepsilon X, \varepsilon U) + \Lambda \cdot (X + f(\varepsilon X, \varepsilon U)).$$

La récurrence (5.20) devient :

$$\begin{aligned} \Lambda_N &= K'(X_N) = \varepsilon k'(\varepsilon X_N) && (5.26)\\ \Lambda_{\nu-1} &= H'_X(\Lambda_\nu, X_{\nu-1}, U_{\nu-1}), \quad \nu = 0, \ldots, N-1 \\ &= g'_x(\varepsilon X_{\nu-1}, \varepsilon U_{\nu-1})\varepsilon^2 + \Lambda_\nu + \Lambda_\nu \cdot f'_x(\varepsilon X_{\nu-1}, \varepsilon U_{\nu-1})\varepsilon. && (5.27) \end{aligned}$$

A ce stade, il est utile de poser

$$\lambda(t_\nu) := \Lambda_\nu / \varepsilon.$$

La récurrence (5.26)-(5.27) devient

$$\begin{aligned} \lambda(t_N) &= k'_x(x(t_N)) && (5.28)\\ \lambda(t_{\nu-1}) &= \lambda(t_\nu) + [g'_x(x(t_{\nu-1}), u(t_{\nu-1})) + \lambda(t_\nu) \cdot f'_x(x(t_\nu), u(t_\nu))]\varepsilon \\ &= \lambda(t_\nu) + h'_x(\lambda(t_\nu), x(t_{\nu-1}), u(t_{\nu-1}))\varepsilon, && (5.29) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$h(\lambda, x, u) := g(x,u) + \lambda \cdot f(x,u).$$

Avec ces notations, la relation (5.21) devient

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^2 g'_u(\varepsilon X_{\nu-1}, \varepsilon U_{\nu-1}) + \Lambda_\nu \cdot \varepsilon f'_x(\varepsilon X_{\nu-1}, \varepsilon U_{\nu-1}) \\ &= \varepsilon^2 \left[g'_u(x(t_{\nu-1}), u(t_{\nu-1})) + \lambda(t_\nu) \cdot f'_x(x(t_{\nu-1}), u(t_{\nu-1})) \right] \end{aligned}$$

ce qui équivaut, après simplification par $\varepsilon^2 > 0$, à

$$h'_u(\lambda(t_\nu), x(t_{\nu-1}), u(t_{\nu-1})) = 0. \qquad (5.30)$$

Avec les relations (5.28), (5.29) et (5.30) nous obtenons un résultat très semblable à la formule (5.6) du théorème 5.1 du cas continu.

5.4 Preuve du principe du maximum de Pontryagin

Comme expliqué dans l'exercice 5.6, nous pouvons supposer que f et g ne dépendent pas explicitement de t, et que $f = f(x,u)$ et $g = g(x,u)$. Soit $u : [0,T] \to U$ un contrôle càdlàg et $x = x_u(t)$ la réponse du système (5.2). Nous allons établir la contraposée du théorème, en montrant que s'il existe $t_0 \in [0, T[$ tel que (5.5) soit en défaut et qu'au contraire on puisse trouver $v_0 \in U$ tel que

$$\Delta(t_0) := H(\lambda(t_0), x_u(t_0), v_0) - H(\lambda(t_0), x_u(t_0), u(t_0)) > 0,$$

il est possible de confectionner un contrôle $u + \delta u$ tel que $J(u + \delta u) > J(u)$. Le contrôle $u + \delta u$ diffèrera de u par une “impulsion” càdlàg

$$\delta u(t) := (u + \delta u)(t) - u(t) = \begin{cases} v_0 - u(t) & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \delta t[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.31}$$

C’est pour les petites valeurs de $\delta t > 0$ qu’il sera possible de montrer que $u + \delta u$ est meilleur que u. Posons

$$\delta J := J(u + \delta u) - J(u) \quad \text{et} \quad \delta x := x_{u+\delta u} - x_u.$$

Nous allons montrer que

$$\frac{\delta J}{\delta t} = \Delta(t_0) + \phi, \tag{5.32}$$

où $\phi = \phi(\delta t)$ est petit avec δt, ce qui établiera que u n’était pas optimal puisque $\Delta(t_0) > 0$.

Nous considérons les normes suivantes : sur les commandes càdlàg, nous considérons la norme L_1, et sur les solutions la norme L_∞ :

$$\|\delta u\|_1 = \int_0^T |\delta u(t)| dt \quad , \quad \|\delta x\|_\infty = \operatorname{Sup}_{t \in [0,T]} |\delta x(t)|$$

Nous effectuons du *calcul asymptotique*, directement inspiré par l’analyse non standard ; il n’est toutefois pas nécessaire de connaître cette commodité : il suffit de savoir qu’on s’intéresse, dans (5.32), à la limite lorsque δt tend vers 0, et que ϕ désigne un *i-petit*, c’est-à-dire une quantité qui tend vers 0 avec δt au sens de l’espace normé défini par les autres termes de l’identité qui contient ce symbole ; par ailleurs, $\pounds$ désigne une quantité *limitée*, c’est-à-dire qui reste bornée lorsque δt tend vers 0.

Voici les relations asymptotique que nous utiliserons :

Formule de Leibnitz :

$$\phi + \phi = \phi \text{ , et } \pounds\phi = \phi \tag{5.33}$$

Formule de Taylor : Si h est standard $\mathcal{C}^1$, si y est i-voisin d’un standard y_0 du domaine de h, alors

$$\delta y = \phi \quad \Rightarrow \quad h(y + \delta y) - h(y) = h'(y)\delta y + \|\delta y\|\phi \tag{5.34}$$

Si g est standard *continue* sur $[0, T]$,

$$g(t + \phi) = g(t) + \phi \tag{5.35}$$

Formule asymptotique de la moyenne :

$$\int_a^b \phi = \phi(b - a) \quad \text{et} \quad \int_a^b \pounds dt = \pounds(b - a) \tag{5.36}$$

Lemme de l’ombre courte $1, \infty$: Soient u et x_u standard définis sur $[0, T]$; soit $\delta x_u := x_{u+\delta u} - x_u$. Alors

$$\|\delta u\|_1 \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \delta x_u = \|\delta u\|_1 \pounds. \tag{5.37}$$

Exemple de calcul : pour δu défini par (5.31), comme le contrôle u est càdlàg, il est limité sur $[t_0, t_0 + \delta t]$, d’où $v_0 - u(t) = \pounds$ et donc, puisque δt est i-petit,

$$\|\delta u\|_1 = \int_0^T |\delta u| = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \pounds = \pounds\delta t = \phi. \tag{5.38}$$

La fonctionnelle J_λ : Comme $x = x_u$ satisfait la dynamique (5.2), on a, *pour toute fonction dérivable* λ, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} J(u) : \;&= J(u) + \int_0^T \lambda(t) \cdot (f(x(t), u(t)) - \dot{x}(t)) dt & (5.39) \\ &= \int_0^T g(x(t), u(t)) dt + k(x(T)) + \int_0^T \lambda(t) \cdot f(x(t), u(t)) dt - \int_0^T \lambda(t) \cdot \dot{x}(t) dt & (5.40) \\ &= \int_0^T H(\lambda(t), x(t), u(t)) dt + k(x(T)) + \int_0^T \dot{\lambda}(t) \cdot x(t) dt - [\lambda(t) \cdot x(t)]_0^T \;=: \; J_\lambda(u), & (5.41) \end{aligned}$$

d’où, par linéarité, en posant

$$\delta x = x_{u+\delta u} - x_u \text{ et } \delta k(x) = k(x + \delta x) - k(x)$$

$$\begin{aligned}\delta J(u): &= J(u+\delta u)-J(u)=J_\lambda(u+\delta u)-J_\lambda(u) &(5.42)\\ &= \int_0^T \delta H+\delta k(x)(T)+\int_0^T \dot\lambda\cdot\delta x \quad -\lambda(T)\cdot\delta x(T), &(5.43)\end{aligned}$$

puisque $x(0)=x_0=(x+\delta x)(0)$, d'après (5.2), d'où $\delta x(0)=0$.

Supposons que $\|\delta u\|_1=\phi$. Par (5.33) et (5.37), on a $\delta x=\|\delta u\|_1 \pounds=\phi$, d'où, en appliquant (5.34),

$$\begin{aligned}\delta k(x)(T) &:= k(x(T)+\delta x(T))-k(x(T)) &(5.44)\\ &= k'(x(T))\cdot\delta x(T)+\|\delta x(T)\|\phi &(5.45)\\ &= k'(x(T))\cdot\delta x(T)+\|\delta x\|_\infty\phi. &(5.46)\end{aligned}$$

Notons $v(t):=u(t)+\delta u(t)$; on a alors,

$$\begin{aligned}H(\lambda(t),x(t)+\delta x(t),v(t))-H(\lambda(t),x(t),v(t)) &= H'_x(\lambda(t),x(t),v(t))\cdot\delta x(t)+\|\delta x(t)\|\phi\\ &= H'_x(\lambda,x,v)(t)\cdot\delta x(t)+\|\delta x\|_\infty\phi,\end{aligned}$$

puisque $\|\delta x(t)\|\le\|\delta x\|_\infty$, d'où $\|\phi\cdot\delta x(t)\|=\|\delta x\|_\infty\phi$. Comme $v(t)=u(t)$ de dehors de $[t_0,t_0+\delta t]$,

$$\int_0^T H'_x(\lambda,x,v)(t)\cdot\delta x(t)dt=\int_0^T H'_x(\lambda,x,u)(t)\cdot\delta x(t)dt+\int_{t_0}^{t_0+\delta t}(H'_x(\lambda,x,v)(t)-H'_x(\lambda,x,u)(t))\cdot\delta x(t)dt \text{ et,}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t}(H'_x(\lambda,x,v)(t)-H'_x(\lambda,x,u)(t))\cdot\delta x(t)dt=\int_{t_0}^{t_0+\delta t}\pounds\cdot\delta x(t)dt=\int_{t_0}^{t_0+\delta t}\pounds\cdot\|\delta x\|_\infty dt=\|\delta x\|_\infty\pounds\delta t=\|\delta x\|_\infty\phi, \text{ d'où}$$

$$\int_0^T H'_x(\lambda,x,v)(t)\cdot\delta x(t)dt=\int_0^T H'_x(\lambda,x,u)(t)\cdot\delta x(t)dt+\|\delta x\|_\infty\phi.$$

Ainsi, par (5.36), et en posant

$$\Delta(t):=H(\lambda(t),x(t),v(t))-H(\lambda(t),x(t),u(t)), \text{ on a}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\delta H &= \int_0^T[H(\lambda(t),x(t)+\delta x(t),v(t))-H(\lambda(t),x(t),u(t))]dt\\ &= \int_0^T[H(\lambda(t),x(t)+\delta x(t),v(t))-H(\lambda(t),x(t),v(t))+H(\lambda(t),x(t),v(t))-H(\lambda(t),x(t),u(t))]dt\\ &= \int_0^T H'_x(\lambda,x,u)(t)\cdot\delta x(t)dt+\int_0^T\|\delta x\|_\infty\phi dt+\int_0^T\|\delta x\|_\infty\phi dt+\int_0^T\Delta(t)dt\\ &= \int_0^T H'_x(\lambda,x,u)(t)\cdot\delta x(t)dt+\|\delta x\|_\infty\phi+\int_0^T\Delta(t)dt, &(5.47)\end{aligned}$$

A présent, en *choisissant* pour λ la solution de l'équation adjointe (5.4), et en substituant (5.46) et (5.47) dans (5.42), on a, puisque $\phi+\phi=\phi$:

$$\begin{aligned}\delta J(u) &= \int_0^T[H'_x(\lambda(t),x(t),u(t))+\dot\lambda]\cdot\delta x(t)dt+[k'(x(T))-\lambda(T)]\cdot\delta x(T)+\int_0^T\Delta(t)dt+\|\delta x\|_\infty\phi\\ &= \int_0^T\Delta(t)dt+\|\delta x\|_\infty\phi, &(5.48)\end{aligned}$$

Finalement, choisissons δu comme en (5.31) ; par (5.38), on a bien $\|\delta u\|_1=\phi$. Par (5.37) on a donc $\|\delta x\|_\infty\simeq 0$. Par continuité de λ, x, et H, et comme $v(t)=u(t)$ en dehors de $[t_0,t_0+\delta t]$ et $v(t)=v_0$ sur tout $[t_0,t_0+\delta t]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T\Delta(t)dt &= \int_{t_0}^{t_0+\delta t}[H(\lambda(t),x(t),v(t))-H(\lambda(t),x(t),u(t))]dt\\ &= \int_{t_0}^{t_0+\delta t}[H(\lambda(t_0),x(t_0),v(t_0))-H(\lambda(t_0),x(t_0),u(t_0))+\phi]dt\\ &= \Delta(t_0)\delta t+\phi\delta t. &(5.49)\end{aligned}$$

Donc, par (5.48), (5.49), (5.37), et (5.38),

$$\begin{aligned}
\delta J(u) &= \int_0^T \Delta(t)dt + \|\delta x\|_\infty \phi \\
&= \Delta(t_0)\delta t + \phi\delta t + \|\delta u\|_1 £\phi \\
&= \Delta(t_0)\delta t + \phi\delta t + \delta t £\phi \\
&= (\Delta(t_0) + \phi)\delta t,
\end{aligned}$$

ce qui établit (5.32) et montre que u n'est pas optimal. □

5.5 Exercices

Exercice 5.1 *Le problème du chariot : on considère un chariot dont la masse est supposée égale à* 1 *et dont la position sur son rail est une fonction $x(t)$, $t \in [0, T]$ et sur lequel on peut appliquer une force $u(t)$. A l'instant initial, le chariot est supposé au repos à l'origine. La dynamique du chariot est donc*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x''(t) &=& u(t) \\ x(0) &=& 0 \\ x'(0) &=& 0 \end{array} \right. \tag{5.50}$$

On souhaite choisir la force $u(t)$ qui maximise la distance parcourue tout en minimisant l'effort fourni. L'objectif s'écrit donc

$$J(u) = x(T) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt.$$

Montrer que la solution du problème est donnée par $u^*(t) = T - t$.

Exercice 5.2 *On veut tracer une courbe $t \mapsto x(t)$, $t \in [0, T]$ qui passe par $(0, 0)$, de pente au plus égale à* 1 *et qui atteint en $t = T$ un point aussi haut que possible. Ce problème a une solution* évidente *qui est la droite de pente* 1*. Montrer qu'on peut aussi trouver cette solution en appliquant le principe du maximum de Pontryaguin.*

Exercice 5.3 *On se propose d'étudier la dynamique d'une population d'abeilles se divisant en deux sous populations, les* ouvrières *$x(t)$ et les* reines *$y'(t)$, $t \in [0, T]$. On désigne par $u(t)$ la quantité de nourriture consommée par les abeilles. On suppose que $u(t)$ est tel que $0 \le u(t) \le 1$ pour tout t et $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$. On choisit le modèle dynamique suivant*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& bux - \mu x \\ \dot{y} &=& c(1-u)x \end{array} \right. \tag{5.51}$$

où b, μ, et c sont des constantes strictement positives telles que $b > \mu$. On suppose que cette population choisit $u(t)$ de sorte à maximiser $J = y(T)$.

1. *Commenter ce choix de modèle, en interprétant les constantes.*
2. *Montrer que la commande optimale $u^*(t)$ est de type* bang-bang, *c'est-à-dire que $u^*(t) \in \{0, 1\}$.*
3. *Calculer les valeurs des 2 variables adjointes $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ en résolvant explicitement l'équation adjointe.*
4. *En déduire qu'il existe un unique temps critique $t_c \in]0, T[$, que l'on calculera, tel que $u^*(t) = 1$ si $t < t_c$ et $u^*(t) = 0$ si $t > t_c$.*

Exercice 5.4 *Reprenant le problème de pêche traité ci-dessus, on suppose à présent que la pêche h est proportionnelle à la taille de la ressource $x(t)$, le coefficient de proportionnalité, qui représente l'effort de pêche, étant la variable de contrôle choisie : $h(t) = u(t)x(t)$. Vérifier que, sous l'hypothèse que le coût est aussi proportionnel à l'effort $u(t)$, la dynamique de la ressource et le revenu sont donnés par*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& F(x) - ux \\ R(u) &=& pux - ku \end{array} \right. \tag{5.52}$$

Analyser, au moyen du principe du maximum de Pontryagin, la politique de pêche optimisant le revenu intertemporel.

Exercice 5.5 *On considère un problème de choix d'investissement optimal pour l'acquisition des biens d'équipements qui assurent la production d'une entreprise.*

On suppose que, sans investissement, le revenu $P(t)$ par unité de temps de l'entreprise est décroissant avec un taux proportionnel au revenu lui-même et on suppose que la valeur de l'investissement $I(t)$ par unité de temps permet d'augmenter le taux de production : précisément, on suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{P}(t) & = & -\alpha P(t) + \gamma I(t) \\ P(0) & = & P_0 \end{array} \right. \tag{5.53}$$

où $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ sont des constantes. On se fixe une période de temps $[0, T]$ et on fait l'hypothèse que la valeur de liquidation de l'entreprise à l'instant T est proportionnelle à sa production à cet instant $P(T)$. On se pose le problème de trouver une politique d'investissement $I(t)$ qui maximise, pour tout $t \in [0, T]$,

$$J = \beta P(T) + \int_0^T (P(t) - I(t))dt$$

où $\beta > 0$ est une constante. On suppose enfin que l'investissement est positif et majoré par une constante.

1. *Formaliser le problème d'optimisation en choisissant pour variables d'état et variables de contrôle les notations usuelles x et u.*
2. *Ecrire le Hamiltonien du problème en désignant par λ la variable adjointe et indiquer la valeur de l'investissement en fonction du signe de la quantité $\gamma\lambda - 1$.*
3. *Ecrire l'équation adjointe et la résoudre.*
4. *En déduire que si l'on suppose $\alpha\beta > 1$ et si $\gamma \in]\frac{1}{\beta}, \alpha[$, il existe un unique instant t_* que l'on calculera, tel que $u(t)$ est constant pour tout $t \neq t_*$. Donner l'allure du graphe de $u(t)$ et expliquer la politique d'investissement optimale dans ce cas.*
5. *Reprendre le raisonnement dans le cas $\alpha\beta \leq 1$ et commentez vos résultats en terme d'investissements.*
6. *Que pensez-vous du cas $\gamma \notin]\frac{1}{\beta}, \alpha[$?*

Exercice 5.6 *Montrer qu'en ajoutant une variable d'état $x_{n+1} = t$, on peut ramener tout problème d'optimisation non autonome "Maximiser $J(u) = \hat{k}(T, x(T)) + \int_0^T g(t, x(t), u(t))dt$ sous les contraintes $\dot{x} = f(t, x, u)$, $x(0) = x_0$, $u(t) \in U$" à un problème d'optimisation autonome, c'est-à-dire un problème analogue mais où f, $\hat{k}$, et g ne dépendent pas explicitement de t.*

Exercice 5.7 *Lorsqu'un problème de contrôle optimal a un objectif J réduit à $\hat{k}$ on parle de* problème de Mayer *et lorsque J est réduit à $\int g$ on parle de* problème de Lagrange. *Montrer qu'on peut toujours réduire le cas général à l'un de ces deux types de problèmes particuliers.*

Exercice 5.8 Problème isopérimétrique : *Dans le plan (t, x), on désigne par A et B les deux points de l'axe des t d'abscisse 0 et T respectivement et par $\mathcal{C}$ une courbe, graphe d'une fonction $x(t)$, $t \in [0, T]$ (qu'on supposera de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, T[$), qui passe par A et B, qui a une longueur donnée L et telle que l'aire comprise entre elle et l'axe des t soit minimale. Calculer $x(t)$. On rappelle que la longueur L du graphe d'une fonction $(\tau, f(\tau))$ entre $\tau = 0$ et $\tau = t$ est donnée par*

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{1 + (x'(\tau))^2} d\tau.$$

(Ind :on pourra regarder ce problème comme un problème d'optimisation dont les deux variables d'état sont $x(t)$ et $L(t)$)

Exercice 5.9 *Une* **ressource renouvelable exploitée** *a pour dynamique*

$$x'(t) = F(x(t)) - h(t)$$

et on souhaite l'exploiter durant la période $[0, T]$ de telle sorte à maximiser le revenu intertemporel qu'elle procure

$$\int_0^T R(h(t))e^{-\delta t}dt,$$

sa taille passant de $x(0) = x_0$ à $x(T) = x_T$. Montrer que le vecteur $(x(t), h(t))$ optimal est solution du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & F(x) - h \\ h' & = & \frac{R'(h)}{R''(h)}(\delta - F'(x)) \end{array} \right. \tag{5.54}$$

Etudier ce système et discuter les solutions du problème d'optimisation en fonction de x_0 et x_T.

Exercice 5.10 *Dans le problème classique de* **consommation-épargne**, *on suppose que le consommateur est un rentier dont la richesse $x(t)$ a pour dynamique*

$$x'(t) = rx(t) - c(t)$$

et dont l'objectif est d'optimiser son utilité intertemporelle sur une période $[0, T]$ sans rien laisser après lui, c'est-à-dire de telle sorte que $x(T) = 0$. Trouver sa consommation optimale $c(t)$ (on pourra choisir pour fixer les idées l'utilité égale à $U(c) = \sqrt{c}$).

Exercice 5.11 *Dans un modèle de consommation-épargne*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & rx(t) + s(t) - c(t) \\ x(0) & = & C^{ste} \\ J(c) & = & \int_0^T U(c(t))e^{-\delta t}dt + h(x(T)) \end{array} \right. \tag{5.55}$$

on propose les choix suivants pour les fonctions s, U et h :$s(t) = s_0 e^{\sigma t}$, avec $r < \sigma$, $U(c) = \ln c$ et $h(x) = x$.

1. *Expliquer le modèle et discuter la pertinence des hypothèses choisies.*
2. *On se propose de déterminer, au moyen du principe du maximum de Pontriaguin, une consommation $c(t)$ qui optimise $J(c)$. Donner le Hamiltonien $H(t, x, c, \lambda)$ et l'équation adjointe pour λ.*
3. *En déduire la consommation optimale $c_*(t)$ et la richesse optimale $x_*(t)$.*
4. *Etudier le problème dans d'autres modèles, obtenus en faisant des choix différents de s, U ou h.*

Exercice 5.12 *La quantité $x(t)$ est soumise à la dynamique $x'' = -kx + u(t)$, où $k > 0$ est une constante, et vérifie $x(0) = x'(0) = 0$. On recherche un contrôle $u(t)$ qui rende maximal l'objectif*

$$J(u) = x(T) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt.$$

1. *Ecrire le système différentiel associé à cette dynamique ainsi que le Hamiltonien $H(x, y, \lambda, \mu)$ du problème.*
2. *Calculer les fonctions λ et μ.*
3. *En déduire la valeur du contrôle optimal $u_*(t)$.*
4. *Calculer la solution optimale $x_*(t)$ correspondant à ce contrôle (Indication : on pourra rechercher une solution particulière de l'équation de la forme $C_1 t + C_2 e^{-kt}$, où C_1 et C_2 sont des constantes).*

Exercice 5.13 Le problème du loueur de maison : *ce problème est celui du propriétaire d'une maison qui sait que son revenu locatif ainsi que la valeur de revente de sa maison sont fonction de sa "qualité" et qu'il peut investir régulièrement dans sa maison pour en améliorer la qualité. Il souhaitera choisir le montant de ses investissements de telle sorte à maximiser ce que lui rapporte la maison, investissements déduits.*

Pour $k = 0, \ldots, N$, on désigne par x_k une variable d'état représentant la qualité *de la maison durant la k-ième période et par u_k la variable de contrôle représentant le montant des investissements dans la maison durant la k-ième période.*

1. *On suppose que x_k a pour dynamique*

   $$x_{k+1} = \alpha x_k + u_k - \frac{u_k^2}{\overline{x} - x_k}$$

   où $\alpha \in [0, 1]$ et $\overline{x}$ est une constante positive qui représente la qualité parfaite. *On suppose que le loyer durant la k-ième période ainsi que le prix de vente possible à l'instant final N sont proportionnels à la richesse x_k et on désigne par $1/\beta$ le coefficient d'actualisation sur une période (supposé inchangé durant les N périodes). Ecrire l'objectif que le propriétaire souhaite maximiser[2].*
2. *Montrer que, aucune contrainte sur u_k n'étant supposée, la variable adjointe du problème satisfait une relation de récurrence où λ_k n'est fonction que de λ_{k+1} et de k.*
3. *En déduire que le contrôle optimal u_k^* peut s'exprimer en fonction de k et de x_k^* seulement (forme "feedback") et que, lorsque u est optimal, l'équation d'état est une récurrence linéaire.*
4. *Montrer que le* gain optimal *noté $V(x, k)$ est une fonction linéaire (affine) en x.*

---

[2] Rép : $J = \beta^N c x_N + \sum_{k=0}^{N-1}(p x_k - u_k)\beta^k$

5. *Calculer le* prix juste *("fair price") du bien, c'est-à-dire le prix pour lequel il est indifférent pour le propriétaire de vendre sa maison ou de continuer à la louer.*

Exercice 5.14 *On dénote par x le stock d'une entreprise d'un de ses produits. Cette entreprise souhaite en produire une quantité Q dans le temps, imposé, T. En fonction du stock et du taux de production $\dot{x}$, le coût de production durant la période $[0,T]$ considérée est donnée par*

$$J = \int_0^T \left(\frac{a}{2}\dot{x}^2 + 2bx\right) dt,\ a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ constantes données.} \tag{5.56}$$

1. *Former le Hamiltonien H du problème.*
2. *Déterminer le contrôle optimal u en fonction de la variable ajointe λ.*
3. *En déduire, en fonction de t, le stock optimal x.*
4. *En déduire le coût optimal J^*.*
5. *Si on souhaitait une production à taux constant $\overline{u}$, quel serait ce taux constant et quel serait alors le coût de production ?*
6. *Quel est le gain réalisé en obtant pour un taux optimal non constant, par rapport à un taux constant ?*

Exercice 5.15 *Une entreprise émet une obligation, au prix unitaire S, distribuant un flux de revenus. Ce prix est une* fonction connue *du temps. Après achat initial sans frais, le détenteur de cette obligation est autorisé à en revendre ou en racheter, au prix unitaire $S(t)$. Toutefois, cette modification de son portefeuille est soumise à des contraintes, et donne lieu à des frais.*

Un investisseur décide de faire confiance à l'entreprise émettrice, c'est-à-dire qu'il ne tient pas compte des risques de faillite de l'entreprise. A l'instant $t = 0$, il détient une quantité Q d'obligations, et affecte une somme K à un compte bancaire rétribué, qui recevra les flux de revenus de l'obligation, et qui financera ses achats complémentaires et recevra le résultat de ses reventes.

L'objet du problème est de déterminer sa stratégie d'investissement, de manière à maximiser son avoir final :

$$x_1(T) + x_2(T)S(T). \tag{5.57}$$

Après modélisation, l'investisseur arrive à la conclusion que les règles et contraintes sur le fonctionnement du compte rétribué et les transactions sur l'obligation se résument dans la dynamique suivante, où v sera le paramètre de contrôle :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= rx_1 + \rho x_2 + Sv - \alpha S|v| \text{ , avec } r > 0,\ \rho > 0,\ 0 \leq \alpha < 1 \text{ constantes données,} && (5.58)\\
\dot{x}_2 &= -v && (5.59)\\
x_1(0) &= K =: x_1^0 && (5.60)\\
x_2(0) &= Q =: x_2^0 && (5.61)\\
v &\in [-M, M] \text{ , avec } 0 < M \leq 1 \text{ constante donnée.} && (5.62)
\end{aligned}$$

1. *Pour chacune des questions suivantes indiquez sur quelle(s) équation(s) vous fondez votre réponse, et, le cas échéant, sur quel terme dans cette équation. Puis répondez à la question, dans le langage naturel, en veillant à y retrouver précision et concision. On s'accomodera au mieux du fait que ce modèle est un modèle en temps continu de manière à en faciliter son traitement analytique.*
   (a) *Qu'est-ce que le modélisateur représente par x_1, x_2, v, et Sv ?*
   (b) *Comment sont rétribuées les sommes investies sur le compte bancaire ?*
   (c) *Comment sont fixés les flux de revenus de l'obligation ?*
   (d) *Quelles sont les contraintes sur les achats complémentaires et revente de l'obligation ?*
   (e) *Quels sont les frais sur ces achats complémentaires et reventes ?*
2. *Traitement analytique*
   (a) *Posez ce problème d'optimisation et vérifiez qu'il relève du principe du maximum de Pontryagin.*
   (b) *Formez le Hamiltonien et les équations adjointes.*
   (c) *Trouver les deux multiplicateurs de λ_1 et λ_2.*
   (d) *On suppose tout d'abord que $\alpha = 0$; indiquer la valeur de $v(t)$ qui maximise le Hamiltonien. Il pourra être commode d'utiliser dans les calculs la fonction "signe", $v \mapsto \sigma(v) \in \{-1, 0, +1\}$.*

(e) *Achever la résolution du problème d'optimisation posé. Interprétez vos résultats en termes de gestion de portefeuille.*

(f) *Que devient la solution trouvée dans le cas d'un* marché-parfait, *c'est-à-dire lorsque* $M = +\infty$ *et* $\alpha = 0$ *? Indication : montrer par un raisonnement* économique *(ou, à défaut, admettre) qu'il faut que* $S(t)$ *soit telle que la stratégie optimale* v^* *associée vérifie que* $v^*(t) = 0$ *pour tout* t. *En déduire la valeur de* $S(t)$ *pour qu'il en soit ainsi : c'est le* prix d'arbitage *de l'obligation.*

(g) *On revient au cas général* $0 \leq \alpha < 1$ *; indiquer la valeur de* $v(t)$ *qui maximise le Hamiltonien. Il pourra être commode d'utiliser les fonctions*

$$t \mapsto S_\sigma(t) := \frac{1}{1-\sigma\alpha}\left[S(T)e^{r(t-T)} + \frac{\rho}{r}(1-e^{r(t-T)})\right] \text{ , pour } \sigma = -1, 0, +1.$$

(h) *Achever la résolution du problème d'optimisation posé dans ce cas général. Interprétez vos résultats en termes de gestion de portefeuille.*

Exercice 5.16 Modèle de Beverton-Holt (1957) *On considère une population de poissons de même âge sur une période* $t \in [0,T]$ *durant laquelle ils ne se reproduisent pas. Leur nombre* $N(t)$ *va donc diminuer à la fois par mortalité naturelle et à la fois par mortalité par pêche. On désigne par* M *le coefficient de mortalité naturelle, et par* $u(t)$ *celui par pêche. La dynamique de cette population est donc*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{N} & = & -(M+u(t))N \\ N(0) & = & R \end{array}\right. \tag{5.63}$$

où R *est le nombre de poissons à l'instant* $t = 0$. *Soit* $w(t)$ *le poids moyen d'un poisson d'âge* t, *et* $B(t) = N(t)w(t)$ *la biomasse. Le revenu intertemporel de l'exploitation est, par définition*

$$J(u) = \int_0^T e^{-\delta t}(pN(t)w(t) - C)u(t)dt$$

où δ, p, *et* C *sont des constantes positives ; on suppose que* $0 \leq u(t) \leq u_{Max}$. *On se propose d'utiliser le Principe du Maximum de Pontryagin pour trouver* $u(t)$ *qui maximise* J.

1. *Ecrire le hamiltonien du problème, et vérifier que c'est une fonction linéaire-affine de* u.
   Rep : $H(t, \lambda, N, u) = u(e^{-\delta t}(pNw(t) - C) - \lambda N) - \lambda NM$.
2. *On désigne par* $u^*(t)$ *le contrôle optimal, et* $\lambda(t)$ *la variable adjointe. Montrer que si* $u(t) \neq 0$ *et* $u(t) \neq u_{Max}$, *alors le nombre de poissons* $N(t)$ *est donné par*

$$N(t) = N^*(t) := \frac{K}{w(t)(M + \delta - \frac{w'(t)}{w(t)})}, \tag{5.64}$$

   où K *est une constante qu'on précisera.*
   Rep : $K = \delta C/p$.
3. *On suppose que pour la population de poissons considérée,* $w(t)$ *est une fonction croissante, et* $w'(t)/w(t)$ *est une fonction décroissante. Montrer que, lorsque* $N(t) = N^*(t)$, *la biomasse* $B^*(t)$ *décroit. Qu'en est-il lorsque* $u(t) = 0$ *ou* $u(t) = u_{Max}$ *?*

Exercice 5.17 PMP : de l'énoncé discret à l'énoncé continu : *rappelons l'énoncé suivant :*

Théorème 5.3 *Soit* $U = (U_0, \ldots, U_N)$ *un contrôle de la récurrence*

$$X_{n+1} = R(X_n, U_n) \tag{5.65}$$

qui optimise la quantité $J(X,U)$ *définie par*

$$J(X,U) := \sum_{k=0}^{N-1} G(X_n, U_n) + K(X_N). \tag{5.66}$$

Soit $\Lambda = (\Lambda_0, \ldots, \Lambda_N)$, *la* récurrence adjointe *descendante, définie par*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Lambda_{n-1} & = & H'_X(\Lambda_n, X_{n-1}, U_{n-1}) \text{ pour } n = 0 \ldots N-1, \\ \Lambda_N & = & K'(X_N) \end{array}\right. \tag{5.67}$$

où $H(\Lambda, X, U) := G(X,U) + \Lambda \cdot R(X,U)$. *Alors, pour* $n = 1, \ldots, N$, *on a nécessairement :*

$$H'_U(\Lambda_n, X_{n-1}, U_{n-1}) = 0. \tag{5.68}$$

1. *Montrer, en posant* $x(t_n) = \varepsilon X_n$ *et* $u(t_n) = \varepsilon U_n$ *pour une subdivision* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, *avec* $t_{i+1} - t_i =: \varepsilon$, *que l'on peut transformer une équation différentielle* $x' = f(x,u)$ *en une récurrence de la forme (5.65) et un objectif* $J(u) = \int_0^T g(x(t),u(t))dt + k(x(T))$ *en un objectif de la forme (5.1).*
2. *En posant* $\lambda(t_n) = \Lambda_n/\varepsilon$, *écrire la récurrence descendante (5.67) et la relation (5.68) pour le problème discret obtenu à la question précédente.*
3. *En déduire l'énoncé du PMP dans le cas où* $\mathcal{U}$ *est ouvert :*

   Théorème 5.4 (Principe du maximum de Pontryagin) *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *; si* $u : [0,T] \to U$ *est un contrôle admissible tel que* $J(u)$ *soit maximal sur l'ensemble* $\mathcal{U}$, *alors, pour tout* $t \in [0,T[$, $H'_u(\lambda^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0$, *où* $x^* := x_{u^*}$ *est la réponse du système* $x' = f(x,u)$ *au contrôle* u^* *et* λ *la solution pour* $x = x^*$ *et* $u = u^*$ *du système adjoint :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda' & = & \lambda \cdot f'_x(x,u) + g'_x(x,u) \ \ (= H'_x(\lambda,x,u)) \\ \lambda(T) & = & k'(x(T)) \end{array} \right. \tag{5.69}$$

Chapitre 6

Principe de Bellman

6.1 La fonction et le principe de Bellman

Le principe de Bellman est le fruit des recherches US sur le problème du contrôle optimal, encore connues sous le nom de *programmation dynamique*. Comme pour le principe du maximum de Pontryagin, il s'agit de déterminer le maximum de la fonctionnelle

$$J(u) = J_{t_0,x_0}(u) := \int_{t_0}^{T} g(x_u(t), u(t))dt + k(x(T)) \tag{6.1}$$

sur tous les contrôles admissibles $u \in \mathcal{U}$, où la variable d'état $x_u(t)$ est solution du système dynamique commandé

$$\dot{x} = f(x, u(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0. \tag{6.2}$$

Définition : On appelle *fonction de Bellman* la fonction

$$V(x_0, t_0) := \operatorname{Sup}_{\overline{u} \in \mathcal{U}} J(\overline{u})$$

où $J(\overline{u})$ est définie par (6.1) pour $x_{\overline{u}}$ désignant la solution de (6.2) correspondant à ce choix de la commande u.

A noter qu'il s'est introduit ici le paramètre t_0 qui s'ajoute au paramètre x_0 déja présent pour le principe du maximum de Pontryagin. Faisons l'hypothèse que, pour tout $x_0 \in \mathcal{D}$ et tout $t_0 \in [0, T]$, $V(x_0, t_0)$ ne soit pas seulement un supremum, mais qu'il soit un maximum, i.e. qu'il existe un contrôle admissible $u_{t_0,x_0} : [t_0, T] \to U$ tel que

$$V(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{T} g(x_{u_{t_0,x_0}}(t), u_{t_0,x_0}(t))dt + k(x_{u_{t_0,x_0}}(T)) = \operatorname{Max}_{u \in \mathcal{U}}\{J_{t_0,x_0}(u)\}.$$

ou encore

$$u_{t_0,x_0} \in \operatorname{ArgMax}_{\overline{u} \in \mathcal{U}} \{J_{t_0,x_0}(\overline{u})\}.$$

En notant $u^* := u_{t_0,x_0}$ et $x^* := x_{u^*}$, on a, pour tout $t_1 \in]t_0, T]$

$$\begin{aligned}
v(x_0, t_0) &= \int_{t_0}^{T} g(x^*(t), u^*(t))dt + k(x^*(T)) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} g(x^*(t), u^*(t))dt + \int_{t_1}^{T} g(x^*(t), u^*(t))dt + k(x^*(T)) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} g(x^*(t), u^*(t))dt + J_{t_1,x_1}(u^*|_{[t_1,T]}), \text{ où } x_1 := x^*(t_1) \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} g(x^*(t), u^*(t))dt + V(x_1, t_1) \qquad (6.3) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} g(x^*(t), u^*(t))dt + J_{t_1,x_1}(u^{**}), \text{ pour } u^{**} \in \operatorname{ArgMax}_{\overline{u} \in \mathcal{U}} \{J_{t_1,x_1}(\overline{u})\} \\
&= J_{t_0,x_0}(\hat{u}),
\end{aligned}$$

où $\hat{u}(t) := u^*(t)$ si $t \in [t_0, t_1]$, et $\hat{u}(t) := u^{**}(t)$ si $t \in [t_1, T]$. Si l'inégalité (6.3) était stricte, on aurait $J_{t_0,x_0}(u^*) = V(t_0, x_0)) < J_{t_0,x_0}(\hat{u})$, ce qui contredirait que $u^*(:= u_{t_0,x_0}) \in \mathrm{ArgMax}_{u\in\mathcal{U}} \{J_{t_0,x_0}(u)\}$. Donc (6.3) est une *égalité*, et donc

$$J_{t_1,x_1}(u^*|_{[t_1,T]}) = V(x_1, t_1),$$

ce qui montre que la restriction $u^*|_{[t_1,T]}$ d'une commande optimale à un intervalle final $[t_1, T] \subseteq [t_0, T]$ est encore une commande optimale.

En d'autres termes, on a donc le *principe de Bellman :*

La fin d'un contrôle optimal est optimale.

De façon opérationnelle, ceci devient :

Principe 6.1 (Principe de la programmation dynamique de Bellman) *Pour tous* $t_0 < t_1 < T$,

$$V(x_0, t_0) = Max_{\overline{u}\in\mathcal{U}} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} g(x_{\overline{u}}, \overline{u})dt + V(x_{\overline{u}}(t_1), t_1) \right\} \tag{6.4}$$

Dans cette version opérationnelle le principe de Bellman conduit à porter l'attention sur la fonction de Bellman V qui à chaque *condition initiale* (x_0, t_0) associe la valeur optimale de $J_{t_0,x_0}(u)$. A noter qu'il n'est nullement affirmé qu'il existe un *unique* contrôle optimal u_{x_0,t_0}, pas plus qu'à priori un tel contrôle optimal existe (le supremum n'est pas nécessairement atteint) ; c'est la *valeur* optimale qui, biensûr, est unique.

6.2 Le principe de Bellman dans le cas discrêt

Commençons par nous familiariser avec le principe de Bellman dans le cas où t appartient a un ensemble fini $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, \dots, T - \delta t, T\}$, avec $N\delta t = T$. Dans ce cas on définit la fonction J_{t_0,x_0} par

$$J_{t_0,x_0}(u) := \sum_{t\in[t_0..T[} G(x_u(t), u(t)) + k(x(T)), \tag{6.5}$$

où u est un contrôle admissible, c'est-à-dire $u : [0..T[\to U$, et où la variable d'état est définie par la récurrence

$$\left[\begin{array}{rcl} x(t+\delta t) & = & x(t) + F(x(t), u(t)) \\ x(t_0) & = & x_0. \end{array} \right. \tag{6.6}$$

Le cas de la variable continue s'apparente à la situation où $G(x, u) = g(x, u)\delta t$ et $F(x, u) = f(x, u)\delta t$. Voyons comment la *méthode de la programmation dynamique* de Bellman permet de définir par récurrence descendante la commande optimale.

· Pour $t_0 = t = T$, $J_{t_0,x_0}(u) = k(x(T)) = k(x_0)$; il n'y a rien à optimiser, d'où

$$V(x_0, T) = k(x_0). \tag{6.7}$$

Supposons le problème de la détermination de la commande optimale $u^*_{t_0+\delta t,y_0} : [t_0 + \delta t..T[\to U$ et de $V(y_0, t_0 + \delta t)$ résolu pour *tout* y_0, avec

$$V(y_0, t_0 + \delta t) = \mathrm{Max}_{\,u:[t_0+\delta t..T[\to U} J_{t_0+\delta t,y_0}(u).$$

La méthode consiste à définir $u^*_{t_0,y=x_0}$ par

$$u^*_{t_0,x_0}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} v_0 & \text{si } t = t_0 \\ u^*_{t_0+\delta t,y_0}(t) & \text{si } t \geq t_0 + \delta t, \text{ pour } y_0 = x_0 + F(x_0, v_0), \text{ et} \end{array} \right.$$

$$v_0 \in \mathrm{ArgMax}_{v\in U} \{G(x_0, v) + V(x_0 + F(x_0, v), t_0 + \delta t)\}.$$

En effet, pour tout contrôle admissible u on a

$$\begin{array}{rcl} J_{t_0,x_0}(u) & = & G(x_0, u(t_0)) + J_{t_0+\delta t, x_0+F(x_0,u(t_0))}(u) \\ & \leq & G(x_0, u(t_0)) + V(x_0 + F(x_0, u(t_0)), t_0 + \delta t) \\ & \leq & G(x_0, v_0) + V(x_0 + F(x_0, v_0), t_0 + \delta t) \qquad (\text{faire } v = u(t_0)) \\ & = & G(x_0, u^*(t_0)) + V(y_0, t_0 + \delta t) \\ & = & G(x_0, u^*(t_0)) + J_{t_0+\delta t,y_0)}(u^*_{t_0+\delta t,y_0}) \\ & = & G(x_0, u^*(t_0)) + \displaystyle\sum_{t\geq t+\delta t} G(x_{u^*}(t), u^*(t)) \\ & = & J_{t_0,x_0}(u^*). \end{array}$$

En d'autres termes, avec $u^*_{t_0,x_0} = u^*$ ainsi défini, on a bien

$$J_{t_0,x_0}(u) \leq J_{t_0,x_0}(u^*) \quad \text{pour toute commande admissible } u,$$

et le problème est résolu pour t_0 et tout x_0. Résumons :

Proposition 6.2 *La solution maximale de (6.5) sous la dynamique (6.6) obtenue par la méthode de programmation dynamique s'obtient en posant*

$$V(x_0, T) = k(x_0),$$

puis, par récurrence descendante, $u^*_{t,x_0}(t) = v_0$, *avec*

$$v_0 \in ArgMax_{v \in U}\ \{G(x_0, v) + V(x_0 + F(x_0, v), t_0 + \delta t)\}. \tag{6.8}$$

6.3 L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

Théorème 6.3 *Si pour tout* $x_0 \in \mathcal{D}$, *et tout* $t_0 \in [0, T]$, $V(x_0, t_0)$ *est réalisé par un contrôle (optimal)* u_{x_0,t_0}, *et si la fonction* V *est* $\mathcal{C}^1$, *alors elle vérifie l'équation de* Hamilton-Jacobi-Bellman *suivante :*

$$\begin{cases} V_t'(x,t) + Max_{u \in U}\{g(x,u) + V_x'(x,t) \cdot f(x,u)\} &= 0 \\ V(x,T) &= k(x) \end{cases} \tag{6.9}$$

Remarque : On notera la différence entre $\text{Max}_{\overline{u} \in \mathcal{U}}$ qui apparaît dans la formule (6.4) du principe du maximum et $\text{Max}_{u \in U}$ qui figure ici, dans l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (6.9). Dans le premiers cas il s'agit d'un maximum sur un ensemble $\mathcal{U}$ de contrôles $\overline{u}$, c'est-à-dire de *fonctions* càdlàg, alors que dans le second cas, il s'agit d'un maximum sur un ensemble U de *vecteurs* $u \in \mathbb{R}^p$.

Notations : Soit HJB (t, x, u) la quantité dont l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman affirme la nullité du $\text{Sup}_{u \in U}$, c'est-à-dire :

$$\text{HJB}\ (t, x, u) := g(x, u) + V_x'(x,t) \cdot f(x,u) + V_t'(x,t).$$

L'idée de la preuve apparaît bien lorsqu'on utilise un accroissement $\delta t > 0$ infinitésimal de t_0.

Lemme 6.4 *On suppose* f *et* g *standard; les fonctions* V *et* HJB *sont donc standard. Soient* t_0, x_0, u_0 *standard, et* $\delta t > 0$ *i-petit. Soit* $\overline{u} \in \mathcal{U}$ *tel que* $\overline{u}(t) \simeq u_0$ *pour tout* $t \in [t_0, t_0 + \delta t[$. *Si* g *est continue et* V *différentiable, alors*

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t} g(x_{\overline{u}}, \overline{u})dt + V(x_{\overline{u}}(t_0 + \delta t), t_0 + \delta t) = V(x_0, t_0) + \delta t(HJB\ (t_0, x_0, u_0) + \phi). \tag{6.10}$$

Preuve : Sur $[t_0, t_0 + \delta t[$ on a $g(x_{\overline{u}}(t), \overline{u}(t)) = g(x_0, u_0) + \phi$ par continuité de g, supposée standard. Le lemme découle alors du théorème de la moyenne appliqué au terme intégral, et du développement de Taylor à l'ordre un du terme en V

$$V(x_0 + \delta x, t_0 + dt) = V(x_0, t_0) + (V_x'(x_0, t_0) + \phi) \cdot \delta x + (V_t'(x_0, t_0) + \phi)\delta t,$$

en remarquant que $\delta x := x_{\overline{u}}(t_0 + \delta t) - x_{\overline{u}}(t_0) = (\dot{x}_{\overline{u}}(t_0) + \phi)\delta t = (f(x_{\overline{u}}(t_0), \overline{u}(t_0)) + \phi)\delta t$. □

Preuve du théorème 6.3 : L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman étant standard, nous pouvons par transfert, supposer que f et g sont standard, de même que le point (t_0, x_0) auquel nous voulons monter que cette équation est vérifiée.

Première étape : Par hypothèse, il existe $u^* \in \text{ArgMax}_{u \in \mathcal{U}}\{J_{t_0,x_0}(u)\}$, que nous pouvons supposer standard. Soit $u_0 := u^*(t_0)$ qui est donc standard. Par le principe de Bellman, puis le lemme 6.4 (appliqué à $\overline{u} = u^*$), on a donc

$$\begin{aligned} V(x_0, t_0) &= \int_{t_0}^{t_0+\delta t} g(x_{u^*}, u^*)dt + V(x_{u^*}(t + \delta t), t + \delta t) \\ &= V(x_0, t_0) + \delta t(\text{HJB}\ (t_0, x_0, u_0) + \phi). \end{aligned}$$

En simplifiant successivement par $V(x_0, t_0)$ puis par δt on obtient que HJB $(t_0, x_0, u_0) + \phi = 0$. En d'autre termes, HJB (t_0, x_0, u_0) est i-petit ; mais comme ce nombre est standard, il est donc nul, d'où

$$\text{HJB } (t_0, x_0, u_0) = 0. \tag{6.11}$$

Seconde étape : Montrons que HJB $(t_0, x_0, u_0) = \text{Max}_{u \in U} \text{HJB } (t_0, x_0, u)$; en effet, pour tout $u_1 \in U$ standard, soit $\delta t > 0$ i-petit, et considérons la commande (non standard)

$$\tilde{u}(t) := \begin{cases} u_1 & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \delta t[\\ u^{**}(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

où $u^{**} = u_{t_1, x_1}$ est une commande optimale pour la condition initiale $t_1 = t_0 + \delta t$, $x_1 = x_{\tilde{u}}(t_1)$. On a donc

$$\begin{aligned} V(x_0, t_0) &= J_{t_0, x_0}(u^*) = \text{Max}_{\overline{u} \in \mathcal{U}} J_{t_0, x_0}(\overline{u}) \\ &\geq J_{t_0, x_0}(\tilde{u}) = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t} g(x_{\tilde{u}}, \tilde{u}) dt + V(x_1, t_1) \\ &= V(x_0, t_0) + \delta t (\text{HJB } (t_0, x_0, u_1) + \phi) \text{ en vertu du lemme 6.4.} \end{aligned}$$

Après une nouvelle fois une simplification par $V(x_0, t_0)$ puis $\delta t > 0$, on obtient cette fois, en utilisant (6.11),

$$\text{HJB } (t_0, x_0, u_1) \leq 0 = \text{HJB } (t_0, x_0, u_0)$$

d'où

$$0 = \text{HJB } (t_0, x_0, u_0) = \text{Max}_{u \in U} \text{HJB } (t_0, x_0, u)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Max}_{u \in U} \text{HJB } (t_0, x_0, u) = \text{Max}_{u \in U} \{ g(x, u) + V'_x(x, t) \cdot f(x, u) + V'_t(x, t) \} \\ &= V'_t(x, t) + \text{Max}_{u \in U} \{ g(x, u) + V'_x(x, t) \cdot f(x, u) \}. \end{aligned}$$

□

6.4 Exercices

Exercice 6.1 *Un problème de contrôle optimal est dit* linéaire-quadratique *lorsque la dynamique est linéaire, c'est-à-dire de la forme :*

$$\begin{cases} x' &= \alpha x + \beta u \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{6.12}$$

et losque l'objectif est l'intégrale d'une fonction quadratique de x et de u à laquelle s'ajoute un terme d'héritage lui-même quadratique en $x(T)$, c'est-à-dire

$$\int_0^T -\frac{1}{2}\gamma x^2(s) - \frac{1}{2}\delta u^2(s) ds + \varepsilon x(T) + \frac{\eta}{2} x^2(T)$$

où α, β, γ, δ, ε et η sont des constantes, α, β, γ, δ étant supposées strictement positives.

1. *Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman pour ce problème.*
2. *Caractériser les valeurs de u qui réalisent la maximum pour cette équation.*
3. *Montrer que l'équation HJB admet une solution de la forme $V(x, t) = \frac{1}{2} a(t) x^2 + b(t) x + c(t)$.*
4. *Résoudre le problème pour $a = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 1$ et $\varepsilon = \eta = 0$.*

Exercice 6.2 *Reprendre l'exercice 3 de la fiche TD 5 en utilisant le principe de Bellman.*

Exercice 6.3 *Le modèle dit* de consommation-épargne *s'intéresse aux choix d'un ménage concernant la répartition de ses revenus entre épargne et consommation. Il suppose que ce choix est fait en optimisant la* satisfaction à *la fois instantanée et à venir de la consommation du ménage.*

On désigne par $s(t)$ le flux de salaire (supposé donné, ou exogène) que le ménage partage en (flux de) consommation $c(t)$ et (flux d')épargne $e(t)$. On a donc $s(t) = c(t) + e(t)$, et on suppose que la valeur marginale de la richesse du ménage $x(t)$ est la somme du flux d'intérêt et du flux d'épargne, c'est-à-dire $x'(t) = rx(t) + e(t)$, où r est le taux d'escompte de l'argent.

On suppose que la satisfaction procurée à chaque instant t par la consommation $c(t)$ s'apprécie au travers d'une fonction d'utilité *notée U et on déduit son utilité actuelle* $U(t) = e^{-\delta t}U(c(t))$ *par actualisation à un taux δ dit* taux d'escompte psychologique. *Enfin on suppose que le ménage choisit sa consommation $c(t)$ de façon à* maximiser son utilité intertemporelle.

Traiter ce problème à l'aide du principe de Bellman et comparer les résultats avec ceux obtenus lors du traitement de ce problème par l'équation d'Euler-Lagrange ou par le Principe du Maximum.

Exercice 6.4 *Dans ce qui précède nous avons traité du Principe de Bellman dans le cas d'une dynamique* autonôme

$$X(t + \delta t) = X(t) + F(X(t), u(t)) \tag{6.13}$$

c'est-à-dire que $F = F(X, u)$ ne dépend pas du temps, et dans l'objectif

$$J_{t_0,X_0}(u) = \sum_{t\in[t_0..T[} G(X(t), u(t)) \quad + \quad k(X(T)), \tag{6.14}$$

la fonction $G = G(X, u)$ ne dépend pas non plus de t. Or, en économie, on souhaite généralement considérer, pour objectif, la somme des valeurs actuelles $e^{-rt}\Gamma(t, x(t), u(t))$ *du flux* $\Gamma(t, x(t), u(t))$ *de l'instant t. En fait, ce cas plus général se ramène au cas traité en posant $X = (t, x)$. Cette première partie consiste à généraliser le cas non-autonôme au cas vu en cours par cette petite astuce. Considérons la dynamique non-autonôme*

$$x(t + \delta t) = x(t) + f(t, x(t), u(t)) \ , \ t \in [0..T[_{\delta t} \ , \ x(0) \text{ donné}, \tag{6.15}$$

et on souhaite choisir le contrôle $u \in [0..T[\longrightarrow U$ de manière à maximiser l'objectif J_{0,x_0} pour

$$J_{t_0,x_0}(u) = \sum_{t\in[t_0..T[} G(t, x(t), u(t)) \quad + \quad h(x(t)). \tag{6.16}$$

1. *Montrer, par récurrence sur $t \in [0..T[$, en posant $F(X, u) = (\delta t, f(X, u))$, avec $X = (s, x)$, $s(0) = 0$, que $X(t) = (s(t), x(t))$ est solution de (6.13) si et seulement si $s(t) = t$ et $x(t)$ est solution de (6.15).*
2. *En déduire que, en notant $V(x_0, t_0)$ la fonction de Bellman pour (6.15)-(6.16)*

$$\begin{cases} V(x_0, T) &= h(x(T)) \\ V(x_0, t_0) &= Sup_{v\in U}\{G(t_0, x_0, v) + V(x_0 + f(t_0, x_0, v), t_0 + \delta t)\} \end{cases} \tag{6.17}$$

Exercice 6.5 Application : *On considère le problème de l'exploitation d'une ressource renouvelable $x(t)$. A chaque instant $t \in [0..T[$, on prélève une quantité $u(t)$, laissant une quantité $x(t) - u(t)$ de ressource qui, alors, suit une dynamique*

$$x(t + \delta t) = \Phi(x(t) - u(t)).$$

L'objectif est de maximiser la somme des valeurs actuelles des prélèvements et de la valeur actuelle du stock final.

1. *Ecrire la fonction $J_{t_0,x_0}(u)$ qu'on veut maximiser.*
2. *On suppose que $\Phi(z) = e^{\rho\delta t}z$, et que le prélèvement est compris à tout instant t entre 0 et le stock x disponible au moment du prélèvement. Ecrire la valeur de $G(t, x, v) + V(x + f(t, x, v), t + \delta t)$ en fonction de V, r, ρ, et δt.*
3. *On suppose tout d'abord que $\rho < r$. Montrer que $V(x, T) = xe^{-rT}$ et $V(x, T - \delta t) = xe^{-r(T-\delta t)}$.*
4. *Toujours pour $\rho < r$, donner et démontrer par récurrence descendante la valeur de $V(x, t)$, $t \in [0..T[$.*
5. *Toujours pour $\rho < r$, vérifier que $V(x, 0) = x$. Quelle est, dès lors, une stratégie optimale d'exploitation ? Commentez.*
6. *On suppose à présent que $\rho > r$. Montrer par récurrence sur $k \geq 0$ que*

$$V(x, T - k\delta t) = xe^{-rT}e^{k\rho\delta t}.$$

7. *On considère une ressource telle que $x(0) = x_0$ et qui ne subit aucun prélèvement. Quelle est sa valeur à l'instant T, et quelle est cette valeur actuelle ? Voyez-vous quelle est la stratégie optimale lorsque $\rho > r$? Commentez.*

Bibliographie

[1] Gilbert Abraham-Frois. *Dynamique économique.* Précis. Dalloz, 1991.

[2] V. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles.* Editions Mir, 1974.

[3] V. Arnold. *Equations différentielles Ordinaires.* Editions Mir, 1974.

[4] Colin W. Clark. *Mathematical bioeconomics, the optimal management of renouwable resources.* John Wiley and sons, Inc., 1990.

[5] R. Courant. *Differential and Integral Calculus.* Blackie and son, ltd, 1931.

[6] Bernard Dacorogna. *Introduction au calcul des variations.* Cahiers mathématiques de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1992.

[7] Gabrielle Demange and Jean-Charles Rochet. *Méthodes mathématiques de la finance.* Collection "Frontières de la Science". Economica, 1992.

[8] David G. Luenberger. *Dynamic systems.* John Wiley and sons, 1979.

[9] Pierre N.V. Tu. *Dynamical Systems.* Springer Verlag, 1992.