Marches aléatoires et applications à la finance

Marc et Francine DIENER

9 octobre 2002

Table des matières

1 Prix et couverture d'une option d'achat **5**
1.1 Evaluation du prix dans un modèle à une étape 5
1.2 Modèle à deux étapes : couverture dynamique. 6

2 Formule fondamentale dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein **11**
2.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein 11
2.2 Construction du portefeuille de couverture 12
2.3 Probabilité de calcul et formule fondamentale 13
2.4 Hypothèses du modèle 14

3 Marches aléatoires. Filtration et information **17**
3.1 Définitions et exemples 17
3.2 La marche de Wiener et ses dérivées 18
3.3 Filtration et information 19

4 Espérance conditionnelle **21**
4.1 Espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement 21
4.2 Espérance conditionnelle d'une v.a. par rapport à une tribu 21
4.3 L'espace euclidien $L^2(\Omega)$ 22
4.4 Application au calcul de prix d'options 23

5 Martingales **25**
5.1 Définition et exemples 25
5.2 Quelques propiétés 26
5.3 Calcul des "pertes et profits" d'un portefeuille 27
5.4 Le cas des marchés incomplets 29

Chapitre 1

Prix et couverture d'une option d'achat

Dans cette première leçon, on explique comment on peut calculer le prix d'un contrat d'option en évaluant celui d'un portefeuille de couverture de cette option. On se place dans un cas très simple, celui d'une option d'achat sur un actif financier dont on a modélisé la dynamique au moyen d'un arbre binaire. Le taux d'intérêt monétaire est supposé constant pendant la durée du contrat.

Définition : Une *option* d'achat (européenne), *encore appelée call*, est un titre donnant droit à son détenteur d'acheter un actif financier à une date future et à un prix fixé. Il s'agit d'un droit et non d'une obligation. Le prix fixé s'appelle le *prix d'exercice* de l'option et la date de fin du contrat la *date d'échéance* ou *date d'exercice*. L'actif financier sur lequel porte le contrat s'appelle l'*actif sous-jacent*.

Le propre d'un contrat d'option, tient à ce qu'à la date de souscription, la valeur à l'échéance de l'actif sous-jacent n'est pas connue mais le paiment que pourra exiger le détenteur de l'option, s'il exerce l'option, dépend de cette valeur à l'écheance. C'est pourquoi on appelle aussi les options des *contrats contingents*. On peut comprendre, dans un premier temps, un tel contrat comme un contrat d'assurance : le vendeur de l'option est l'assureur, l'acheteur l'assuré, ce dernier cherchant à se couvrir contre une envolée de la valeur du sous-jacent. Il s'agit alors d'un contrat de transfert de risque moyennant un prix. Mais nous verrons plus loin qu'il y a une différence essentielle entre un contrat d'assurance classique (assurance habitation ou automobile) et un contrat d'option.

L'exemple le plus naturel d'actif financier est sans doute celui d'une action cotée en bourse, comme l'action Micsft ou Netscp sur le NASDAQ ou AmOnLne sur le NYSE. Mais cela peut aussi être le cours d'une matière première comme le prix d'une tonne de zing ou celui d'un produit agricole tel le prix de 50.000 livres de boeuf. Les premiers contrats d'option étaient des contrats sur cours agricoles déjà courants au siècle dernier. Les contrats d'option sur actions se sont vraiment développés lorsqu'ils ont pu faire l'objet d'une négociation en bourse, c'est-à-dire à partir des années 70 sur le CBOT, à Chicago, puis progressivement dans la plupart des autres places financières.

1.1 Evaluation du prix dans un modèle à une étape

Pour évaluer le prix d'une option d'achat à l'instant initial, c'est-à-dire la somme à verser par l'acheteur au vendeur, plaçons nous tout d'abord dans un cas très simple. Notons $t = 0$ l'instant de souscription de l'option, $t = T$ son échéance et K son prix d'exercice. Supposons que l'actif sous-jacent ait la valeur S_0 à l'instant initial et qu'il ne puisse prendre que deux valeurs $S_T = S_0 u$ ou $S_T = S_0 d$ à l'échéance, avec $0 < d < 1 < u$. On verra qu'il est naturel de supposer en outre que $S_0 d < K < S_0 u$. Soit C_0 la valeur, à déterminer, du call à l'instant $t = 0$; c'est le prix du contrat, ou la *prime*. A l'instant initial le vendeur ne sait pas si S_T prendra la valeur $S_0 u$ ou $S_0 d$, mais il peut évaluer ce qu'il devra à l'acheteur dans chacun des deux cas : si $S_T = S_0 d$, l'acheteur n'exercera pas (puisqu'il peut alors acheter l'actif sous-jacent sur le marché à un prix inférieur à K) et donc la valeur de l'option est nulle ; par contre si $S_T = S_0 u$, l'acheteur réclamera au vendeur la différence entre le prix de marché et le prix convenu K, soit $S_0 u - K$, somme lui permettant d'effectuer son achat à ce prix. Comment le vendeur peut-il, avec la prime qu'il a reçue, faire face à ses engagements ? L'idée est d'utiliser la prime pour constituer un portefeuille, appelé *portefeuille de couverture* Π, composé de a actifs S_0 et de b unités monétaires, et de choisir sa composition a et b de telle façon que sa valeur à l'échéance soit précisément celle de l'option,

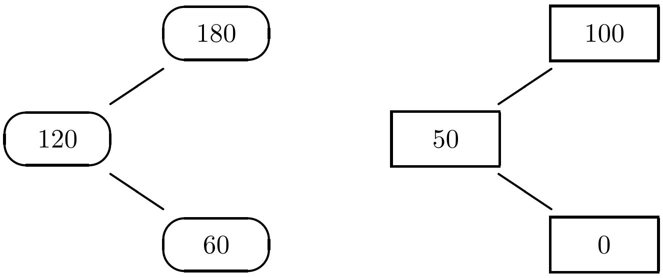

Figure 1.1: Un exemple de modèle à une étape

c'est-à-dire 0 si $S_T = S_0 d$ et $S_0 u - K$ si $S_T = S_0 u$. . Si l'on désigne par r le taux d'intérêt monétaire, la *composition du portefeuille* (a, b) devra donc vérifier les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0 u + be^{rT} & = & S_0 u - K \\ aS_0 d + be^{rT} & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

On résout facilement ce système (système linéaire de deux équations à deux inconnues a et b) et on déduit des valeurs de a et b obtenues la valeur du portefeuille à l'instant initial $\Pi_0 = aS_0 + b$. On peut alors donner à C_0 la valeur $C_0 = \Pi_0$.

Exemple : Par exemple, si $S_0 = 120$, $u = 1,5$, $u = 0,5$, $r = 0$, et $K = 80$, la résolution du système (1.1) donne $a = \frac{5}{6}$, $b = -50$ et donc $\Pi_0 = 50$. Cela signifie que, ayant touché la prime fixée à $C_0 = 50$, le vendeur emprunte 50 (car $b = -50$) et achète $a = \frac{5}{6}$ de S_0 (au prix 100) ; à l'échéance, son portefeuille vaudra soit $150 = \frac{5}{6}180$, si $S_T = S_0 u$, et il paiera alors $100 = 180 - 80$ au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans interêts puisqu'on a supposé $r = 0$), soit il vaudra $50 = \frac{5}{6}60$, si $S_T = S_0 d$, ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.

Remarque : Notons que pour que le problème admette une solution, il suffit que le système (1.1) admette une solution, ce qui est assuré dès que $u \neq d$, ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : si l'actif sous-jacent n'avait qu'un seul prix à $t = T$, il n'y aurait pas besoin de souscrire d'option !

Remarque : Le raisonnement précédent se généralise facilement à d'autres contrats d'option ; par exemple pour un contrat d'option qui donne le droit de vendre au prix K (au lieu du droit d'acheter), appelé un *put*, sa valeur à l'échéance sera $K - S_0 d$ si $S_T = S_0 d$ et 0 si $S_T = S_0 u$. Plus généralement, si l'on désigne par $C_T = \varphi(S_T)$ le prix du contrat d'option à l'instant T, la résolution du système (1.1) dans ce cas montre que la composition du portefeuille en actif sous-jacent sera donnée par

$$a = \frac{\varphi(S_0 u) - \varphi(S_0 d)}{S_0 u - S_0 d} \tag{1.2}$$

Les praticiens désignent ce quotient sous le nom de *delta de couverture* (ou simplement *delta*). Il désigne la quantité d'actifs sous-jacent qu'il faut avoir dans son portefeuille si l'on veut couvrir l'option.

1.2 Modèle à deux étapes : couverture dynamique.

La seule idée du portefeuille de couverture (a, b) constitué à l'instant initial ne suffit plus si l'option peut prendre trois valeurs à l'échéance (parce que l'actif sous-jacent en prendrait trois). Par contre, si l'on ajoute la possibilité de modifier, à une date intermédiaire (entre $t = 0$ et $t = T$) la composition du portefeuille constitué à la date initiale, en tenant compte de la valeur S_t du sous-jacent à cette date, on peut trouver une solution à ce problème : c'est l'idée de la couverture dynamique.

Considérons un modèle à deux étapes de l'actif sous-jacent : $t \in \{0, \delta t, 2\delta t = T\}$ et (S_t) prenant la valeur S_0 à l'instant initial, l'une des deux valeurs $S_{\delta t} = S_0 d$ ou $S_{\delta t} = S_0 u$ à l'instant intermédiaire $t = \delta t$ et l'une des trois valeurs $S_T = S_0 d^2$, $S_T = S_0 ud$ ou $S_T = S_0 u^2$ à l'échéance. Pour déterminer la

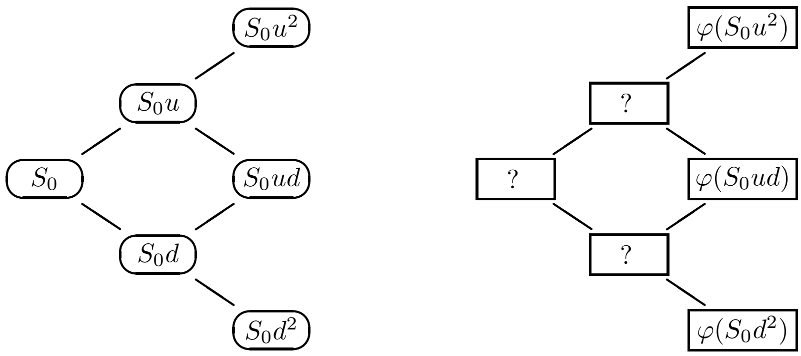

Figure 1.2: Quelles valeurs donner à l'option aux instants $t = \delta t$ et $t = 0$?

valeur d'un portefeuille de couverture d'une option $C_T = \varphi(S_T)$, raisonnons en partant de sa valeur Π_T à l'échéance, qui est connue puisque, pour *couvrir* l'option il devra valoir $\Pi_T = \varphi(S_T)$, somme due en $t = T$ par le vendeur à l'acheteur de l'option. Il y a trois possibilités pour cette valeur, selon les valeurs prises par S_T. En utilisant la même méthode que dans le cas d'un modèle à une étape, on peut calculer les deux valeurs $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t} S_{\delta t} + b_{\delta t}$ que devra prendre le portefeuille à l'instant $t = \delta t$, selon que $S_{\delta t} = S_0 d$ ou $S_{\delta t} = S_0 u$. Pour cela, il suffit de résoudre les deux systèmes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aS_0u^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0u^2) \\ aS_0ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0ud) \end{array} \right. \tag{1.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aS_0ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0ud) \\ aS_0d^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0d^2) \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Désignons par $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ les deux valeurs de $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t} S_{\delta t} + b_{\delta t}$ obtenues en remplaçant d'une part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du système (1.3) et $S_{\delta t}$ par $S_0 u$ et d'autre part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du système (1.4) et $S_{\delta t}$ par $S_0 d$. Pour obtenir la valeur cherchée du portefeuille à l'instant initial, qui sera comme précédemment la valeur initiale de l'option (ou prime), il reste alors simplement à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aS_0u + be^{r\delta t} & = & \Pi^u_{\delta t} \\ aS_0d + be^{r\delta t} & = & \Pi^d_{\delta t} \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Exemple : Soit un titre valant $S_0 = 80$ et changeant deux fois de prix avant l'échéance en $T = 2\delta t$. Observons que dans l'exemple précédent nous avions, à $t = \delta t$, $S_{\delta t} = S_0(1 + \frac{1}{2})$ ou $S_{\delta t} = S_0(1 - \frac{1}{2})$. Supposons qu'ici S suive un processus analogue :

$$S_{\delta t} = S_0(1 \pm \tfrac{1}{2}) \ , \ S_{2\delta t} = S_{\delta t}(1 \pm \tfrac{1}{2}).$$

Cela donne pour cet actif la dynamique indiquée figure 1.2 :

$$S_0 = 80 \quad \text{devient} \quad S_{\delta t} = 120 \text{ ou } S_{\delta t} = 40 \tag{1.6}$$

$$S_0 = 120 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 180 \text{ ou } S_{2\delta t} = 60 \tag{1.7}$$

$$S_0 = 40 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 60 \text{ ou } S_{2\delta t} = 20 \tag{1.8}$$

Soit une option call de date d'exercice $T = 2\delta t$ et prix d'exercice $K = 80$ (lorsque $K = S_0$, on dit que c'est une option "à la monnaie"). On suppose, pour simplifier, que le taux d'intéret monétaire r est ici égal à 0.

Observons que si $S_{\delta t} = 120$ nous retrouvons l'exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas (c'est-à-dire si $S_{\delta t} = 120$), doit valoir

$$\Pi^u_{\delta t} = 50.$$

Qu'en est-il si $S_{\delta t} = 40$? Inutile de faire des calculs : les deux seules possibilité à venir pour $S_{2\delta t}$ sont 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures au prix d'exercice $K = 80$, on aura dans les deux cas $\varphi(S_{2\delta t}) = 0$, et donc $a_{\delta t} = b_{\delta t} = \Pi_{\delta t} = 0$ puisqu'il n'y a plus rien à couvrir dans ce cas.

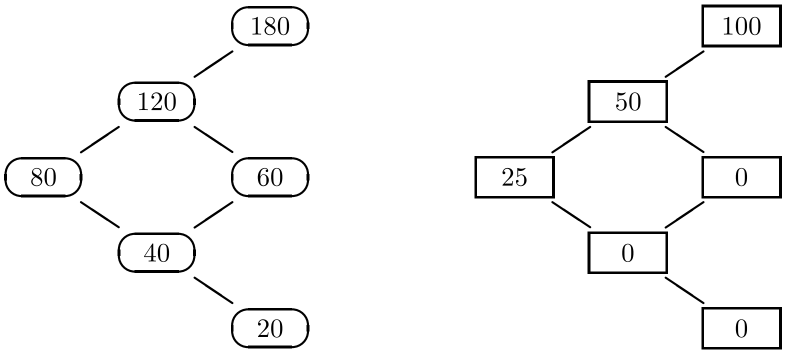

Figure 1.3: Deux pattes-d'oie : la première repésente l'évolution sur deux étapes d'un actif à dynamique stochastique binaire, avec $S_0 = 80$ et $S_{t+\delta t} = S_t(1 \pm 0.5)$; la seconde celle du portefeuille de couverture d'un call sur cet actif de prix d'exercice $K = 80$.

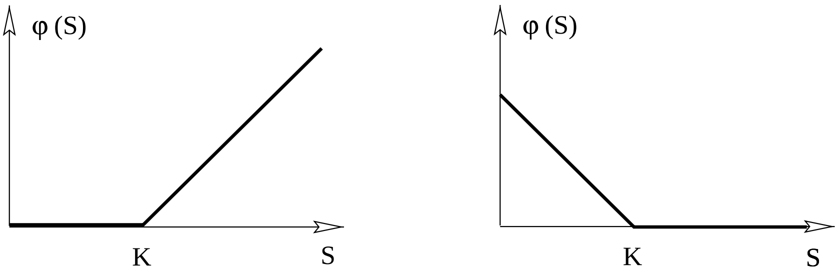

Figure 1.4: Fonction de paiement (ou pay-off) d'un call et d'un put : l'option call est l'option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d'échéance T, l'actif S à un prix maximal K. Si $S_T \leq K$, l'option aura donc une valeur nulle pour $t = T$. Si $S_T > K$, l'option vaudra $S_T - K$ pour $t = T$, c'est-à-dire la différence entre le prix maximal convenu K et le prix effectif S_T de l'actif à la date T. Pour une option call, on a donc $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$, où x^+ vaut x si $x > 0$ et 0 sinon. L'option put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date T, l'actif S au prix minimum K. En examinant successivement les cas $S_T \geq K$ et $S_T < K$, il est facile de voir que $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$. Le nombre K s'appelle le *prix d'exercice* (ou *strike*) de l'option.

A l'instant $t = 0$ le portefeuille de couverture (a_0, b_0) doit satisfaire $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$, c'est-à-dire vérifier le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 120 + b_0 & = & a_0 S_0 u + b_0 = 50 \\ a_0 60 + b_0 & = & a_0 S_0 d + b_0 = 0 \end{array} \right. \tag{1.9}$$

On trouve immédiatement $a_0 = \frac{5}{8}$ et $b_0 = -25$ d'où $\Pi_0 = \frac{5}{8}80 - 25 = 25$. Le vendeur de l'option, dont le prix est $\Pi_0 = 25$, touche cette prime à l'instant initial, y ajoute un montant de 25 qu'il emprunte, le tout servant à acheter $\frac{5}{8}$ d'actifs à 80 pièce. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la baisse et que $S_{\delta t} = 40$, *on solde* le portefeuille ; la part en actifs ne vaut plus que $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8}40 = 25$, soit exactement de quoi rembourser la dette $b_0 = 25$. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la hausse et que $S_{\delta t} = 120$, nous avons vu dans l'exemple précédent que le portefeuille doit à présent comporter $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$; comme il y a déjà $\frac{5}{8}$ d'actifs dans le portefeuille, il convient d'en *racheter* $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$ au prix unitaire $S_{\delta t} = 120$, donc pour une valeur de $\frac{10}{48}120 = 25$, que l'on emprunte, ce qui porte la dette totale à $25 + 25 = 50$, comme dans le premier exemple, bien entendu. Le vendeu a ainsi modifié la composition de son portefeuille de couverture (sans changer sa valeur) de telle sorte qu'à l'échéance sa valeur soit exactement celle de l'option (100, 0, ou 0 selon les valeurs de $S_{2\delta t}$) : c'est le principe de la couverture dynamique.

Remarque : On peut à présent comprendre pourquoi le méchanisme de couverture dynamique d'une option décrit dans cette leçon est fondamentalement différent de celui qui permet à un assureur de couvrir un risque de vol ou d'incendie : dans le cas d'une option, le vendeur peut (à supposer que le modèle mathématique qu'il a de la dynamique de l'actif sous-jacent soit réaliste) couvrir le risque d'un seul contrat, et même le couvrir exactement, c'est-à-dire le faire disparaître. Dans le cas d'une assurance

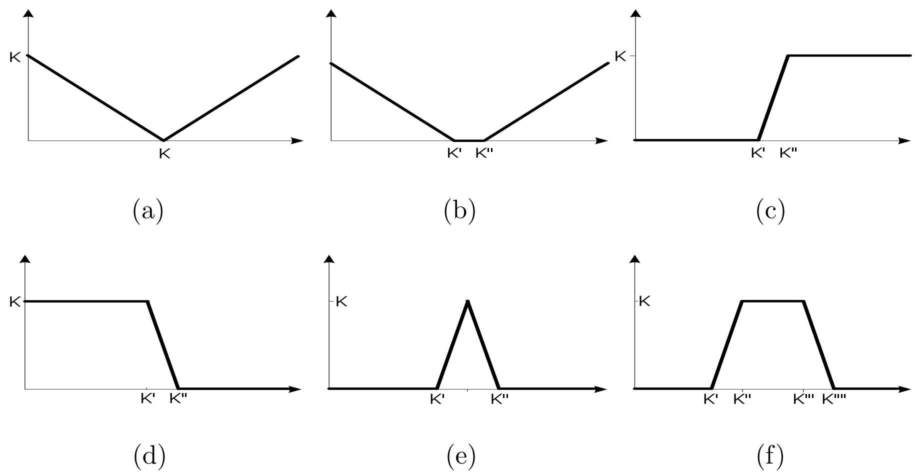

Figure 1.5: Fonctions de paiement (ou pay-off) de quelques options standard : (a) straddel, (b) strangel, (c) bull spread, (d) bear spread, (e) butterfly spread, (f) condor. Exercice : après avoir étudié la définition d'un call et d'un put, indiquer comment au moyen d'achat et de vente de call et de put on peut synthétiser les options définies par les pay-off de cette figure.

classique au contraire, l'assureur doit avoir vendu de nombreux contrats pour, en moyenne, pouvoir faire fasse à ses obligations, comptant sur le fait que la probabilité pour qu'un trop grand nombre de clients aient un sinistre simultanement est suffisamment faible : c'est une couverture du risque par diversification.

Une question naturelle que cette remarque peut susciter est la suivante : si le vendeur d'une option peut, grace à la couverture dynamique, supprimer le risque, pourquoi l'acheteur ne couvre-t-il pas lui-même ce risque ? Quand au vendeur, s'il ne gagne rien à le faire, pourquoi le fait-il ? La réponse est que, dans la pratique, la couverture dynamique nécessitant un travail au jour le jour de surveillance des cours et d'ajustement de son portefeuille, est, bien entendu, rémunérée, même si nous n'en avons pas tenu compte dans les calculs ci-dessus ; l'acheteur, quant à lui, n'a pas nécéssairement envie d'assumer ce travail, d'autant qu'il subsiste une part de risque pour le vendeur si le modèle mathématique utilisé pour faire les calculs est trop grossièrement faux.

Remarque : Il est utile également d'observer ce qui se passe si le vendeur de l'option ne la couvre pas, soit qu'il n'achète aucun portefeuille de couverture avec la prime, soit qu'il achète bien, à la date initiale, le portefeuille (a_0, b_0) adapté mais ne le réajuste plus avant l'échéance. Examinons la question dans le cas de l'exemple : avec 5/8ième d'actif S_t et une dette de 25, le portefeuille acheté à la date initiale vaut à la date finale, si sa composition n'a pas été modifié dans l'intervalle, respectivement :

- $\frac{5}{8}180 - 25 = 87,5$, si le sous-jacent prend la valeur 180 ; or le vendeur doit dans ce cas 100 à l'acheteur.
- $\frac{5}{8}60 - 25 = 12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 60 ; mais le vendeur ne doit rien à l'acheteur dans ce cas, il n'a donc pas de problème.
- $\frac{5}{8}20 - 25 = -12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 20 ; ici encore le vendeur ne doit rien à l'acheteur mais il garde une dette de $12,5$.

On voit donc sur cet exemple qu'il peut se révéler désastreux de ne pas assurer complètement la couverture dynamique.

Chapitre 2

Formule fondamentale dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein

L'objet de cette leçon est de généraliser le calcul du prix d'une option d'un modèle à une ou deux étapes à un modèle à n étapes, appelé *modèle de Cox, Ross et Rubinstein* ou *modèle binomial.* Cela conduira à une formule générale de prix d'option, appelée *formule fondamentale* que l'on obtient grâce à l'introduction de la *probabilité de calcul.* Ce sera aussi l'occasion d'aborder la notion d'*opportunité d'arbitrage.*

2.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le marché financier que nous considérons est un marché financier très simple qui comporte 2 actifs, un actif risqué (par exemple une action ou un indice), dont la valeur est notée S_t sur lequel sera souscrit l'option, et un actif non risqué (par exemple un dépot d'argent sur un compte rémunéré), dont la valeur est notée B_t.

J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein ont proposé en 1979[1]de modéliser l'évolution du prix d'un actif de la façon suivante :

- Pour une suite finie de n instants régulièrement répartis entre 0 et T, $\mathbb{T} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (supposé petit), la valeur $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de l'actif risqué est égale à un nombre positif donné S_0 à l'instant $t = 0$, et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant $t \in \mathbb{T}\backslash\{n\delta t\}$ est S_t, alors sa valeur à l'instant $t + \delta t$ sera soit $S_t u$ soit $S_t d$, où u et d sont des constantes qu'on supposera telles que $0 < d < u$. Donc $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ évolue sur un *arbre binaire* qui, à tout instant $t = k\delta t \in \mathbb{T}$, présente $k + 1$ noeuds ou $k + 1$ valeurs possibles égales à :

$$\{S_0 u^j d^{k-j}, j = 0, \dots, k\}$$

  l'indice j représentant le nombre de fois où l'actif a évolué à la hausse entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = k\delta t$ (j est nombre de "up"), l'ordre des "up" et des "down" n'important pas.

- Pour la même suite d'instants $\mathbb{T}$, l'actif non risqué vaut $B_0 = 1$ à l'instant initial, et il évolue selon la récurrence $B_t = B_{t-\delta t} e^{r\delta t}$, soit $B_t = e^{rt}$, où r désigne le taux d'escompte monétaire qu'on suppose constant, pour simplifier, sur toute la période $[0, T]$.

[1]Ce modèle fait suite à un modèle introduit en 1971 indépendement par Black et Scholes, et Merton, fondé sur une approche stochastique en temps continu. Le premier modèle de ce type remonte en fait à Louis Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. L'idée de l'approche discrète revient, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à W. Sharpe, prix Nobel d'économie et auteur du fameux *Capital Asset Pricing Model* (1964). Nous montrerons dans une leçon ultérieure les liens entre les deux approches, discrete et continue. L'approche en temps continu présente des avantages de calcul indéniables une fois que l'on maîtrise ce calcul. Mais l'approche discrète exposée ici, au dela de ses vertus pédagogiques, est parfois plus à même de modéliser des situations subtiles pour lesquelles l'approche continue peut se révèler trop limitative. Remarquons que la question du calcul des prix d'options peut également être abordée au moyen d'équations aux dérivées partielles (voir par exemple le livre de P. Wilmott, S. Howison, et J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives,* Cambridge University Press (1995)). Le lien entre les deux approches, équations aux dérivées partielles/modèles aléatoires continus, est aujourd'hui bien compris.

2.2 Construction du portefeuille de couverture

On considère un call européen, souscrit sur l'actif $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$, d'échéance $T = n\delta t$ et de prix d'exercice K. Il s'agit donc du droit d'acheter l'actif S_t à la date T au prix K. La valeur de cette option à l'instant final (son paye off) est donc

$$C_T = (S_T - K)^+ = \mathrm{Max}\,(S_T - K, 0) \tag{2.1}$$

c'est-à-dire que, si l'actif sous-jacent vaut $S_0u^jd^{n-j}$ à l'instant final, pour un certain $j \in \{0, \ldots, n\}$, le call vaudra $C_T = (S_0u^jd^{n-j} - K)^+$ pour ce même j.

Pour calculer, à partir de ces données, le prix du call à l'instant initial nous allons reprendre l'idée développée dans le cas des modèles à une et deux étapes, qui consiste à prendre pour prime de l'option la valeur initiale d'un portefeuille qui couvre l'option, c'est-à-dire dont la même valeur soit précisément celle de l'option à l'instant final. Comme pour le modèle à une ou deux étapes, nous cherchons pour définir le portefeuille Π_t par une relation de récurrence *rétrograde* ("backward") de manière à lier les inconnues Π_0, a_0, et b_0, prix initial et composition initiale, à la donnée de son paye off $(S_T - K)^+$. Cette récurrence se définit de la façon suivante : à toute date t, lorsque le sous-jacent prend la valeur S_t, le portefeuille se compose d'une certaine quantité de sous-jacent S_t, et d'une certaine quantité de placement non-risqué B_t. Comme sa composition a été arrêtée à l'instant $t - \delta t$ (il est commode de dire "la veille"), lorsqu'on ne connaissait que $S_{t-\delta t}$, et qu'elle est restée inchangée jusqu'à la date t, nous choisissons de la noter

$$a =: a_{t-\delta t} \text{ et } b =: b_{t-\delta t}.$$

Ce choix de notation est important. On a donc :

$$\delta\Pi_t = \Pi_t - \Pi_{t-\delta t} = (a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t) - (a_{t-\delta t}S_{t-\delta t} + b_{t-\delta t}B_{t-\delta t}) = a_{t-\delta t}\delta S_t + b_{t-\delta t}\delta B_t \tag{2.2}$$

où δS_t et δB_t sont des notations pour les différences $S_t - S_{t-\delta t}$ et $B_t - B_{t-\delta t}$. On peut alors recomposer le portefeuille, ayant prit connaissance de la valeur atteinte par S_t, mais par construction le portefeuille devra être *autofinancé*, c'est-à-dire que le changement de composition (couverture) intervenant à la date t devra se faire sans apport ni retrait de capitaux, c'est-à-dire en vérifiant la relation :

$$a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t = \Pi_t = a_tS_t + b_tB_t \tag{2.3}$$

Nous reviendrons sur cette *relation d'autofinancement*. On détermine la nouvelle composition de la façon suivante : désignons par S la valeur atteinte par l'actif sous-jacent à l'instant t, par Π ($\Pi := \Pi_t = a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t$) celle correspondante du portefeuille et par B celle de B_t. Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le "lendemain" Su et Sd, d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons Π^u et Π^d, supposées connues par récurrence. Nous devons donc choisir la nouvelle composition (a, b) comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} aSu + be^{r\delta t}B &= \Pi^u \\ aSd + be^{r\delta t}B &= \Pi^d \end{aligned}$$

qui se résoud immédiatement en

$$a = \frac{\Pi^u - \Pi^d}{Su - Sd} \text{ et } b = e^{-r\delta t}\frac{\Pi^d u - \Pi^u d}{B(u-d)}. \tag{2.4}$$

On pose alors $a_t = a$ et $b_t = b$ et on en déduit la valeur cherchée Π_t, par la formule $\Pi_t = a_tS_t + b_tB_t$. On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, toute option d'échéance T et de fonction de paiement $\varphi(S_T)$ est* duplicable, *c'est-à-dire qu'il existe un portefeuille autofinancé qui la couvre.*

Preuve : On raisonne par récurence sur le nombre n d'étapes du modèle. On a vu le cas d'un modèle à une étape ; pour un modèle à n étapes, on remarque simplement que, comme S_t prend deux valeurs S_0u et S_0d à l'instant δt, ces deux valeurs sont chacunes les valeurs initiales d'un modèle à $n-1$ étapes auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où l'existence de deux portefeuilles de couverture $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ avec lesquels on peut alors calculer Π_0 (et donc C_0) comme dans un modèle à une étape. □

2.3 Probabilité de calcul et formule fondamentale

Le calcul évoqué, bien que simple dans son principe, est lourd dans sa mise en oeuvre (résolution d'un grand nombre de systèmes d'équations) et nous allons voir à présent comment on peut le simplifier grâce à l'introduction d'un formalisme probabiliste.

La remarque cruciale est la suivante : si l'on calcule la valeur du portefeuille $\Pi = aS + bB$ en utilisant les solutions (a, b) trouvées en (2.4), on voit facilement qu'on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\Pi = e^{-r\delta t}(p\Pi^u + q\Pi^d), \tag{2.5}$$

si l'on introduit les quantités

$$p := \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \text{ et } q := \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d}. \tag{2.6}$$

Or il est facile de vérifier que ces quantités sont telles que $p + q = 1$ et que, si l'on suppose, ce que nous ferons désormais, que $0 < d < e^{r\delta t} < u$, ces quantités p et q vérifient aussi $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Donc si l'on considère que Π^u et Π^d sont les deux valeurs que peut prendre une v.a. de Bernouilli Π avec $P(\Pi = \Pi^u) = p$ et $P(\Pi = \Pi^d) = q$ alors l'équation (2.5) affirme simplement que Π est précisement le produit par le *facteur d'actualisation*, $e^{-r\delta t}$, de l'espérance de cette v.a., c'est-à-dire *l'espérance actualisée* de cette v.a.. Les valeurs p et q ainsi définies se calculent directement en fonction de u, d et r, donc à partir des données du modèle choisi $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Mais elles ont aussi une autre propriété essentielle : on a en effet

$$S = e^{-r\delta t}(pSu + qSd), \tag{2.7}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$S_{t-\delta t} = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_t \text{ connaissant } S_{t-\delta t}).$$

Nous appelons la probabilité $(p, 1-p)$ la *probabilité de calcul* car c'est avec elle que l'on pourra calculer les prix d'options. On la désigne aussi sous le nom de *probabilité risque neutre* ou encore *probabilité de martingale*, pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons.

La probabilité de calcul permet de munir le modèle de l'actif sous-jacent (S_t) d'une structure de *marche aléatoire*, c'est-à-dire que, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, les $k + 1$ valeurs $\{S_0u^jd^{k-j}, j = 0, \dots, k\}$ que peut prendre S_t sont les $k + 1$ valeurs possibles d'une v.a. dont la loi est donnée par :

$$P(S_t = sS_0u^jd^{k-j}) = \binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}. \tag{2.8}$$

En effet la valeur $S_0u^jd^{k-j}$ atteinte par S_t correspond à une trajectoire qui présente j "montées" et $k - j$ "descentes" dont la probabilité est $p^j(1-p)^{k-j}$ si l'on fait l'hypothèse que ces mouvements, à la hausse ou à la baisse, sont indépendants, et il est facile de voir qu'il y a exactement $\binom{k}{j}$ trajectoires qui atteignent cette valeur. La formule (2.8) explique le nom de modèle binomial que l'on donne souvent au modèle Cox-Ross-Rubinstein. On a la proposition suivante que l'on obtient par un raisonnement par récurrence comme dans la preuve de la proposition précédente, en utilisant la relation de récurrence retrograde (2.5) et (2.6) :

Proposition 2.2 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, le prix d'une option européenne $(T, \varphi(S_T))$ est donnée par*

$$e^{-rT}\mathbb{E}(\varphi(S_T)) = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\varphi(S_0u^jd^{n-j}) \tag{2.9}$$

c'est-à-dire que ce prix est la valeur actualisée de l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement ; ainsi, pour une option call, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (S - K)^+$, on a

$$C_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j} - K)^+$$

et pour le cas d'un put, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (K - S)^+$, on a

$$P_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}(K - S_0u^jd^{n-j})^+.$$

La formule (4.3) s'appelle la *formule fondamentale* pour l'évaluation du prix d'une option européenne.

Exemple : Si l'on revient à l'exemple de modèle à deux étapes donné à la leçon précédente, le calcul de la prime C_0 peut se faire à présent simplement : on détermine la probabilité de calcul définie par la relation $S = pSu + (1-p)Sd$ (on a supposé $r = 0$) ; on obtient $p = \frac{1}{2} = 1 - p$; puis on calcule C_0 comme l'espérance $C_0 = 100P(S_T = 180) + 0P(S_T = 60) + 0P(S_T = 20) = 100(\frac{1}{4}) = 25$.

Remarque : Notons que si la formule fondamentale donne immédiatement le prix de l'option, elle ne donne pas directement la composition du portefeuille de couverture.

2.4 Hypothèses du modèle

La formule fondamentale ci-dessus (formule (4.3) a été obtenue sous l'hypothèse explicite que le modèle choisi pour la dynamique de l'actif sous-jacent est le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein. Mais il y a en fait d'autres hypothèses, économiques, qui ont été faites implicitement, et que nous allons étudier à présent.

- La plus irréaliste, mais difficilement contournable, est celle que l'on appelle l'hypothèse de *marché parfait*. Elle suppose d'une part que le marché est *infiniment liquide : à* tout instant, il existe des acheteurs et des vendeurs pour tous les titres du marché ; elle suppose aussi qu'il n'y a aucune contrainte sur les quantités d'actifs achetés ou vendus (opérations nécessaires pour assurer la couverture dynamique des options) ; en particulier, les titres sont supposés infiniment divisibles, et les agents sans de limitation de découvert. Enfin un marché parfait suppose aussi l'absence de coûts de transaction ainsi que l'égalité des prix à l'achat et à la vente (pas de fourchette bid-ask).

  L'hypothèse de marché parfait est une hypothèse théorique, évidemment non satisfaite dans la pratique, qu'il convient de considérer comme "satisfaite en première approximation", un peu comme l'hypothèse de gaz parfait en physique. Les modèles mathématiques plus élaborés que le modèle CRR cherchent parfois à s'en affranchir sur tel ou tel aspect. Mais il faut reconnaître que, pour l'essentiel, on ne sait pas le faire aujourd'hui de façon satisfaisante et qu'il reste beaucoup à améliorer dans cette direction.

- La seconde hypothèse est celle, déja mentionnée, de *taux d'escompte monétaire constant*. Nous avons par exemple supposé qu'un actif valant S_t à l'instant t a une valeur actuelle, en $t = 0$, égale à $e^{-rt}S_t$. Or, durant la période $[0, t]$, le taux d'escompte varie en réalité et ce qui pourrait être une approximation raisonnable si t était très petit, cesse d'être valable lorsque t devient appréciable. Les modèles plus élaborés font parfois l'hypothèse d'un taux d'escompte stochastique et on peut alors, moyennant le choix d'un modèle mathématique pour la dynamique des taux, intégrer dans la probabilité de calcul, et donc dans l'évaluation des prix d'option par la formule fondammentale, la présence de taux variables.

- La troisième hypothèse est l'*absence de dividendes* versés par les actifs sous-jacents. En fait, il existe des modèles analogues au modèle CRR qui autorisent la prise en compte de dividende.

- La dernière hypothèse est probablement la plus importante : elle porte le nom d'hypothèse d'*absence d'opportunité d'arbitrage* (simplement notée AOA) et joue un rôle essentiel.

  Définition : Une opportunité d'arbitrage est un portefeuille autofinançant nul en $t = 0$ ($\Pi_0 = 0$) et tel que $\Pi_T \geq 0$ dans tous les états du monde et $P(\Pi_T > 0) > 0$.

  Proposition 2.3 *Dans un marché dans lequel on fait l'hypothèse d'AOA, deux portefeuilles qui ont la même valeur à une date future T, ont la même valeur à toutes dates intermédiaires* $0 < t < T$.

  En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait former un portefeuille composé du premier Π_t(en crédit), du second $-\tilde{\Pi}_t$ en débit, et d'une somme d'argent égale à la différence $\alpha := \Pi_t - \tilde{\Pi}_t$ placée au taux r. Si par exemple on suppose, par l'absurde, $\alpha > 0$, alors ce portefeuille est une opportunité d'arbitrage :

$t \in [0, T[$	T
Π_t	Π_T
$-\tilde{\Pi}_t$	$-\tilde{\Pi}_T$
α	$\alpha e^{r(T-t)}$
0	> 0

L'hypothèse d'AOA permet aussi de justifier les inégalités qui ont été supposées satisfaites par l'actif risqué du modèle CRR :

$$0 < d < e^{r\delta t} < u. \tag{2.10}$$

En effet comme $e^{r\delta t}$ est le rendement $\frac{B_t}{B_0}$ de l'actif non risqué durant le laps de temps δt, et comme d et u sont les deux rendements possibles $\frac{S_t}{S_0}$ de l'actif risqué sur le même laps de temps, si l'on avait $d < u < e^{r\delta t}$ par exemple, on aurait une opportunité d'arbitrage :

t	$t + \delta t$
$-S_t$	$-S_t d$ ou $-S_t u$
α	$\alpha e^{r\delta t}$
0	$S_t(e^{r\delta t} - d)$ ou $S_t(e^{r\delta t} - u)$

Car si α est une somme d'argent égale à S_t et placée au taux r, le portefeuille représenté dans ce tableau est une opportunité d'arbitrage. On raisonnerait de façon analogue dans le cas $e^{r\delta t} < d < u$, avec $+S_t$ et $-\alpha$.

Remarque : Une opportunité d'arbitrage est parfois appelée un *free lunch* (et l'hypothèse d'AOA, *no free lunch*), ce qui résume l'idée que sous cette hypothèse il n'y a pas de possibilité de gagner d'argent à coup sûr, c'est-à-dire sans prendre de risque.

Remarque : C'est encore un raisonnement d'AOA qui rend plausible l'unicité du prix de l'option. En effet nous avons choisi pour prix de l'option celui d'un portefeuille de couverture. Mais pourquoi n'y aurait-il pas une autre façon de s'y prendre qui conduirait à un prix différent, disons un prix moindre par exemple ? En réalité ce n'est pas possible car si tel était le cas, un portefeuille comprenant l'option, vendue à un prix C_0 strictement inférieur au prix du portefeuille de couverture Π_0, le portefeuille de couverture lui-même en débit et une somme $\Pi_0 - C_0$, serait une opportunité d'arbitrage comme l'indique le tableau suivant :

$t = 0$	$t = T$
C_0	C_T
$-\Pi_0$	$-\Pi_T$
$\Pi_0 - C_0$	$(\Pi_0 - C_0)e^{rT}$
0	> 0

Enfin une conséquence de l'AOA, importante dans la pratique, est la *relation de parité call-put :*

Proposition 2.4 *Considérons un call C_t et un put P_t souscrits sur le même actif sous-jacent S_t, de même date d'échéance T et même prix d'exercice K. On a la relation de parité call-put suivante :*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{r(T-t)}$$

Preuve : On applique la proposition 2.3 : les portefeuilles $\Pi_t := C_t - P_t$ et $\tilde{\Pi}_t := S_t - Ke^{r(T-t)}$ ont même valeur à l'échéance $t = T$ puisque l'on a $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$. □

Chapitre 3

Marches aléatoires. Filtration et information

A coté des modèles dynamiques *déterministes*, c'est-à-dire pour lesquels les quantités étudiées ont une évolution gouvernée par une équation différentielle ou une équation récurrente dont la connaissance fournit une prédiction *certaine* de ses valeurs futures, il existe des modèles dynamiques *stochastiques*, souvent plus pertinents ; les plus simples sont les *marches aléatoires* qui font l'objet de cette leçon. Dans le cas d'une marche aléatoire, l'évolution future d'une quantité observée, le cours d'un titre, un indice, un taux, n'est plus constituée d'une trajectoire unique mais de n trajectoires possibles dont une seule se réalisera. L'ensemble des trajectoires possibles est muni d'une probabilité qui pourrait représenter la probabilité que la trajectoire se réalise, mais ce ne sera pas notre point de vue ici, et qui représentera le prix ou le coût qu'il convient d'attacher à la réalisation de cette trajectoire en terme de risque : c'est le point de vue auquel nous a conduit l'introduction de la probabilité de calcul.

3.1 Définitions et exemples

Définition : Soient Ω un ensemble fini, $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$, $(\Omega, P, \mathcal{F})$ une espace probabilisé fini et soit $\mathbb{T} = \{0, \delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (petit). On appelle *marche aléatoire (finie)* une application (X) mesurable

$$X : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$$

Oublions provisoirement l'adjectif "mesurable" dont nous préciserons le sens plus loin et étudions tout d'abord un exemple :

Exemple : Le modèle CRR que nous avons déjà étudié fournit un premier exemple de marche aléatoire : elle modélise la dynamique de l'actif sous-jacent à une option. L'espace probabilisé fini Ω considéré est l'ensemble à 2^n élements $\Omega = \{-1, 1\}^n$; un évènement $\omega \in \Omega$ est une suite finie de ± 1 qui représentent la succession des n mouvements vers le haut (up) ou vers le bas (down) de l'actif. En introduisant la probabilité de calcul, nous avons posé, pour un $\omega \in \Omega$ qui comporte j composantes égales à $+1$ (et $(n-j)$ égales à -1),

$$P(\omega) := p^j (1-p)^{n-j},$$

faisant implicitement une hypothèse d'indépendance des accroissements sur laquelle nous reviendrons. La tribu $\mathcal{F}$ est ici simplement la tribu pleine $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. La marche aléatoire CRR, notée (S) est définie sur $\Omega \times \mathbb{T}$ par la formule suivante, lorsque ω comporte j composantes égales à $+1$ et $t = i\delta t$:

$$(\omega, t) \mapsto S_t(\omega) : := S_0 u^j d^{i-j}.$$

Il y a deux façons de voir une marche aléatoire (X) et c'est précisément ce qui fait la richesse de cette notion :

1. Si on fixe un $\omega \in \Omega$, l'application $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui à $t \in \mathbb{T}$ associe $X_t(\omega)$ est une fonction de t qu'on appelle la *trajectoire* de l'*état du monde* ω et qui représente l'une des évolutions au cours du temps

de la quantité modélisée, celle qui correspond à ω. On peut munir chaque trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ d'une probabilité en posant

$$P(t \mapsto X_t(\omega)) := P(\overline{\omega})$$

où $\overline{\omega}$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui conduisent à la même trajectoire. Une marche aléatoire peut donc être vue comme *un espace probabilisé de trajectoires*. Par exemple dans le modèle CRR à $n = 3$ étapes, l'espace Ω comporte 8 évènements élémentaires, $\omega_1 = (+1, +1, +1)$, $\omega_2 = (+1, +1, -1)$, $\omega_3 = (+1, -1, +1)$, $\omega_4 = (+1, -1, -1)$, $\omega_5 = (-1, +1, +1)$, $\omega_6 = (-1, +1, -1)$, $\omega_7 = (-1, -1, +1)$, et $\omega_8 = (-1, -1, -1)$ et il y a 8 trajectoires notées γ_i :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 u) \,;(2\delta t, S_0 u^2) \,;(3\delta t, S_0 u^3)\big) \\
\gamma_2 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 u) \,;(2\delta t, S_0 u^2) \,;(3\delta t, S_0 u^2 d)\big) \\
\gamma_3 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 u) \,;(2\delta t, S_0 ud) \,;(3\delta t, S_0 u^2 d)\big) \\
\gamma_4 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 u) \,;(2\delta t, S_0 ud) \,;(3\delta t, S_0 ud^2)\big) \\
\gamma_5 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 d) \,;(2\delta t, S_0 ud) \,;(3\delta t, S_0 u^2 d)\big) \\
\gamma_6 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 d) \,;(2\delta t, S_0 u^2) \,;(3\delta t, S_0 ud^2)\big) \\
\gamma_7 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 d) \,;(2\delta t, S_0 d^2) \,;(3\delta t, S_0 ud^2)\big) \\
\gamma_8 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 d) \,;(2\delta t, S_0 d^2) \,;(3\delta t, S_0 d^3)\big)
\end{aligned}$$

2. Si on fixe un $t \in \mathbb{T}$, l'application $\Omega \to \mathbb{R}$ qui à $\omega \in \Omega$ associe $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire ; la marche aléatoire définit donc pour chaque t une v.a.. On peut donc aussi voir une marche aléatoire comme *une famille à un paramètre t* de v.a.. Dans l'exemple du modèle CRR à 3 étapes, ces v.a. sont S_0 (qui est la v.a. certaine égale à la constante S_0), $S_{\delta t}$, $S_{2\delta t}$ et $S_{3\delta t}$ dont les lois sont données respectivement par les tableaux suivants :

$S_{\delta t}$	$S_0 d$	$S_0 u$
$P(S_{\delta t} = \cdot)$	$(1-p)$	p

$S_{2\delta t}$	$S_0 d^2$	$S_0 du$	$S_0 u^2$
$P(S_{2\delta t} = \cdot)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$S_{3\delta t}$	$S_0 d^3$	$S_0 d^2 u$	$S_0 du^2$	$S_0 u^3$
$P(S_{3\delta t} = \cdot)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

3.2 La marche de Wiener et ses dérivées

La marche aléatoire la plus utilisée est la marche de Wiener dont l'importance tient notamment au fait que sa "limite" quand δt tend vers 0 est le fameux *processus stochastique* appelé mouvement brownien. On va définir la marche de Wiener au moyen de ses accroissements.

Définition : Soit (X) une marche aléatoire (m.a.). On appelle *accroissements* de (X) la marche aléatoire définie pour tout $t \in \mathbb{T} - \{0\}$ par

$$\delta X_t := X_t - X_{t-\delta t}$$

Définition : Une m.a. (X) est dite à *accroissements indépendants* si elle est telle que les v.a. $(\delta X_t, t \in \{\delta t, \ldots, n\delta t\})$ forment une famille de v.a. indépendantes.

La plupart des m.a. que nous étudierons auront la propriété d'être à accroissements indépendants. C'est le cas par exemple de la marche CRR. A noter que, par contre, la m.a. CRR elle-même, c'est-à-dire la famille $(S_t, t \in \{0, \delta t, \ldots, n\delta t\})$, n'est pas une famille de v.a. indépendantes : ce qui est vrai pour ses accroissements n'est pas vrai pour la marche elle-même.

Notons aussi que la donnée d'une m.a. (X) à accroissement indépendants équivaut à la donnée de sa valeur à l'instant $t = 0$ et de la m.a. de ses accroissements (δX).

Définition : Soient $\Omega = \{-1, +1\}^n$, $0 < p < 1$ et $\delta t > 0$ un réel fixé. On appelle *p-marche de Wiener* (ou simplement *marche de Wiener* lorsque $p = \frac{1}{2}$) la m.a. à accroissements indépendants définie pour tout $t \in \mathbb{T} - \{0\}$ par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} W_0 & = & 0 \\ \delta W_t & = & \pm\sqrt{\delta t} \end{array} \right. \tag{3.1}$$

avec $P(\delta W_t = \sqrt{\delta t}) = p$ et $P(\delta W_t = -\sqrt{\delta t}) = 1 - p$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}(\delta W_t) = (2p-1)\sqrt{\delta t}$ et $\mathrm{Var}\,(\delta W_t) = 4p(1-p)\delta t$ (et donc $\mathbb{E}(\delta W_t) = 0$ et $\mathrm{Var}\,(\delta W_t) = \delta t$ pour $p = \frac{1}{2}$).

A partir de la marche de Wiener, on peut définir d'autres marches aléatoires :

Définition : On appelle *p-marche de Wiener avec dérive* la marche aléatoire définie par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_0 & = & x_0 \\ \delta X_t & = & \mu\delta t + \sigma\delta W_t \end{array} \right. \tag{3.2}$$

et *p-marche de Wiener géométrique* la marche aléatoire définie par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_0 & = & x_0 \\ \delta X_t & = & X_{t-\delta t}(\mu\delta t + \sigma\delta W_{t-\delta t} \end{array} \right. \tag{3.3}$$

En fait la marche de Wiener géométrique est un exemple de marche CRR pour laquelle $u = 1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}$ et $d = 1 + \mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}$. On pourra vérifier facilement que si $r = \mu$, les inégalités $0 < d < e^{r\delta t} < u$ sont satisfaites pourvu que δt soit suffisamment petit.

3.3 Filtration et information

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment associer à toute marche aléatoire une filtration et pourquoi il est naturel de considérer que cette filtration, comme le font souvent les praticiens en finance, représente l'information disponible sur le marché à un instant donné.

Soient $\Omega^1, \ldots, \Omega^m$ des parties non vides de Ω. On dit que $\mathfrak{P} := \{\Omega^1, \ldots, \Omega^m\}$ est une *partition* de Ω si et seulement si les Ω^i sont deux-à-deux disjoints et Ω est la réunion des Ω^i.

La relation $\sim$ sur Ω définie par $\omega' \sim \omega$" si et seulement si ω' et ω" appartiennent à un même $\Omega^i \in \mathfrak{P}$ est une relation d'équivalence. Réciproquement, si $\sim$ est une relation d'équivalence quelconque sur Ω, les classes d'équivalences $\overline{\omega} = \{w' \in \Omega \mid \omega' \sim \omega\}$ des éléments de Ω consituent une partition de Ω.

Définition : Lorsque Ω est l'espace probabilisé sous-jacent à une marche aléatoire (X), on peut définir sur Ω, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, des partitions, que nous noterons $\mathfrak{P}_t$, associées à la marche aléatoire, par la relation d'équivalence $\overset{t}{\sim}$ suivante :

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega\text{" si et seulement si } X_\tau(\omega') = X_\tau(\omega\text{"}) \text{ pour tout } \tau \in [0..t]$$

En d'autres termes, deux états du monde sont é*quivalents jusqu'à l'instant* t si les trajectoires qui leurs sont associées coïncident jusqu'à l'instant t.

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on a :

- si $t = 0$, $\mathfrak{P}_0 = \{\Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathfrak{P}_{\delta t} = \{\Omega^1 = \{w_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \Omega^2 = \{w_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathfrak{P}_{2\delta t} = \{\Omega^{11} = \{w_1, \omega_2\}, \Omega^{12} = \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega^{21} = \{w_5, \omega_6\}, \Omega^{22} = \{\omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathfrak{P}_{3\delta t} = \{\{w_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{w_5\}, \{\omega_6\}, \{\omega_7\}, \{\omega_8\}\}$.

Définition : Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{F}$ une tribu de parties de Ω. On appelle *atome* de $\mathcal{F}$ tout élément de $\mathcal{F}$ qui ne contient pas d'autre élément de $\mathcal{F}$ que lui même et l'ensemble vide.

On démontre facilement la proposition suivante en appliquant les définitions de partition et de tribu :

Proposition 3.1 *Dans un ensemble Ω fini, on peut associer à toute partition $\wp$ la tribu engendrée par les éléments Ω^i de la partition et réciproquement on peut associer à toute tribu la partition formée par ses atomes.*

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on peut associer à chaque partition $\wp_t$, une tribu, notée $\mathcal{F}_t$:

- si $t = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathcal{F}_{\delta t} = \{\phi, \Omega^1, \Omega^2, \Omega\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathcal{F}_{2\delta t} = \{\phi, \Omega^{11}, \Omega^{12}, \Omega^{21}, \Omega^{22}, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^{11} \cup \Omega^2, \dots, \Omega\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathcal{F}_{3\delta t} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Et on a évidemment $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \mathcal{F}_{2\delta t} \subset \mathcal{F}_{3\delta t}$. Cette suite croissante de tribus est appelée une *filtration.*

En généralisant l'exemple précédent, on comprend facilement qu'il est possible d'associer à toute marche aléatoire (X) une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ définie de la façon suivante : pour un t donné, les atomes de la tribu $\mathcal{F}_t$ sont constitués des états du monde $\omega \in \Omega$ auxquels sont associés des trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant t.

Lorsque $t = 0$, l'information dont on dispose est que l'un des états du monde $\omega \in \Omega$ va se réaliser (mais on ne sait pas lequel). A l'instant $t = \delta t$, l'actif que l'on modélise à fait soit un mouvement vers le haut soit un mouvement vers le bas et donc on sait, ayant pu observer cette évolution, que l'état du monde qui se réalisera appartient à Ω^1 ou bien à Ω^2. Et à l'instant $t = 2\delta t$, on saura qu'il appartient à Ω^{11}, Ω^{12}, Ω^{21} ou Ω^{22}, et ainsi de suite. A chaque nouvelle étape l'information dont on dispose sur l'actif observé augmente et on peut mesurer la finesse de cette information par la partition $\wp_t$ ou bien, ce qui revient au même, par la tribu $\mathcal{F}_t$. La suite de ces tribus, $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ représente donc *l'information dont on dispose à la date t en observant le marché.*

La raison pour laquelle on parle plus souvent de la filtration des tribus $\mathcal{F}_t$ plutot que de la famille des partitions $\wp_t$ est que, lorsqu'on voudra remplacer les modèles finis étudiés ici par des modèles continus, où Ω est supposé infini, la filtration continuera à être bien définie alors que la partition ne le sera plus.

Chapitre 4

Espérance conditionnelle

Dans les leçons précédentes nous avons appris à calculer le prix de diverses options à l'instant $t = 0$. Les options étant des actifs financiers négociables, qu'on veut pouvoir acheter et vendre aussi à des instants ultérieurs, on voudrait également savoir calculer leur prix à des instants $t > 0$. C'est ce que nous allons faire dans cette leçon grâce à la notion d'*espérance conditionnelle par rapport à une tribu.* On découvrira au passage que cette espérance conditionnelle, qui généralise l'espérance conditionnelle usuelle d'une variable aléatoire par rapport à un évènement, est en fait un extraordinaire outil de calcul, un de ceux qui font que la théorie des probabilités s'appelle souvent le *calcul* des probabilités.

4.1 Espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement

Voici tout d'abord quelques rappels de probabilités élémentaires. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé que nous supposerons comme précédemment *fini* et satisfaisant en outre la condition suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, P(\omega) \neq 0.$$

Soit X une variable aléatoire sur Ω. L'espérance de X est le *nombre* $\mathbb{E}\,(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$. Notons que, pour tout évènement $A \subseteq \Omega$ appartenant à la tribu $\mathcal{T}$, on peut exprimer la probabilité de A comme l'espérance d'une v.a., en posant $P(A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) = \mathbb{E}\,\mathbb{I}_A$, où $\mathbb{I}_A$ désigne l'indicatrice de A, égale à 1 sur A et 0 sinon.

Plus généralement, on appelle “espérance de X sachant A” ou “espérance de X conditionnellement à A”, le *nombre*, notée $\mathbb{E}(X/A)$, donné par

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{P(A)} \sum_{\alpha \in A} X(\alpha)P(\alpha) = \frac{\mathbb{E}\,X\mathbb{I}_A}{\mathbb{E}\,\mathbb{I}_A}.$$

En d'autres termes $\mathbb{E}(X/A)$ est la moyenne, pondérée par les probabilités des éléments de A rapporté à la probabilité de A, des $X(\alpha)$ pour $\alpha \in A$.

Nous insistons sur le fait que l'espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement est un nombre. L'espérance conditionnelle par rapport à une tribu, que nous allons introduire à présent, n'est pas *un* nombre, mais “un nombre qui dépend de l'état du monde”, c'est-à-dire une variable aléatoire.

4.2 Espérance conditionnelle d'une v.a. par rapport à une tribu

Soient $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$ une tribu et $\mathfrak{P} := \{\Omega_1, \ldots, \Omega_m\}$ la partition de Ω formée par les atomes de $\mathcal{F}$.

Définition : Soit X est une v.a. sur Ω. On appelle *espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$*, ou encore *espérance conditionnelle de X relativement à la partition $\mathfrak{P}$*, la v.a. notée $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{F})(\omega) := \mathbb{E}[X/\overline{\omega}] = \frac{1}{P(\overline{\omega})} \sum_{\alpha \in \overline{\omega}} X(\alpha)P(\alpha)$$

où $\overline{\omega}$ désigne l'atome $\Omega_i \in \mathfrak{P}$ de la partition tel que $\omega \in \Omega_i$.

On voit donc que par définition l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu $\mathcal{F}$ est une v.a. constante sur les atomes Ω_i de la partition associée à $\mathcal{F}$. On a plus précisément :

Proposition 4.1 *La v.a. $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}$ et de plus si Y désigne cette v.a., ($Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{F})$), alors Y peut être définie comme l'unique v.a. $\mathcal{F}$-mesurable telle que*

$$\forall \Omega_i \in \mathfrak{P} \quad , \quad \mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i). \tag{4.1}$$

Preuve : Le fait que $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ soit mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}$ est clair par définition puisqu'elle est constante sur les atomes de la partition $\mathfrak{P}$.

Montrons qu'elle vérifie l'équation (4.1) : on a

$$\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \frac{1}{P(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} Y(\alpha) P(\alpha) = \frac{1}{P(\Omega_i)} Y(\omega) \sum_{\omega \in \Omega_i} P(\omega) = Y(\omega)$$

où ω est un élément quelconque de l'atome Ω_i, puisque Y est constante sur les atomes. D'autre part, on a :

$$\mathbb{E}(X/\Omega_i) = \frac{1}{P(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} X(\alpha) P(\alpha) = Y(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega_i$, par définition de Y. Réciproquement si Y est $\mathcal{F}$-mesurable, la relation $\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i)$ définit Y uniquement car, pour tout $\omega \in \Omega$, on posera $Y(\omega) := \mathbb{E}(X/\Omega_i)$, où Ω_i est l'atome contenant ω. □

Voici les principales propriétés de l'espérance conditionnelle :

Proposition 4.2 *Soient X et Y des v.a. sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des sous-tribus de T, x_0, a et b des nombres réels. On a :*

1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{T}) = X$, *et* $\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(X)$.
2. $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.
3. *Si* $X \geq 0$, *on a* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$, *avec égalité si et seulement si* $X = 0$.
4. $\mathbb{E}(x_0|\mathcal{F}) = x_0$.
5. *Si* Y *est* $\mathcal{F}$*-mesurable, on a* $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
6. *Si* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, *on a* $\mathbb{E}(\ \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \ | \ \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. *En particulier* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$.

Cette sixième propriété s'appelle la transitivité des espérances conditionnelles. Elle est d'un usage fréquent en finance.

4.3 L'espace euclidien $L^2(\Omega)$

On désigne par $L^2(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires sur Ω dans le cas où on munit cet ensemble d'une structure euclidienne (c'est-à-dire d'un produit scalaire) que nous allons définir à présent. Cet espace de v.a. joue un rôle fondamental en économétrie et en calcul stochastique.

Tout d'abord, il est facile de munir l'ensemble des v.a. sur Ω d'une structure d'espace vectoriel : si X et Y sont deux éléments de cet ensemble, $X + Y$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX sont encore des v.a. sur Ω. D'autre part on peut définir un produit scalaire sur cet ensemble de la façon suivante :

$$< X, Y > := \mathbb{E}(XY) \tag{4.2}$$

et la norme associée par :

$$\|X\|^2 := \mathbb{E}(X^2)$$

En effet on vérifie facilement la bilinéarité et la symétrie ; de plus on a $\|X\| \geq 0$ puisque X^2 est une v.a. positive ou nulle ; enfin, si $\|X\| = 0$, alors $X = 0$ car $\mathbb{E}(X^2)$ est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs (puisque $P(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) des nombres positifs.

On vérifie sans peine que l'on a $\mathbb{E}(X) =< X, 1 >$, $Cov(X,Y) =< X - \mathbb{E}(X), Y - \mathbb{E}(Y) >$ et donc $Var(X) =< X - \mathbb{E}(X), X - \mathbb{E}(X) >= \|X - \mathbb{E}(X)\|^2$.

L'espace $L^2(\Omega)$ des variables aléatoires sur Ω, muni du produit scalaire (4.2), est donc bien un espace euclidien. On sait que dans un espace euclidien on peut associer à tout vecteur sa projection orthogonale sur un sous espace. Rappelons la définition de la projection orthogonale :

Définition : Soient $G \subseteq L^2(\Omega)$ un sous espace vectoriel et $X \in L^2(\Omega)$ un vecteur quelconque. On appelle *projection orthogonale* de X sur G, notée $\pi(X)$ l'unique élément de G tel que

$$\forall Z \in G \ , \ < X - \pi(X), Z >= 0$$

On peut vérifier facilement que si $\mathcal{F}$ est une tribu alors l'ensemble des v.a. de $L^2(\Omega)$ $\mathcal{F}$-mesurables forment un sous espace vectoriel. En effet, si X et Y sont deux v.a. $\mathcal{F}$-mesurables, donc constantes sur les atomes de la partition associée à la tribu $\mathcal{F}$, toute combinaison linéaires $\lambda X + \mu Y$, pour λ et μ réels quelconques, est encore $\mathcal{F}$-mesurable.

Proposition 4.3 *Soient X une v.a. et $\mathcal{F}$ une tribu. L'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\mathcal{F}$ est la projection orthogonale de X sur le sous espace G des v.a. $\mathcal{F}$-mesurables.*

Preuve : Soit $Z \in G$. En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle du théorème 4.2, on a :

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XZ/\mathcal{F}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F})Z)$$

donc $< X - \mathbb{E}(X/\mathcal{F}), Z >= \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F})Z) = 0$. □

4.4 Application au calcul de prix d'options

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une marche aléatoire et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ la filtration associée ; rappelons que la filtration associée à une m.a. est par définition la suite croissante de tribus

$$\{\phi, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

définie de la façon suivante : pour chaque $t \in \mathbb{T}$,les atomes de la tribu $\mathcal{F}_t$ sont les classes d'équivalence pour la relation :

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega" \text{ si et seulement si } X_\tau(\omega') = X_\tau(\omega") \text{ pour tout } \tau \in [0..t].$$

Un exemple de la filtration associée à la marche CRR ést détaillé à la fin de la leçon 3.

On a vu ci-dessus comment associer à une v.a. X son espérance par rapport à une tribu, $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{F})$. Si l'on dispose non plus d'une seule tribu mais de toute une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, on peut associer alors, à toute v.a. X, une famille, indéxée par $t \in \mathbb{T}$, de variables aléatoires $Y_t := \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$, c'est-à-dire une nouvelle marche aléatoire $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Prenons l'exemple d'une option enropéenne standard $(T, \varphi(S_T))$ souscrite sur une actif $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. La fonction de paiement $X := \varphi(S_T)$ est une v.a. sur l'ensemble des états du monde Ω sur lesquel est définie la m.a. (S_t). On peut donc associer à l'option une nouvelle m.a. donnée par $Y_t := \mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$. Que représente Y_t par rapport à $X = \varphi(S_T)$? Pour chaque état du monde $\omega \in \Omega$, $Y_t(\omega)$ est l'espérance conditionnelle de X sachant $\overline{\omega}$, où $\overline{\omega}$ désigne l'atome de la tribu $\mathcal{F}_t$, c'est-à-dire l'ensemble des états du monde correspondant à des trajectoires de la marche (S_t) qui coïncident jusqu'à l'instant t. En d'autres termes, $Y_t(\omega)$ est la moyenne des paiements attendus sur toutes les trajectoires qui coïncident avec ω jusqu'à l'instant t, ou la moyenne des paiements futurs sachant la trajectoire S_t jusqu'à l'instant t, c'est-à-dire connaissant l'information jusqu'à t. Notons que l'on a $\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_T) = \varphi(S_T)$ et $\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\varphi(S_T))$.

Utilisant la notion d'espérance conditionnelle par rapport aux tribus d'une filtration, il est possible de calculer le prix d'une option, non seulement à l'instant $t = 0$ mais à tout instant $t \in \mathbb{T}$: c'est la *formule fondamentale* qui généralise celle donnée précédemment pour $t = 0$.

Proposition 4.4 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où l'actif risqué S_t suit un modèle CRR et l'actif sans risque est donné par $B_t := e^{rt}$, le prix d'une option d'échéance T et de fonction de paiement $\varphi(S_T)$ est la marche aléatoire $(C_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définie pour tout $t \in \mathbb{T}$ par*

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t) \tag{4.3}$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est la filtration associée à la m.a. CRR $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et où l'espérance conditionnelle est calculée sous la probabilité de calcul p définie par $p = \frac{e^{r\delta t}-d}{u-d}$.

Une conséquence importante de cette proposition est que la m.a. $(C_t)_{t\in\mathbb{T}}$, prix de l'option à l'instant t selon les états du monde possède la propriété suivante : pour tout $t \in \mathbb{T}$, la v.a. C_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est la filtration associée à l'actif sous-jacent $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. On a même plus précisément l'existence d'une fonction (déterministe) $C(t, S)$ telle que $C_t = C(t, S_t)$, pour tout t et tout état du monde. On peut représenter le graphe de cette fonction comme un *filet*, c'est-à-dire une fonction définie au dessus de chaque noeud de l'arbre (t, S_t) formé des diverses valeurs prises par les trajectoires de la marche $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Sur la figure ci-dessous, on a représenté ce filet dans le cas d'une option Call ; on peut voir que sa section verticale à l'instant $t = T$ est bien le graphe du paye off d'un Call $(S - K)^+$ et sa section à l'instant $t = 0$ est un point C_0, l'écart vertical au point représentant S_0, d'ordonnée nul représentant la prime de l'option, c'est-à-dire son prix initial.

Chapitre 5

Martingales

Intuitivement, une martingale est une marche aléatoire n'ayant ni tendance haussière ni tendance baissière, sa valeur à chaque instant étant égale à l'espérance de ses valeurs futures. On utilise des marches aléatoires ayant cette propriété pour modéliser le prix des actifs financiers car un prix de marché est un nombre sur lequel deux parties, celle qui achète et celle qui vend, tombent d'accord ; si le prix avait une tendance à la hausse, le vendeur n'aurait pas accepté la transaction et inversement s'il avait une tendance à la baisse c'est l'acheteur qui l'aurait refusé. Donc il est naturel de supposer qu'un *fair-price* a la propriété de martingale. Cela n'entraine nullement que le prix ne varie pas car, selon l'état du monde qui se réalise, il augmente effectivement ou bien diminue. Mais lorsque l'on prend en compte l'ensemble des états du monde possibles, il est raisonnable de supposer que sa variation espérée est nulle. Biensur, les véritables variations du prix qui interviendront dans la réalité, et qui dépendent de l'état du monde, seront certainement non nulles. D'ailleurs, c'est parce que les deux parties n'ont pas les mêmes anticipations sur l'état du monde qui va se réaliser que la transaction a lieu.

La notion de martingale joue aujourd'hui un rôle central en finance mathématique[1] ; elle était déja présente dans la thèse de Louis Bachelier en 1900 mais elle n'a commencé à être étudiée systématiquement par les mathématiciens que vers 1940, notamment par P. Levy et J.L. Doob, et plus tard par l'école de probabilités de Strasbourg, notamment P.A. Meyer.

5.1 Définition et exemples

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé fini et soit $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration de Ω.

Définition : On dit qu'une m.a. $M := (M_t)_{t\in[0..T]_{\delta t}}$ est une $\mathcal{F}$-*martingale* (mtg) si et seulement si

$$\text{pour tous } s \leq t,\ M_s = \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s). \tag{5.1}$$

Observons qu'il résulte de la définition de l'espérance conditionnelle, qu'une $\mathcal{F}$-martingale est nécessairement une marche aléatoire $\mathcal{F}$-adaptée, c'est-à-dire que, pour tout t, la v.a. M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

La proposition suivante donne trois autres caractérisations de la propriété de martingale, souvent utiles, qui découlent également des propriétés de l'espérance conditionnelle. On utilise, comme précédemment, la notation $\mathbb{E}_s X := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s)$.

Proposition 5.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *M est une martingale.*
2. *Pour tout $s \in \mathbb{T}$, $M_s = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t})$.*
3. *Pour tout $s \in \mathbb{T}$, $\mathbb{E}_s(\delta M_{s+\delta t}) = 0$, où $\delta M_{s+\delta t} := M_{s+\delta t} - M_s$.*
4. *Pour tout $s \leq t$ dans $\mathbb{T}$, $\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = 0$.*

[1] Voir le livre de Nicolas Bouleau, *Martingales et marchés financiers*, Editions Odile Jacob, 1998

Preuve : On fait une démonstration "circulaire" : la propriété 1 entraine évidemment 2 et si la propriété 2 est vraie, on a :

$$\mathbb{E}_s(M_{s+\delta t} - M_s) = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t}) - M_s = M_s - M_s = 0.$$

D'où la propriété 3. Si celle-ci est vraie, alors

$$\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = \mathbb{E}_s(\sum_{\tau=s}^{t-\delta t}(M_{\tau+\delta t} - M_\tau)) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t}\mathbb{E}(\delta M_{\tau+\delta t}) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t}\mathbb{E}_s(\mathbb{E}_\tau(\delta M_{\tau+\delta t})) = 0.$$

D'où la propriété 4. On vérifie enfin que la propriété 4 implique à son tour la propriété 1 car $M_s - \mathbb{E}_s(M_t) = \mathbb{E}_s(M_s - M_t) = 0$. □

Exemples :

1. Le premier exemple est celui de la p-marche de Wiener $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ pour laquelle on a par définition :

$$\mathbb{E}(\delta W_t) = p\sqrt{\delta t} + (1-p)(-\sqrt{\delta t}) = (2p-1)\sqrt{\delta t}.$$

   Donc c'est une martingale (par rapport à la filtration qui lui est associée) si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

2. Le second exemple est celui de la marche aléatoire de Cox, Ross et Rubinstein $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ qui modélise le prix d'un actif financier à l'instant t. Si l'on veut trouver une probabilité $p = P(S_{t+\delta t}/S_t = u)$ telle que sa valeur actualisée soit une martingale : plus précisément, on aura, si r désigne le taux d'escompte monétaire, supposé constant, et $\tilde{S}_t$ le prix actualisé,

$$\tilde{S}_t := e^{-rt}S_t,$$

   on aura les relations suivantes que doit satisfaire p :

$$\mathbb{E}_t(\tilde{S}_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)}\mathbb{E}(S_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)}(pS_t u + (1-p)S_t d) = e^{-r\delta t}(pu + (1-p)d)\tilde{S}_t.$$

   Donc $\tilde{S}_t$ est une $\mathcal{F}$-martingaele *ssi* $pu + (1-p)d = e^{r\delta t}$. On retrouve la probabilité de calcul introduite pour évaluer le prix d'options :

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}.$$

   Dans le modèle CRR, la probabilité de calcul est donc l'unique probabilité pour laquelle la valeur actualisée de l'actif sous-jacent est une martingale.

3. Le troisième exemple est celui d'une martingale fermée par une v.a. : si X est une v.a. sur un espace probabilisé muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, la marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définie par $X_t := \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$ est, par construction, une martingale. De façon générale, on dit qu'une $\mathcal{F}$-martingale M_t est une martingale *fermée par la v.a.* X si elle s'écrit $M_t := \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$ pour une certaine v.a. X. C'est une façon naturelle de construire une martingale et c'est ce que nous avons fait à travers la fomule fondamentale pour la marche $\tilde{C}_t$. Nous avons vu en effet que

$$C_t = e^{r(T-t)}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$$

   ce qui s'écrit encore $e^{rt}C_t = \mathbb{E}(e^{rT}\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$. Ainsi la formule fondamentale indique qu'à tout instant t, le prix actualisé $\tilde{C}_t$ d'une option européenne $(T, \varphi(S_T))$ est la martingale fermée par la v.a. $\varphi(\tilde{S}_T)$.

5.2 Quelques propiétés

La propriété la plus importante des martingales est qu'elles ont un espérance constante :

Proposition 5.2 *Si $(M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale, alors $t \mapsto \mathbb{E}(M_t)$ est constant et pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$. En particulier si M_0 est une v.a. constante, égale au nombre M_0, on a pour tout t, $\mathbb{E}(M_t) = M_0$.*

De cette proposition appliquée à la martingale $(\tilde{C}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, on déduit immédiatement que la valeur de la prime C_0 est l'espérance du paye off $\tilde{C}_T = \varphi(\tilde{S}_T)$.

Définition : On dit qu’une m.a. $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\mathcal{F}$-*sous*[2]*-martingale* (*ss*-mtg) si et seulement si X est $\mathcal{F}$-adaptée et

$$\text{pour tous } s \le t,\ X_s \le \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s). \tag{5.2}$$

On définit de façon analogue les $\mathcal{F}$-*surmartingales*. Evidemment une m.a. qui est à la fois une sur- et une sousmartingale est une martingale.

Théorème 5.3 *Toute sousmartingale $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ admet une décomposition en*

$$X_t = M_t + A_t$$

où M_t est une martingale telle que $M_0 = X_0$ et A_t une m.a. croissante (pour tout t, $A_t \le A_{t+\delta t}$) et prévisible, c’est-à-dire telle que $A_{t+\delta t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Cette décomposition est appelée décomposition de Doob-Meyer.

Preuve : Dans le cas où l’espace probabilisé Ω est fini (ce qui est le contexte choisi pour ce cours), ce théorème est facile à montrer : il suffit de poser $\delta M_{t+\delta t} := X_{t+\delta t} - \mathbb{E}_t(X_{t+\delta t})$ avec $M_0 = X_0$ et $\delta A_{t+\delta t} := \mathbb{E}_t(X_{t+\delta t}) - X_t$ avec $A_0 = 0$ et de vérifier que M_t et A_t ont bien les propriétés requises. $\square$

5.3 Calcul des “pertes et profits” d’un portefeuille

On a rencontré au paragraphe précédent la notion de processus prévisible dont nous dégageons à présent la définition :

Définition : Une marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dite prévisible par rapport à une filtration $\mathcal{F}$ *ssi*, pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_{t-\delta t}$-mesurable.

Si l’on se souvient qu’une v.a. est $\mathcal{F}_{t-\delta t}$-mesurable lorsqu’elle *est connue* dès qu’on connait l’information dont on dispose à l’instant $t-\delta t$, information représentée par la tribu $\mathcal{F}_{t-\delta t}$, on comprend pourquoi cette propriété s’appelle la prévisibilité. L’exemple typique de m.a. prévisible que nous considérerons est la m.a. α_t qui représente la composition en actif sous-jacent d’un portefeuille de couverture d’une option. En effet on supposera cette composition choisie à l’instant $t-\delta t$ au vu du prix atteint par l’actif sous-jacent à cet instant et maintenue inchangée jusqu’à l’nstant t, date à laquelle le détenteur du portefeuille réajuste sa position au vu de la nouvelle valeur atteinte par l’actif sous-jacent à cette date.

Nous allons voir à présent que généralement, le fait que les actifs risqués qui composent un portefeuille soient des martingales, entraine qu’il en est de même de la valeur du portefeuille. Ceci fournit une nouvelle preuve du fait que la valeur actualisée de l’option (qui par définition est le prix d’un portefeuille de couverture) soit une martingale.

Ce résultat important est en fait valable non seulement lorqu’on ne dispose que de deux actifs, l’un risqué et l’autre non risqué, mais plus généralement lorsque l’on dispose de $d+1$ actifs, d’où la généralisation proposée maintenant.

Définition : Un *marché financier* est la donnée de $(d+1)$ marches aléatoires $(S^1_t, \dots, S^d_t\,; B_t)$ définies sur le même espace probablisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ muni d’une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, telles que :

- $(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est déterministe (par exemple $B_t = e^{rt}$) : elle modélise un actif non risqué.
- $(S^1_t)_{t\in\mathbb{T}}, \dots, (S^d_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont $\mathcal{F}$-adaptées : elles modélisent d actifs risqués.

Dans un tel marché financier, on appelle *portefeuille* $\Pi = (\Pi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (ou *stratégie de portefeuille*) une famille de $d+1$ m.a. prévisibles $\Pi_t = (\alpha^1_t, \dots, \alpha^d_t\,; \beta_t) = (\alpha_t\,; \beta_t)$ et *valeur* du portefeuille (ou de la stratégie) Π la quantité

$$V^\pi_t = \alpha^1_t S^1_t + \ldots + \alpha^d_t S^d_t + \beta_t B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t$$

Il est utile d’introduire, à coté des prix des actifs ou des portefeuilles leurs *prix actualisés*, de façon à pouvoir comparer leurs valeurs à des instants t différents. On désigne par $\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}$ et $\tilde{V}^\pi_t := \frac{V^\pi_t}{B_t}$ ces valeurs actualisées. On a alors

$$\tilde{V}^\pi_t = \alpha_t \cdot \tilde{S}_t + \beta_t.$$

[2]retenir que toute valeur X_s de la marche est “sous” ($\le$) l’espérance (conditionnelle) de toute valeur future ($\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$).

Remplacer dans les calculs les prix des actifs S_t^i par leurs valeurs actualisées $\tilde{S}_t^i$ correspond à ce que l'on appelle parfois "travailler en Francs constants" c'est-à-dire choisir comme numéraire le prix de l'actif non risqué B_t et donc exprimer les autres prix en fonction de celui-ci. On supposera aussi désormais que $B_0 = 1$.

Une propriété importante des portefeuilles que nous considérons, que possèdent notamment les portefeuilles destinés à couvrir une option, est d'être autofinancés, c'est-à-dire que, lors de la recomposition à chaque instant $t \in \mathbb{T}$, les modifications se font sans apport ni retrait de fonds. Cette propriété s'exprime par l'identité suivante :

Définition : Un portefeuille $\Pi_t = (\alpha_t \,; \beta_t)$ est dit *autofinancé ssi* pour tout $t = \delta t, \ldots, T$, on a :

$$\alpha_{t-\delta t} \cdot S_t + \beta_{t-\delta t} B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t.$$

Une autre façon d'évaluer la valeur d'un portefeuille autofiancé est d'étudier ses "pertes et profits", c'est-à-dire la somme accumulée des gains et pertes réalisés, en raison des variations de la valeur des actifs qui le composent.

Définition : On appelle *pertes et profits*, noté $P\&P_t$, d'un portefeuille $\Pi_t = (\alpha_t \,; \beta_t)$ la quantité

$$P\&P_t := \sum_{s=\delta t}^{t} \alpha_s (\delta \tilde{S}_s).$$

Proposition 5.4 *Pour un portefeuille autofinancé, on a la propriété suivante :*

$$\tilde{V}_t^\pi = V_0^\pi + P\&P_t$$

Preuve : En effet on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t^\pi &= \frac{V_t^\pi}{B_t} = \sum_{s=\delta t}^{t} \frac{1}{B_s}(V_s^\pi - V_{s-\delta t}^\pi) \\
&= \frac{V_0^\pi}{B_0} + \sum_{s=\delta t}^{t} \frac{1}{B_s}(\alpha_s \cdot S_s + \beta_s B_s - \alpha_{s-\delta t} \cdot S_{s-\delta t} + \beta_{s-\delta t} B_{s-\delta t}) \\
&= V_0^\pi + \sum_{s=\delta t}^{t} (\alpha_{s-\delta t} \cdot \delta \tilde{S}_s) + \sum_{s=\delta t}^{t} (\beta_{s-\delta t} \delta \tilde{B}_s) = V_0^\pi + P\&P_t
\end{aligned}$$

car la dernière somme est nulle (en *francs constants*, le numéraire ne varie pas dans le temps). □

Si l'on suppose que $\tilde{S}_t$ est une martingale, la somme $\sum_{s=\delta t}^{t} \alpha_s (\delta \tilde{S}_s)$ s'appelle la *transformée de la martingale* $\tilde{S}_t$ par la marche aléatoire prévisible α_t. Cette somme est une version discrète de l'intégrale stochastique de la marche α_t contre les variations de la martingale $\tilde{S}_t$. La proposition suivante montre que cette somme est elle-même une martingale :

Proposition 5.5 *Soit* $(H_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *une m.a.* $\mathcal{F}$*-prévisible et soit* $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *une* $\mathcal{F}$*-martingale. Alors la m.a.* $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *définie de la façon suivante est une martingale :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 &=& H_0 M_0 \\ \delta X_t &=& H_t \delta M_t \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Preuve : On a les égalités $\mathbb{E}_t(X_{t+\delta t} - X_t) = \mathbb{E}_t(H_{t+\delta t} \delta M_{t+\delta t}) = H_{t+\delta t} \mathbb{E}_t(\delta M_{t+\delta t}) = 0$. □

En appliquant cette proposition au prix d'un portefeuille de couverture autofinançant, qui est égal à sa valeur initiale plus ses pertes et profits, on déduit que $\tilde{V}_t^\pi$ est une martingale et donc que $V_0^\pi = \mathbb{E}(\tilde{V}_T^\pi)$.

5.4 Le cas des marchés incomplets

On a vu que lorsqu'on modélise les actifs financiers par des m.a. CRR avec la condition d'abscence d'oportunité d'arbitrage $d < R < u$, on peut construire, pour toute option européenne $(T, \varphi(S_T))$, un portefeuille autofinançant qui couvre l'option. On dit aussi de ce portefeuille qu'il *duplique* l'option puisque son prix est, à chaque instant, égal à celui de l'option, ou bien que celle-ci est *duplicable*.

Définition : Si Φ est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable, on dit que Φ est *duplicable* s'il existe un portefeuille autofinançant tel que $V_T^\pi = \Phi$.

Si l'on choisit d'autres modèles que des modèles CRR pour décrire les actifs présents sur le marché, rien n'indique, à priori, que n'importe quelle option Φ souscrite sur un de ces actifs, sera duplicable. Un marché où toute option est duplicable s'appelle un *marché complet*. Sinon, on parle de marché *incomplet*.

Une question naturelle se pose : comment calculer le prix d'une option (non nécessairement duplicable) dans un marché incomplet ? Nous allons voir que, sous certaines hypothèses (marché viable), on peut encore proposer un prix mais il n'est pas unique, c'est en réalité un intervalle de prix possibles que l'on obtient alors.

Définition : Etant donnée une option Φ souscrite sur un actif S_t, on appelle *portefeuille de surcouverture* (respectivement *de souscouverture*) tout portefeuille autofinancé Π_t tel que $V_T \geq \Phi$ (respectivement tel que $V_T \leq \Phi$) et on désigne par $\mathcal{P}^*(x, \Phi)$ (respectivement $\mathcal{P}_*(x, \Phi)$) l'ensemble des portefeuilles de surcouverture (respectivement de souscouverture) pour Φ de valeur initiale $V_0^\pi = x$.

Enfin on désigne par C^* et C_* les quantités

$$C^*(\Phi) := \begin{cases} \mathrm{Inf}\,\{x \geq 0, \exists \pi \in \mathcal{P}^*(x, \Phi)\} & \text{si } \{x \geq 0, \exists \pi \in \mathcal{P}^*(x, \Phi)\} \neq \phi \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$C_*(\Phi) := \begin{cases} \mathrm{Inf}\,\{x \geq 0, \exists \pi \in \mathcal{P}_*(x, \Phi)\} & \text{si } \{x \geq 0, \exists \pi \in \mathcal{P}_*(x, \Phi)\} \neq \phi \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition : Un marché est *viable* s'il existe une probabilité P sur Ω telle que tous les actifs risqués actualisés $(S_t^1/B_t)_{t\in\mathbb{T}}, \ldots, (S_t^d/B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ soient des martingales pour P.

Remarque : Le fait que pour le modèle CRR il existe une unique probabilité pour laquelle l'actif S_t soit une martingale (appelée probabilité de calcul) ne doit pas donner à penser qu'en général une telle probabilité est unique. Ainsi dans son livre[3], Pliska donne l'exemple suivant d'un modèle incomplet à une étape : à l'instant initial, l'actif vaut $S_0 = 5$ et, à l'instant final, $\tilde{S}_{\delta t} = \tilde{S}_T$ peut prendre l'une des trois valeurs 6, 4, ou 3. Si l'on désigne par p_1, p_2 et p_3 les probabilités respectives de ces trois éventualités. On suppose $p_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, 3$ et on a biensur $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. De plus l'actif est une martingale *ssi* $5 = 6p_1 + 4p_2 + 3p_3$. Ces conditions sont équivalentes à

$$\begin{cases} p_2 &= 2 - 3p_1 \\ p_3 &= -1 + 2p_1 \end{cases} \tag{5.4}$$

avec $\frac{1}{2} < p_1 < \frac{2}{3}$. Donc l'ensemble des probabilités de martingale pour $(\tilde{S}_t)$ est le segment $\{(p_1, p_2, p_3) = (\lambda, 2 - 3\lambda, -1 + 2\lambda), \lambda \in]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[\}$.

Théorème 5.6 *Dans un marché financier viable, on a nécessairement pour toute option Φ souscrite sur un actif du marché, l'inégalité $C_*(\Phi) \leq C^*(\Phi)$, avec égalité $C_*(\Phi) = C^*(\Phi)$ si et seulement si l'option est duplicable. Tout prix $C < C_*(\Phi)$ est un prix d'arbitrage pour le vendeur et tout prix $C > C^*(\Phi)$ est une prix d'arbitrage pour l'acheteur ; l'intervalle $[C_*(\Phi), C^*(\Phi)]$ fournit donc l'ensemble des prix acceptables pour les deux parties. De plus, si P est une probabilité pour laquelle la valeur actualisée de l'actif sous-jacent à Φ, $(\tilde{S}_t)$, est une martingale, alors on a $\mathbb{E}^P(\tilde{\Phi}) \in [C_*(\Phi), C^*(\Phi)]$.*

[3] S. R. Pliska *Introduction to mathematical finance, Discrete time models*, Blackwell, 1997.