Marches aléatoires
et applications à la finance

Marc et Francine DIENER

14 février 2000

Table des matières

[1]

[1]Notes du cours de Licence Mass de Marc et Francine Diener à l'Université de Nice-Sophia-Antipolis sur les *marches aléatoires appliquées à la finance*. Ce cours avait été précédemment assuré par Imme van den Berg. Nous reprenons de nombreuses idées introduites alors.

Chapitre 1

Contrats d'option et leur couverture

1.1 Options européennes

Notons S_t la cote (le prix), à l'instant t, d'un actif sur un marché donné.

L'exemple le plus naturel d'actif est sans doute celui d'une action cotée en bourse, comme l'action Micsft ou Netscp sur le NASDAQ ou AmOnLne sur le NYSE. Mais cela peut aussi être le cours d'une matière première ou d'un produit agricole tel 50.000 livres de boeuf sur le marché de Chicago.

Nous verrons au chapitre 3 (et les suivants) un modèle mathématique pour $S = (S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Nous pouvons néanmoins poser dès à présent la définition suivante : On appelle *option* (européenne) sur S, de date d'échéance T, un contrat souscrit à la date $t = 0$, assurant au souscripteur, le paiement d'une somme $\varphi(S_T)$, où φ est une fonction donnée.

L'option Call est l'option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d'échéance T, l'actif S à un prix maximal K ; on a donc $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$, où x^+ vaut x si $x > 0$ et 0 sinon. L'option Put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date T, l'actif S au prix minimum K ; on a donc $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$. Le nombre K s'appelle le *prix d'exercice* (ou *strike*) de l'option.

On retrouvera, à la figure 1.1 la description des deux options les plus courantes : l'option *Call* et l'option *Put*. Les contrats d'option sur actions ont eux-même fait l'objet d'une négociation en bourse au début des années 70 sur le Chicago Board of Trade (CBOT). Il y a donc également un prix de marché des options telles que le Call et le Put.

Le propre d'un contrat d'option tient à ce que, à la date $t = 0$ de souscription, la valeur de S_T n'est pas connue. Il convient de comprendre un tel contrat comme un contrat d'assurance. Le vendeur de l'option est l'assureur, l'acheteur l'assuré : il s'agit d'un contrat de transfert de risque moyennant un prix. A la différence des contrats d'assurance de sinistre pouvant intervenir avec une probabilité et où l'assureur réduit le risque qu'il a pris en diversifiant ses risques, on dispose aujourd'hui de modèles et de calculs mathématiques suffisamment efficaces pour que l'assureur puisse - dans les limites du modèle, bien entendu - vendre sans risque un unique contrat, moyennant un certain travail bien décrit qu'il devra effectuer tout au long de la durée du contrat. Ce travail consiste à gérer un *portefeuille de couverture* selon une stratégie que nous allons découvrir progressivement. Dans ce chapitre, nous considérerons deux situations très simples montrant le mécanisme essentiel. Le cas général s'obtient par simple répétition en grand nombre du mécanisme, et une mise en forme (= mise en "formules") au moyen du langage des marches aléatoires et du calcul y affairant.

Le point essentiel pour l'approche exposée ici est que le marché soit "liquide", c'est-à-dire que l'on puisse acheter ou vendre l'actif, au prix indiqué, en quantité arbitraire. Ceci est bien entendu une idéalisation, un achat en grande quantité sur une courte période provoquant généralement une hausse et analogue pour une vente. Les premiers contrats d'option étaient des contrats sur cours agricole.

Exercice 1.1 *Après avoir étudié la définition d'un Call et d'un Put, indiquer comment au moyen d'achat et vente de Call et Put synthétiser les options définies par les fonctions de pay-off de la figure 1.2.*

1.2 Un modèle binaire à une seule étape

Soit S un actif valant 120 à la souscription du contrat et dont on est assuré qu'il ne pourra, à la date d'exercice, que prendre l'une des deux valeurs 180 ou 60. A noter qu'on ne dispose d'aucune information sur les probabilités de chacune de ces deux issues. Voici comment assurer, sans risque, un contrat d'option européenne de fonction de paiement φ. C'est l'idée, fondamentale, de porte feuille de couverture, composé

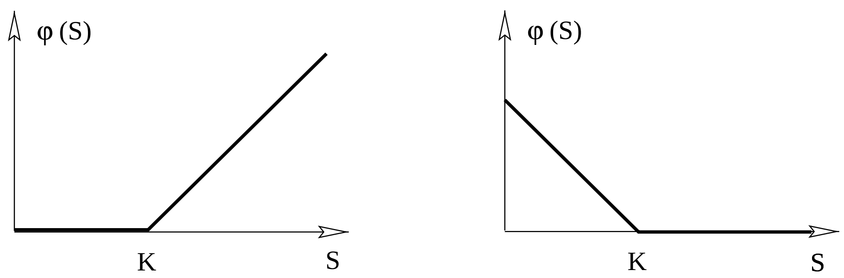

FIG. 1.1: Fonction de paiement d'un call et d'un Put : l'option Call est l'option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d'échéance T, l'actif S à un prix maximal K. Si $S_T \leq K$, l'option aura donc une valeur nulle pour $t = T$. Si $S_T > K$, l'option vaudra $S_T - K$ pour $t = T$, c'est-à-dire la différence entre le prix maximal convenu K et le prix effectif S_T de l'actif à la date T. Pour une option Call, on a donc $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$, où x^+ vaut x si $x > 0$ et 0 sinon. L'option Put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date T, l'actif S au prix minimum K. En examinant successivement les cas $S_T \geq K$ et $S_T < K$, il est facile de voir que $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$. Le nombre K s'appelle le *prix d'exercice* (ou *strike*) de l'option.

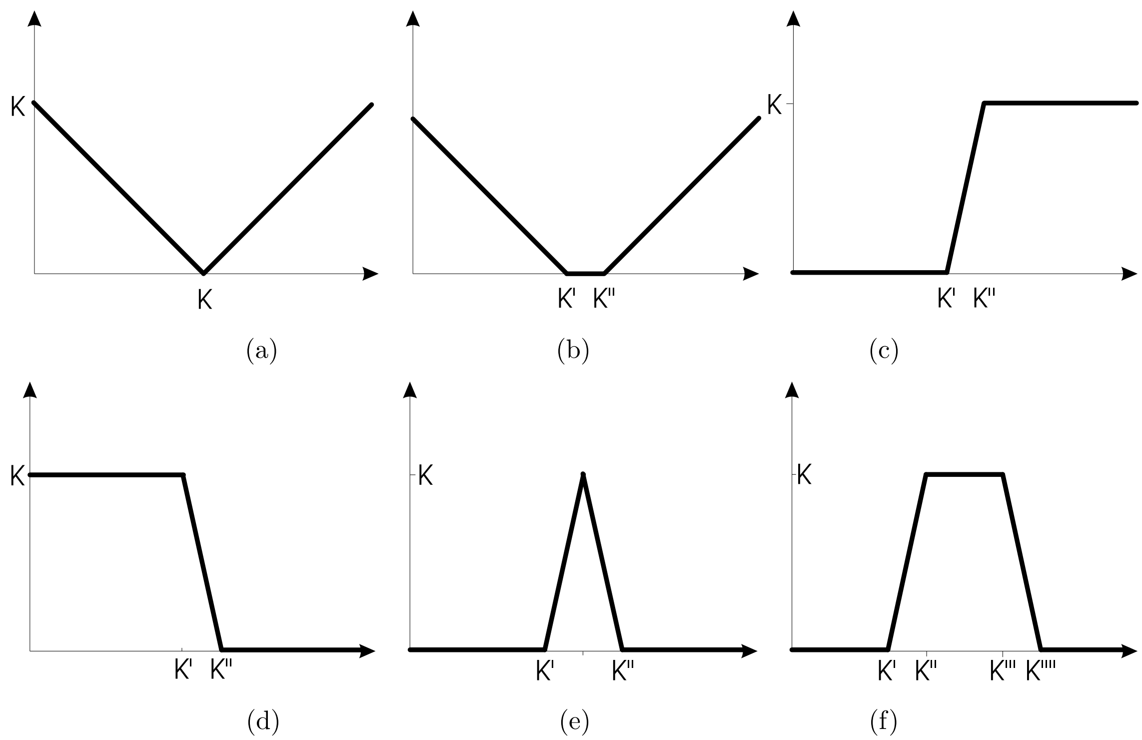

FIG. 1.2: Fonctions de pay-off de quelques options standard : (a) straddel, (b) strangel, (c) bull spread, (d) bear spread, (e) butterfly spread, (f) condor.

de a actifs et b unités monétaires (euros, par exemple). A la date T, la valeur Π_T de ce portefeuille sera

$$\Pi_T = aS_T + b \tag{1.1}$$

à supposer que b ne soit pas porteur d'interêts. Nous voulons que

$$\Pi_T = \varphi(S_T) \tag{1.2}$$

et comme S_T ne peut prendre que deux valeurs $S^+ = 180$ et $S^- = 60$, la relation (1.2) est équivalente au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aS^+ + b & = & \varphi(S^+) \\ aS^- + b & = & \varphi(S^-) \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Les inconnues sont a et b ; ce système admet une (unique) solution *ssi* le déterminant de sa matrice est non nul, c'est-à-dire

$$S^+ - S^- \neq 0,$$

ce qui est précisément le cas ici.

Prenons l'exemple d'un Call de prix d'exercice $K = 80$. On a $\varphi(S) = (S - 80)^+$, donc $\varphi(S_0^+) = \varphi(180) = (180 - 80)^+ = 100$, et $\varphi(S_0^-) = \varphi(60) = (60 - 80)^+ = 0$; le système devient donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a180 + b & = & 100 \\ a60 + b & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.4}$$

d'où la sloution $a = 10/12$ et $b = -50 < 0$. En pratique, le portefeuille de couverture doit comporter $a = 10/12$ d'actifs et une *dette* ($b < 0$) de $|b| = 50$, somme que le financier emprunte pour constituer son portefeuille à la date $t = 0$, lorsque S vaut $S_0 = 120$. Soit Π la valeur du portefeuille. A $t = 0$, ce portefeuille vaut donc Π_0, avec

$$\Pi_0 = aS_0 + B = \frac{10}{12}120 - 50 = +50.$$

Le financier assurant, sans risque, ce contrat doit donc le facturer (hors frais...) au prix $\Pi_0 = 50$, cette somme, ajoutée à l'emprunt de 50, constituant la somme nécessaire à l'achat de $\frac{10}{12}$ d'actifs. Dans ce modèle, simpliste, du comportement de S_T, le prix de l'option Call est donc $\Pi_0 = 50$.

Afin de bien assoir la compréhension de cette démarche, observons quelles sont les situations possibles à la date T (c'est une paraphrase du système 1.4). Si $S_T = S_0^+ = 180$, les actifs valent $\frac{10}{12}180 = 150$; le financier doit payer $\varphi(S_0^+) = (180 - 80)^+ = 100$ au détenteur de l'option, et il lui reste exactement 50 pour rembourser son emprunt. Si $S_T = S_0^- = 60$, les actifs valent $\frac{10}{12}60 = 50$; ici encore, il reste exactement de quoi rembourser la dette. Notons que pour que le système (1.4) admette une solution, il suffisait que $S_0^- \neq S_0^+$, ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : s'il n'y avait qu'un seul prix à $t = T$, il n'y aurait pas besoin d'assurance !

1.3 Un modèle binaire à deux étapes ; couverture dynamique.

Considérons une situation un peu plus élaborée. Soit un titre valant $S_0 = 80$ et changeant deux fois de prix avant l'échéance en $T = 2\delta t$. Observons que dans l'exemple précédent nous avions, à $t = \delta t$, $S_{\delta t} = S_0^+ = S_0(1 + \frac{1}{2})$ ou $S_{\delta t} = S_0^- = S_0(1 - \frac{1}{2})$. Supposons qu'ici S suive un processus analogue :

$$S_{\delta t} = S_0(1 \pm \tfrac{1}{2}) \ , \ S_{2\delta t} = S_{\delta t}(1 \pm \tfrac{1}{2}).$$

Cela donne (figure 1.3)

$$S_0 = 80 \quad \text{devient} \quad S_{\delta t} = 120 \text{ ou } S_{\delta t} = 40 \tag{1.5}$$

$$S_{\delta t} = 120 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 180 \text{ ou } S_{2\delta t} = 60 \tag{1.6}$$

$$S_{\delta t} = 40 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 60 \text{ ou } S_{2\delta t} = 20 \tag{1.7}$$

Reprenons le cas d'une option Call, avec date d'exercice $T = 2\delta t$ et prix d'exercice $K = 80$; à noter que $K = S_0$: on dit que c'est une option "à la monnaie".

Observons que si $S_{\delta t} = 120$ nous retrouvons l'exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas, doit valoir

$$\Pi_{\delta t}(\text{si } S_{\delta t} = 120) = 50.$$

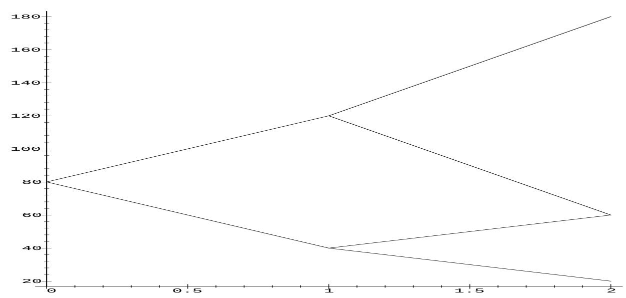

FIG. 1.3: Une patte-d'oie : évolution sur deux étapes d'un actif à dynamique stochastique binaire, avec $S_0 = 80$ et $S_{t+\delta t} = S_t(1 \pm 0.5)$.

Qu'en est-il si $S_{\delta t} = 40$? Ici guère n'est nécessaire de faire des calculs : par (1.7) $S_{2\delta t}(\text{si } S_{\delta t} = 40)$ vaut 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures à $K = 80$, on aura toujours $\varphi(S_{2\delta t}(\text{si } S_{\delta t} = 40)) = (S_{2\delta t}(\text{si } S_{\delta t} = 40) - K)^+ = 0$, et donc

$$\Pi_{\delta t}(\text{si } S_{\delta t} = 40) = 0,$$

puisqu'il n'y a plus rien à couvrir dans ce cas.

Plaçons nous à l'instant $t = 0$; nous comprenons qu'il nous faut composer un portefeuille de couverture (a_0, b_0) satisfaisant à $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$, c'est-à-dire au système

$$\begin{cases} a_0 120 + b_0 &= a_0 S_0^+ + b_0 = \Pi_{\delta t}(\text{si } S_{\delta t} = S_0^+) = 50 \\ a_0 60 + b_0 &= a_0 S_0^- + b_0 = \Pi_{\delta t}(\text{si } S_{\delta t} = S_0^-) = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

avec $S_0^\pm := S_0(1 \pm 0.5)$. On trouve immédiatement $a_0 = \frac{5}{8}$ et $b_0 = -25$, d'où

$$\Pi_0 = a_0 S_0 + b_0 = \frac{5}{8} 80 - 25 = 25.$$

Résumons : cette nouvelle situation nous conduit à une option dont le prix est $\Pi_0 = 25$, auquel on ajoute un montant 25 qu'on emprunte, le tout servant à acheter $\frac{5}{8}$ d'actifs à 80 pièce. Si, pour $t = \delta t$, S a évolué à la baisse et que $S_{\delta t} = 40$, *on solde* le portefeuille ; la part en actifs ne vaut plus que $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8} 40 = 25$, soit exactement de quoi rembourser la dette $b_0 = 25$. Si, pour $t = \delta t$, S a évolué à la hausse et que $S_{\delta t} = 120$, nous avons vu dans l'exemple précèdent que le portefeuille doit à présent comporter $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$; comme il y a déjà $\frac{5}{8}$ d'actifs dans le portefeuille, il convient d'en *racheter* $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$ au prix unitaire $S_{\delta t} = 120$, donc pour une valeur de $\frac{10}{48} 120 = 25$, que l'on emprunte, ce qui porte la dette totale à $25 + 25 = 50$, comme dans le premier exemple, bien entendu.

Voilà ; c'est aussi simple que cela et cela s'appelle de la couverture *dynamique*, c'est-à-dire que l'on modifie la composition du portefeuille de manière dynamique, un synonyme pour *composition évoluant* en fonction du cours. Le cas général consiste simplement à passer d'un modèle à 2 étapes à un modèle à n étapes, et à tenir compte du fait que les emprunts d'argents ne sont pas gratuits et sont soumis à un paiement d'intérêts. Pour ce faire, le langage des marches aléatoires – ou récurrences à choix multiples – est remarquablement commode. Nous allons mettre ce langage en place et reformuler la stratégie de la couverture dynamique dans ce cadre. Nous calculerons également la limite de Π_0 lorsque n tends vers l'infini, ce qui nous donnera la fameuse formule de Black et Scholes, introduite indépendament par ces deux auteurs d'une part, et Merton d'autre part, en 1973, ce qui valut le prix Nobel d'économie à ses auteurs en 1997.

Chapitre 2

Equations aux différences déterministes

Nous abordons ici le calcul avec les i-petits dans le cadre d'un problème qui est souvent abordé au moyen des équations différentielles ordinaires $y' = f(t, y)$: le calcul des intérêts composés et de l'actualisation.

La monnaie est, notamment, la matérialisation d'un droit à acquérir un bien. La finance traite de la gestion de ce droit au travers du temps et des risques attachées à l'organisme auquel on délègue ce droit pour une durée que nous noterons Δt. Nous abordons ici le cas où l'on estime que ce risque n'existe pas. La dette souveraine d'états jugés stables est, actuellement, ce qui s'apparente le plus à ce modèle. Notons B_t et $B_{t+\Delta t}$ un titre matérialisant un même droit, mais pouvant s'exercer à deux dates distinctes t et $t + \Delta t$, avec $t \leq t + \Delta t$. On note $R_t\{\Delta t\}$ le nombre tel que

$$B_{t+\Delta t} = B_t(1 + R_t\{\Delta t\}) \tag{2.1}$$

La quantité $R_t\{\Delta t\}$ s'appelle le *taux d'intérêt, à* la date t, pour une durée[1] Δt. La question d'élaborer un modèle mathématique réaliste de $R_t\{\Delta t\}$ est un problème difficile, objet de recherches actives. Nous abordons ici la question plus facile pour Δt fixé et $R_t\{\Delta t\}$ une fonction (déterministe) de t. Sur un “compte épargne”, Δt est par exemple de 15 jours, avec $R_t\{\delta t\} = 0$ pour $0 \leq \delta t < \Delta t$.

2.1 Taux constant

Soit r fixé. Vérifions que (2.1) est satisfait par

$$B_t := B_0 e^{rt} \tag{2.2}$$

où nous supposerons que $B_0 \neq 0$. Par (2.1) nous voyons que

$$B_0 e^{r(t+\Delta t)} = B_{t+\Delta t} = B_t(1 + R\{\Delta t\}) = B_0 e^{rt}(1 + R\{\Delta t\})$$

et donc, en simplifiant par $B_0 e^{rt} \neq 0$, nous avons

$$1 + R_t\{\Delta t\} = e^{r\Delta t} =: 1 + R^*\{\Delta t\}$$

où $R^*\{\Delta t\}$ est indépentant de la valeur de t : nous disons que (2.2) est un modèle à *taux constant.* Soit k quelconque ; par (2.1) on a

$$B_t(1 + R^*\{k\Delta t\}) = B_{t+k\Delta t} = B_0 e^{r(t+k\Delta t)} = B_t(e^{r\Delta t})^k = B_t(1 + R^*\{\Delta t\})^k,$$

d'où, en rapprochant les extrêmes

$$B_t(1 + R^*\{k\Delta t\}) = B_t(1 + R^*\{\Delta t\})^k, \tag{2.3}$$

qui est la formule des intérêts composés qui, pour k entier naturel, a fait les beaux jours des mathématiques financières de l'enseignement élémentaire.

[1]En finance, si $\Delta t \leq 1$an on parle de “taux d'intérêts à court terme”, et sinon de “taux d'intérêts à long terme”

Nous pouvons nous poser la question s'il existe un autre modèle que le modèle (2.2) pour lequel la formule élémentaire des intérêts composés est vraie pour tout t, tout $\Delta t = 1/n$, et tout entier $k \geq 0$. Soit r tel que $e^r = 1 + R^*\{1\}$, et $T = k\Delta t = k/n$. On a

$$B_T = B_{0+k\Delta t} = B_0(1 + R^*\{k\Delta t\}) = B_0(1 + R^*\{\frac{k}{n}\}) = B_0(1 + R^*\{1\})^{\frac{k}{n}} = B_0 e^{r\frac{k}{n}} = B_0 e^{rT}.$$

Nous voyons donc que nécessairement $B_T = e^{rT}$ pour tout $T = k/n$ rationnel, et donc aussi pour tout T réel si l'on suppose que la fonction $T \mapsto B_T$ est continue. Il n'y a donc pas d'autre modèle que (2.2) qui satisfasse la relation élémentaire des intérêts composés.

Exercice : Montrer, à partir de la formule (2.1), la formule générale des intérêts composés suivante :

$$(1 + R_t\{k\Delta t\}) = (1 + R_t\{\Delta t\})(1 + R_{t+\Delta t}\{\Delta t\})(1 + R_{t+2\Delta t}\{\Delta t\}) \ldots (1 + R_{t+(k-1)\Delta t}\{\Delta t\}).$$

2.2 Taux variable

Si le taux d'intérêt $R_t\{\Delta t\}$ n'est pas constant avec t, il est utile de considérer le cas où Δt est petit. Nous formalisons cela en considérant

$$\delta t > 0 \text{ , un nombre i-petit fixé.} \tag{2.4}$$

Il est naturel de penser qu'en première approximation le taux d'intérêt $R_t\{\Delta t\}$ est une fonction linéaire de Δt lorsque Δt est i-petit. Notons $r(t)$ le coefficient de linéarité. En d'autres termes, pour tout t limité et tout Δt i-petit, nous postulons que

$$R_t\{\Delta t\} = (r(t) + \phi)\Delta t,$$

où ϕ est le symbole générique pour un réel infinitésimal que nous ne souhaitons pas préciser au delà de connaître son ordre de grandeur. A ce stade élémentaire, nous supposerons que $t \mapsto r(t)$ est une fonction standard. La formule (2.1) implique que

$$B_{t+\delta t} = B_t(1 + (r(t) + \phi)\delta t). \tag{2.5}$$

Proposition 2.1 *Si B_0 et $T = n\delta t$ sont limités et si la fonction $t \mapsto r(t)$ est en outre continue sur $[0, T]$, alors*

$$B_T = B_0 e^{\int_0^T r(s)ds + \phi}. \tag{2.6}$$

2.3 Equation aux différences infinitésimale et équations différentielles

Introduisons la notations

$$\delta B_t := B_t - B_{t-\delta t}. \tag{2.7}$$

La relation (2.5) devient

$$\delta B_{t+\delta t} = B_t(r(t) + \phi)\delta t,$$

et comme, au vu de la proposition 2.1, les solutions restent i-voisines des solutions de

$$\delta B_{t+\delta t} = B_t r(t)\delta t, \tag{2.8}$$

c'est par ce type de récurrences que nous modéliserons le cours B_t d'une *obligation*[2], ou plus précisément obligation à *zéro-coupon.*A noter que ceci peut encore s'écrire

$$\frac{\delta B_{t+\delta t}}{\delta t} = r(t)B_t,$$

et la proposition 2.1 montre que la solution d'une telle récurrence reste i-voisine de la solution de l'équation différentielle

$$B' = r(t)B$$

telle que $B(0) = B_0$, puisque $B_0 e^{\int_0^T r(s)ds}$ n'est autre que cette solution.

[2]c'est-à-dire un actif financier dont la valeur au cours du temps est connue, et qui est supposé sans "risque de défaut" : si vous prêtez B_0 à votre banque, celle-ci vous doit B_t après un temps t. Il est important de comprendre que sur un marché ouvert, il ne peut y avoir qu'un seul modèle de fait de placement sans risque en vigueur, sans quoi il y aurait possibilité d'*arbitrage*, c'est-à-dire d'enrichissement sans prise de risque.

2.4 Actualisation

En l'absence de risque, B_t constitue l'étalon de comparaison entre deux actifs financiers ayant des dates de valeur distinctes. Précisons cela : soit A un actif financier, A_t et $A_{t+\Delta t}$ sa valeur aux instants t et $t+\Delta t$. Pour comparer les valeurs intertemporelles de A_t et $A_{t+\Delta t}$, on compare combien d'obligations cet actif permet d'acquérir aux deux dates t et $t+\Delta t$, à savoir

$$\tilde{A}_t := \frac{A_t}{B_t} \text{ comparé à } \tilde{A}_{t+\Delta t} := \frac{A_{t+\Delta t}}{B_{t+\Delta t}}.$$

La grandeur $\tilde{A}_t := \frac{A_t}{B_t}$ s'appelle la *valeur actualisée* de A_t (selon l'obligations B_t). Si on choisit B_t tel que $B_0 = 1$, on voit que $\tilde{A}_t$ est une actualisation au temps 0, puisque, si $b := \tilde{A}_t$, alors $A(t) = bB_t$ et b est précisément le prix de b obligations là l'instant 0.

En finance, il y généralement plus simple de comprendre les relations existant entre actifs actualisés : cela efface les difficultés techniques liées aux évolutions déterminsites et ne laisse subsiter que celles liées à la nature stochastiques des modèles.

A titre d'exemple, reprenons l'étude d'un portefeuille de couverture dans le modèle binaire à une seule étape, mais où les actifs sans risques sont porteurs d'intérêts.

Notons a_0 et b_0 la composition en actif risqué et actif non risqué, arrètée à l'instant 0 du portefeuille de couverture. Nous voulons que $\Pi_T = \varphi(S_T)$ et donc $a_0 S_T + b_0 B_T = \varphi(S_T)$. En actualisant à l'instant 0, c'est-à-dire en divisant pas B_T, nous obtenons

$$a_0 \tilde{S}_T + b_0 = \tilde{\varphi}(\tilde{S}_T) := \varphi(S_T)/B_T.$$

Notons $\tilde{S}_0^{\pm}$ les deux valeurs de S_T dans ce modèle élémentaire, nous voulons donc que a_0 et b_0 satisfassent le système suivant, que l'on peut résoudre par combinaison, de la manière indiquée :

$$\begin{array}{llcl|c|c}
a_0\tilde{S}_0^+ & + \; b_0 & = & \tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^+) & +1 & -\tilde{S}_0^- \\
a_0\tilde{S}_0^- & + \; b_0 & = & \tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^-) & -1 & +\tilde{S}_0^+ \\
\hline
a_0(\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-) & & = & \tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^+) - \tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^-) & & \\
\hline
 & b_0(\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-) & = & \tilde{S}_0^+\tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^-) - \tilde{S}_0^-\tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^+) & &
\end{array}$$

Finalement, nous obtenons

$$a_0 = \frac{\tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^+) - \tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^-)}{\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-} \text{ et } b_0 = \frac{\tilde{S}_0^+\tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^-) - \tilde{S}_0^-\tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^+)}{\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-}.$$

En choisissant $B_0 = 1$ (c'est-à-dire en choisissant B_0 pour numéraire), nous avons

$$\begin{aligned}
\Pi_0 &= a_0 S_0 + b_0 \\
&= \frac{S_0}{\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-}(\tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^+) - \tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^-)) + \frac{\tilde{S}_0^+}{\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-}\tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^-) - \frac{\tilde{S}_0^-}{\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-}\tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^+) \\
&= \tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^+)\frac{S_0 - \tilde{S}_0^-}{\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-} + \tilde{\varphi}(\tilde{S}_0^-)\frac{\tilde{S}_0^+ - S_0}{\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-}
\end{aligned}$$

Observons que si nous posons

$$p^+ := \frac{S_0 - \tilde{S}_0^-}{\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-} \text{ et } p^- := \frac{\tilde{S}_0^+ - S_0}{\tilde{S}_0^+ - \tilde{S}_0^-},$$

on a $0 \leq p^-, p^+ \leq 1$ pourvu que $\tilde{S}_0^- \leq S_0 \leq \tilde{S}_0^+$, et que $p^+ + p^- = 1$. En d'autres termes, si on pose $\Pr\{S_{\delta t} = \tilde{S}_0^+\} := p^+$ et $\Pr\{S_{\delta t} = \tilde{S}_0^-\} := p^-$, qu'on note P^* cette probabilité sur la variable aléatoire bivaluée S_T, et $\mathbb{E}^{P^*}$ l'espérance pour cette probabilité, alors

$$\Pi_0 = \mathbb{E}^{P^*}[\tilde{\varphi}(\tilde{S}_T)]. \tag{2.9}$$

C'est ainsi que le calcul des probabilités s'introduit de manière naturelle dans le calcul des prix d'options. Nous allons systématiser cette idée dans un modèle plus sophistiqué d'évolution de S_t. Pour cela, nous allons tout d'abord introduire la *marche de Wiener*, et étudier ses propriétés.

Chapitre 3

La marche de Wiener

Nous venons de rappeler la relation entre suites définies par récurrence ou équations aux différences à une (seule) variable, et équations différentielles. Nous abordons ici un ingrédient important pour aborder d'intéresantes é*quations aux différences stochastiques*, qui elles-mêmes ouvrent la voie aux équations différentielles stochastiques (ces dernières ne seront abordées qu'en maîtrise). Comme pour le cas déterministe que nous venons d'évoquer, nous considérons un intervalle de temps $[0, T]$ que nous subdivisons en n intervalles égaux de longueur δt ; donc $T = n\delta t$. Il est utile de concevoir δt comme une unité de longueur sur le "temps" t, fixée une fois pour toute. Nous aurons l'occasion d'indiquer des propriété particulières lorsque cette unité peut être considérée comme petite, mais telle n'est pas notre soucis pour le moment. Il nous paraîtrait en revanche nuisible de supposer que $\delta t = 1$; sur le plan de la modélisation, c'est $T = 1$ qui serait une restriction acceptable, et comme $\delta t = T/n$, il est souhaitable d'imaginer que $\delta t < 1$, ce qui implique en particulier que $\delta t < \sqrt{\delta t}$. Nous notons

$$\mathbb{T} := [0..T] := [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, k\delta t, \ldots, ndt\}$$

l'ensemble des points de subdivisions. Nous ne considèrerons ici que des fonctions définies sur $\mathbb{T}$, mais il n'est pas absurde d'imaginer de prolonger ces fonctions sur $[0, T]$ tout entier par des fonctions constantes sur $[k\delta t, (k+1)\delta t[$.

La *marche de Wiener* W que nous voulons définir est solution de l'équations aux différence stochastique sur $[0..T]$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta W_t & = & W_t - W_{t-\delta t} \\ W_0 & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

où, et c'est l'originalité du stochastique sur le déterministe

$$\text{“}\ \delta W_t := W_t - W_{t-\delta t} = \pm_t \sqrt{\delta t}\ \text{”}\ ,$$

c'est-à-dire que l'accroissement ne prend pas une valeur unique, mais, dans cet exemple simple mais très utile, *deux* valeurs, $+\sqrt{\delta t}$ et $-\sqrt{\delta t}$, le choix entre ces deux valeurs dépendant de $t = n\delta t \in [0..T]_{\delta t}$. Nous abandonnons tout de suite la notation $\pm_t \sqrt{\delta t}$ pour celle, plus proche de l'usage, de δW_t. Les δW_t sont des variables aléatoires (v.a.) sur un même espace probabilisé $(\Omega, \Pr)$ à deux valeurs (ou "bivaluées", ou "de Bernouilli"). Précisément : les

$$(\delta W_t)_{t \in]0..T]_{\delta t}}$$

sont des v.a. aléatoires de Bernouilli indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) telles que $\delta W_t(\omega) = \pm\sqrt{\delta t}$; nous posons

$$p := \Pr\{\delta W_t = +\sqrt{\delta t}\},$$

la valeur de p étant indipendantes de la valeur de t, puisque les v.a. δW_t ont été supposées identiquement distribuées, un synonyme de "de même loi". Nous serons amenés plus loin, pour les besoins des applications que nous avons en vue, à choisir la valeur de p de façon adhéquate, en fonction de la valeur de $n = T/\delta t$; lorsque δt est petit, p sera proche de $\frac{1}{2}$. Pour suivre ce qui suit sur un exemple concret, il n'est pas gênant pour le moment d'imaginer que $p = \frac{1}{2}$. Parfois on réserve même le nom de marche de Wiener à ce cas, mais ce n'est pas ce que nous ferons. Si nécessaire, on pourra préciser que la marche que nous considérons est la p-marche de Wiener.

Exercice : Rappeler comment définir sur $\Omega = \{0, 1\}^n$ une probabilité $\Pr = \Pr_p$ telle qu'il existe sur $(\Omega, \Pr_p)$ n v.a. de Bernouilli i.i.d. $(X_k)_{k=1..n}$ telles que $\Pr\{X_k = 1\} = \mathbb{E}X_k = p$.

3.1 Deux points de vue complémentaires sur la marche de Wiener

Il convient de comprendre (3.1) comme une relation définissant $W_t(\omega)$ par récurrence à partir des valeurs $\delta W_s(\omega)$ des v.a. $(\delta W_s)_{s\in]0..T]}$. Précisément, on définit $W_t(\omega)$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} W_t(\omega) & = & W_{t-\delta t}(\omega)+\delta W_t(\omega) \\ W_0(\omega) & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

En considérant tantôt ω comme paramètre et t comme variable, ou inversement, on obtient deux conceptions utiles des quantités $W_t(\omega)$.

3.1.1 Les trajectoires $W(\omega)$ et leur probabilité

Soit $\omega\in\Omega$; pour chaque $t=k\delta t\in[0..T]$, $W_t(\omega)$ est un nombre réel, et donc $W(\omega)$ est une fonction

$$\begin{array}{rcl} W(\omega):[0..T] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & W_t(\omega) \end{array}$$

appelée la *trajectoire* de W associée à ω. Nous notons $\mathcal{W}$ l'ensemble des trajectoires de $(W_t)_{t\in[0..T]}$. Chaque trajectoire est caractérisée par les n valeurs de $(\delta W_s)_{s\in]0..T]}$. Si $\delta W_s(\omega_1)\neq\delta W_s(\omega_2)$ pour une valeur de s au moins, alors les trajectoires $W(\omega_1)$ et $W(\omega_2)$ sont distinctes. Comme chaque $\delta W_s(\omega)$ prend deux valeurs distinctes $(\pm\sqrt{\delta t})$, la marche de Wiener a exactement 2^n trajectoires distinctes $W_s(\omega)$, $\omega\in\Omega$. Soit $\gamma:[0..T]\longrightarrow\mathbb{R}$ une de ces trajectoires. On pose

$$\mathrm{pr}_W\gamma=\Pr\{\omega\in\Omega\ \mid\ W_t(\omega)=\gamma(t)\text{ pour tout }t\in[0..T]\}.$$

Toute trajectoire $W(\omega)$ est déterminée par les nombres $(\delta W_t(w))_{t\in]0..T]}$; posons $\delta\gamma(t):=\gamma(t)-\gamma(t-\delta t)$. Il est clair que

$$\gamma(t)=W_t(\omega)\text{ pour tout }t\in[0..T] \tag{3.3}$$

si et seulement si

$$\begin{array}{rcl} \gamma(0) & = & 0\ \ (=W_0(\omega))\quad\text{, ce qui est vrai pour toutes trajectoires de } W\text{, et} \\ \delta\gamma(t) & = & \delta W_t(\omega)\quad\ \text{pour tout } t\in]0..T]. \end{array}$$

Donc, par (3.3), si γ est une trajectoire de W,

$$\mathrm{pr}_W\gamma=\Pr\{\omega\in\Omega\ \mid\ \delta W_t(\omega)=\delta\gamma(t)\text{ pour tout }t\in]0..T]\}\ ,$$

et comme les v.a. $(\delta W_t)_{t\in]0..T]}$ sont indépendantes,

$$\mathrm{pr}_W\gamma=\Pi_{t\in]0..T]}\Pr\{\omega\in\Omega\ \mid\ \delta W_t(\omega)=\delta\gamma(t)\text{ pour tout }t\in]0..T]\}. \tag{3.4}$$

A noter que les facteurs composant le membre de droite de (3.4) n'ont que deux valeurs possible, p et $1-p$, donc

$$\mathrm{pr}_W\gamma=p^j(1-p)^{n-j}, \tag{3.5}$$

où $j=j(\gamma)$ désigne le nombre de $t\in]0..T]$ tels que $\delta\gamma(t)=+\sqrt{\delta t}$ et, partant, $n-j$ désigne le nombre de $t\in]0..T]$ tels que $\delta\gamma(t)=-\sqrt{\delta t}$. Nous dirons que $j(\gamma)$ est le nombre de *up*s de γ et $n-j(\gamma)$ est son nombre de *down*s.

Notons que l'ensemble des valeurs des divers $j(\gamma)$ est $\{0,1,\dots,n\}$ et qu'il y a exactement $\binom{n}{j}$ trajectoires distinctes γ telles que $j(\gamma)=j$, à savoir le nombre de choix distincts de j instants $t\in]0..T]$ où $\delta\gamma(t)=+\sqrt{\delta t}$. Donc si $w_j:=j\sqrt{\delta t}+(n-j)(-\sqrt{\delta t})=(2j-n)\sqrt{\delta t}$,

$$\Pr\{\omega\in\Omega\ \mid\ \gamma_\omega(T)=w_j\}=\Pr\{\omega\in\Omega\ \mid\ W_T(w)=w_j\}=\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.$$

Exercice : Montrer que si, pour tout $\Gamma\subseteq\mathcal{W}$, on pose $\Pr_W(\Gamma):=\sum_{\gamma\in\Gamma}\mathrm{pr}_W\gamma$, la fonction $\Pr_W:\mathcal{P}(\mathcal{W})\longrightarrow\mathbb{R}^+$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{W}$; on l'appelle la mesure image de la marche de Wiener sur l'ensemble $\mathcal{W}$ de ses trajectoire. Indications : pour $w_j:=(2j-n)\sqrt{\delta t}$, $j=0..n$, les évènement $\{W_T=w_j\}$ constituent une partition de Ω ; appliquer la formule du binôme.

3.1.2 Les variables aléatoires W_t

Soit $t \in [0..T]_{\delta t}$; pour chaque $\omega \in \Omega$ $W_t(\omega)$ est un nombre réel, et donc W_t est une v.a. sur Ω.

$$\begin{array}{rcl} W_t : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & W_t(\omega) \end{array}$$

En adaptant ce qui a été dit dans la sous-section précèdente pour le cas $t = T$, il est facile de voir que pour $t = k\delta t$, W_t prend $k+1$ valeurs $w_{t,j}$, avec

$$w_{t,j} = (2j-k)\sqrt{\delta t} = (j - \frac{k}{2})\delta w \text{ si } t = k\delta t. \tag{3.6}$$

également espacées d'une quantité $\delta w = 2\sqrt{\delta t}$, comprises entre $-k\sqrt{\delta t}$ et $+k\sqrt{\delta t}$, ou encore

$$W_t(\omega) = -k(\omega,t)\sqrt{\delta t} + j(\omega,t)\delta w,$$

avec $t =: k(\omega,t)\delta t$ et où $j(\omega,t)$ est le nombre de $s \leq t$ tels que $\delta W_s(\omega) > 0$ (nombre de ups antérieurs à t).

Comme les v.a. $(\delta W_s)_{s\in]0..t]}$ sont indépendantes, on a

Proposition 3.1 *Soit* $t = k\delta t \in]0..T]_{\delta t}$. *On a* $Pr\{W_t = w_{t,j}\} = \binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}$.

Preuve : Notons que

$$\begin{aligned} \Pr\{W_t = -k\sqrt{\delta t} + j\delta w\} &:= \Pr\{\omega \in \Omega \mid W_t(\omega) = -k\sqrt{\delta t} + j\delta w\} \qquad (3.7)\\ &= \Pr\{E(j,k)\} \qquad (3.8) \end{aligned}$$

où, pour $k \geq 1$, $E(j,k)$ désigne l'évèvement "il existe exactement j valeurs de $s \in]0..k\delta t]_{\delta t}$ telles que $\delta W_s(\omega) = +\sqrt{\delta t}$", et qui peut encore se formaliser par

$$E(j,k) := \left\{ \left(\sum_{0<s\leq t} \mathbb{I}_{\{\delta W_s = +\sqrt{\delta t}\}} \right) = j \right\}.$$

Montrons par récurrence sur k que

$$\Pr E(j,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pour $k=1$, il est clair que $\Pr E(0,1) = 1-p = \binom{1}{0}p^0(1-p)^{1-0}$, et $\Pr E(1,1) = p = \binom{1}{1}p^1(1-p)^{1-1}$.

Pour $k > 1$, il est facile de voir que $E(j,k)$ et la conjonction (ou "réunion") des deux évenements incompatible (ou "d'intersection vide") suivants :

$$\begin{aligned} E(j,k-1)^- &:= E(j,k-1) \cap \{\delta W_{k\delta t} = -\sqrt{\delta t}\} \\ E(j-1,k-1)^+ &:= E(j-1,k-1) \cap \{\delta W_{k\delta t} = +\sqrt{\delta t}\} \end{aligned}$$

Comme, en outre, $E(j,k-1)$ et $E(j-1,k-1)$ ne font intervenir que ses v.a. $\delta W_{l\delta t}$ pour $l \leq k-1$ et que celles-ci sont indépendantes de $\delta W_{k\delta t}$, on a, en appliquant l'hypothèse de récurrence pour $k' = k-1$,

$$\begin{aligned} \Pr E(j,k) &= \Pr E(j,k-1)^- + \Pr E(j-1,k-1)^+ \\ &= \Pr E(j,k-1)\Pr\{\delta W_{k\delta t} = -\sqrt{\delta t}\} + \Pr E(j-1,k-1)\Pr\{\delta W_{k\delta t} = +\sqrt{\delta t}\} \\ &= \binom{k-1}{j} p^j (1-p)^{k-1-j}(1-p) + \binom{k-1}{j-1} p^{j-1}(1-p)^{k-1-(j-1)}p \\ &= \left(\binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1} \right) p^j (1-p)^{k-j} \\ &= \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} \quad \text{, par la relation du Triangle de Pascal.} \end{aligned}$$

□

Chapitre 4

La marche aléatoire de Cox, Ross, et Rubinstein

Hey, Queen, Nice Dogs You Have There ! *Michael Lewis* The Liar's Pocker

J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein[1]ont proposé en 1979 de modéliser l'évolution du prix d'un actif par la relation de récurrence binaire suivante :

$$S_t = S_{t-\delta t} + S_{t-\delta t}(\mu dt \pm \sigma\sqrt{\delta t}), \tag{4.1}$$

où $S_0 > 0$ est donné, ce qui, en posant $\delta S_t := S_t - S_{t-\delta t}$, s'écrit encore

$$\delta S_t = S_{t-\delta t}(\mu\delta t + \sigma\delta W_t). \tag{4.2}$$

4.1 Trajectoires (espace des états)

On notera que dans la relation ci-dessus, on a fait usage de la notation δW_t et non $\delta W_t^{(p)}$, c'est-à-dire que les δW_t sont des couples $(+\sqrt{\delta t}, -\sqrt{\delta t})$ et non les v.a. de Bernouilli $\delta W_t^{(p)}$ prenant ces valeurs avec une certaine probabilité p et $1-p$ respectivement.

Nous entendons marquer par là que le processus de modélisation ne porte que sur l'ensemble des évènements que le modèle veut pouvoir prendre en compte, sans se prononcer sur le fait que ces évènement sont plus ou moins probables et, partant ne se prononce pas sur l'oportunité d'envisager un "comportement espéré", qui serait la moyenne pondérée des évènements possibles.

Du point de vue des trajectoires, ce modèle peut s'interpréter de la façon suivante : si $\sigma = 0$, le prix suit une croissance géométrique de raison $1 + \mu\delta t$, c'est-à-dire une relation d'intérêts composés, de taux d'intérêts $\mu\delta t$ par période de base de durée δt. Si $\sigma > 0$, la croissance du cas $\sigma = 0$ est soumise à des "chocs"

$$\sigma S_t \delta W_t = \pm\sigma S_t\sqrt{\delta t}.$$

Le coefficient σ, communément appelé *volatilité*, est un paramètre (essentiel) du modèle, devant prendre en compte l'intensité des chocs. Nous supposerons qu'il est *constant*, mais cela pourrait être une fonction (déterministe) du temps, voire une fonction aléatoire. La présence du facteur S_t (linéarité) assure que le modèle est indépendant du choix des unités (ici, du numéraire FRF, USD, EURO, ...). Indiquons que les deux exemples vus aux sections 1.2 et 1.3 correspondent à des cas où $[0..T]$ a été subdivisé respectivement en un et deux intervalles de longueur δt.

[1]Ce modèle fait suite à un modèle introduit en 1971 indépendement par Black et Scholes, et Merton, fondé sur une approche stochastique en temps continu. Une première tentative dans ce sens avait été effectuée par Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des Mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. Les économistes, et on les comprend, sont réticents à utiliser une approche mathématique dont ils apprécient mal pas les tenants et aboutissants. L'approche exposée ici est dûe, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à Sharpe, un prix Nobel d'économie (date ?). Nous montrerons les liens entre les deux approches. Nous pensons que celle exposée ici est plus à même d'aider à formuler des modèles plus subtiles. L'approche en temps continu présentant des avantages de calcul indéniables une fois que l'on maîtrise ce calcul, elle sera enseignée en Maîtrise. Remarquons que cette question est également abordée au moyen d'équations aux dérivées partielles. Le livre de P. Wilmott, S. Howison, et J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives,* Cambridge University Press (1995) est excellent sur ce point de vue. Le lien entre les deux approches continues est aujourd'hui bien compris, et fait l'objet d'un cours de Denis Talay, en DEA de Mathématiques de l'UNSA notamment.

A chaque trajectoire $W(\omega) \in \mathcal{W}$ de la marche de Wiener $(W_t)_{t[0..T]}$ correspond donc une trajectoire $S(\omega) \in: \mathcal{S}$ de la marche $(S_t)_{t[0..T]}$. Plus précisément si deux trajectoires $W(\omega_1)$ et $W(\omega_2)$ dans $\mathcal{W}$ sont égales pour tout $s \in [0..t]$, il en est de même pour les trajectoires correspondantes $S(\omega_1)$ et $S(\omega_2)$ dans $\mathcal{S}$: on dit que $\mathcal{S}$ est *adapté* à $\mathcal{W}$ – nous reviendrons sur cette notion plus tard.

Notons que nous avons même mieux : si, pour un $t \in [0..T]$ on a $W_t(\omega_1) = W_t(\omega_2)$, alors on a aussi $S_t(\omega_1) = S_t(\omega_2)$ (même si $W_s(\omega_1) \neq W(\omega_2)$ pour certains $s < t$). Ceci se voit facilement à l'aide de la fonction $j_\#$, égale au nombre de ups antérieurs à t :

$$j_\#(t, \omega) := \text{Cardinal de } \{s \in]0..t] \mid \delta W_s(\omega) > 0\}.$$

On voit immédiatement, par récurrence sur k, avec $t := k\delta t$, que

$$W_{n\delta t} = j_\#(t, \omega) - (n - j_\#(t, \omega)) = 2j_\#(t, \omega) - n.$$

et que

$$S_{n\delta t} = S_0(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})^{j_\#(t,\omega)}(\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})^{n-j_\#(t,\omega)}. \tag{4.3}$$

(le démontrer !) Donc, toujours pour $t = n\delta t$, si $W_t(\omega_1) = W_t(\omega_2)$, alors $j_\#(t, \omega_1) = j_\#(t, \omega_2) =: j$, et donc

$$S_t(\omega_1) = S_{n\delta t}(\omega_1) = S_0(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})^j(\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})^{n-j} = S_{n\delta t}(\omega_2) = S_t(\omega_2).$$

Nous dirons que les trajectoires $\mathcal{S}$ *se recombinent comme* les trajectoires $\mathcal{W}$.

Exercice : Soient $n = 2$, $\delta t = T/2$, $\sigma :]0..T]_{\delta t} \to \mathbb{R}^+_*$, et $\mathcal{S}$ les trajectoires de la marche définie par

$$\delta S_t = S_t(\mu\delta t + \sigma(t)\delta W_t).$$

Montrer que dans ce cas les trajectoires de $\mathcal{S}$ ne se recombinent comme celles de $\mathcal{W}$ que si la fonction σ est constante. Indication : pour $\omega_1 = .01$ et $\omega_2 = .10$, on a $W_T(\omega_1) = W_T(\omega_2)$. Vérifier que $S_T(\omega_1) = S_T(\omega_2)$ implique que $\sigma(\delta t) = \sigma(2\delta t)(= \sigma(T))$.

4.2 La probabilité de calcul, et les marches Π et Δ

Nous allons à présent transformer la marche $(S_t)_{t\in[0..T]}$ en une marche stochastique, en substituant $(W_t^{(p)})_{t\in[0..T]}$ à $(W_t)_{t\in[0..T]}$, c'est-à-dire en choisissant $p \in [0, 1]$, ce qui, comme nous l'avons vu au chapitre 3, muni les trajectoire $\mathcal{W}$ de la marche de Wiener d'une probabilité, et fait que $(W_t^{(p)})_{t\in[0..T]}$ est une marche aléatoire. La relation (4.2) devient

$$\delta S_t = S_{t-\delta t}(\mu\delta t + \sigma\delta W_t^{(p)}). \tag{4.4}$$

et fait de $(S_t)_{t\in[0..T]}$ une marche aléatoire, simplement en définisant $S_t(\omega)$ par récurrence par la donnée de S_0, puis par la relation

$$S_t(\omega) = S_{t-\delta t}(\omega) + S_{t-\delta t}(\omega)(\mu\delta t + \delta W_t(\omega)). \tag{4.5}$$

Le choix de p se fera en fonction de considérations purement opérationnelles, comme dans les deux exemples du chapitre 1 pour calculer le prix Π et la composition (a, b) d'un portefeuille de couverture d'une option européenne d'échéance T et de pay-off $\varphi(S_T)$. Formalisons l'idée qui se dégage des deux exemples que nous avons vus, en en reprenant les diverses étapes. Convenons d'appeler titre sous-jacent à l'option, ou simplement *sous-jacent*, le titre dont le prix est modélisé par S_t

– A la date $t \in]0..T]$, lorsque le sous-jacent vaut S_t, on dispose d'un portefeuille se composant d'une quantité a de sous-jacent, et d'une quantité b de placement non-risqué, ce qui confère au portefeuille une valeur

$$\Pi_t = aS_t + b. \tag{4.6}$$

– Les quantités a et b ont été arrêtées à l'instant $t - \delta t$ (il est commode de dire "la veille"), lorsqu'on ne connaissait que $S_{t-\delta t}$ ce que nous exprimons en notant

$$a =: a_{t-\delta t} \text{ et } b =: b_{t-\delta t}.$$

Ce point est évidement crucial pour l'applicabilité de la méthode. Le choix de la notation est donc également important. De façon générale, nous veillons à donner aux marches $(X_t)_{t\in[0..T]}$ déduite, comme $(S_t)_{t\in[0..T]}$, de $(W_t)_{t\in[0..T]}$, des indices tels que $X_t(\omega)$ soit entièrement déterminé par les $\delta W_s(\omega)$ pour $s \in]0..t]$: c'est ce que nous formaliserons plus loin par la notion de marche adaptée à la marche $(W_t)_{t\in[0..T]}$ – ou aux chocs $(\delta W_s)_{s\in[0..T]}$ – de Wiener.

– Le portefeuille de couverture doit être conçu de manière à ce qu'à la date d'échéance T, sa valeur Π_T soit telle telle que
$$\Pi_T = \varphi(S_T),$$
quelque soit la valeur de S_T parmi celles possibles dans le modèle considéré.

– En fait, nous cherchons une relation de récurrence pour les Π_t *rétrograde* ("backward") de manière à lier les véritables inconnue Π_0, a_0, et b_0 que sont le prix et la composition initiaux, à la donnée des $\varphi(S_T)$. Nous souhaitons que la variation $\delta\Pi_t := \Pi_t - \Pi_{t-\delta t}$ soit dûe à la seule variation de S entre la date $t - \delta t$ et la date t.
$$\delta\Pi_t = \Pi_t - \Pi_{t-\delta t} = (a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}) - (a_{t-\delta t}S_{t-\delta t} + b_{t-\delta t}) = a_{t-\delta t}\delta S_t. \tag{4.7}$$
En particulier le portefeuille doit être *autofinancé*, c'est-à-dire que le changement de composition (couverture) intervenant à la date t se fait sans apport ou retrait de capitaux :
$$a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t} = \Pi_t = a_tS_t + b_t \tag{4.8}$$

– Plaçons nous la veille, à $t - \delta t$. Posons $S := S_{t-\delta t}(\omega)$ et $\Pi := \Pi_{t-\delta t}(\omega)$. Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le "lendemain", en fonction du signe de $\delta W_t(\omega)$, valeurs que nous notons S^+ et S^-, d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons Π^+ et Π^-, une fois fixé $a = a_{t-\delta t}$ et $b = b_{t-\delta t}$. Nous devons donc avoir (relation (4.6))
$$\begin{aligned} aS^+ + b &= \Pi^+ \\ aS^- + b &= \Pi^- \end{aligned}$$
qui se résoud immédiatement par combinaison, d'où
$$a = \frac{\Pi^+ - \Pi^-}{S^+ - S^-} \text{ et } b = \frac{\Pi^-S^+ - \Pi^+S^-}{S^+ - S^-}, \tag{4.9}$$
d'où facilement, en utilisant que $\Pi = aS + b$,
$$\Pi = p^+\Pi^+ + p^-\Pi^-, \tag{4.10}$$
où on a posé
$$p^+ := \frac{S - S^-}{S^+ - S^-} \text{ et } p^- := \frac{S^+ - S}{S^+ - S^-}. \tag{4.11}$$

– Et voici comment s'introduit le calcul des probabilités : on observe que
$$p^+ + p^- = \frac{(S - S^-) + (S - S^-)}{S^+ - S^-} = 1,$$
et de plus
$$\text{si } S^+ \geq S \geq S^- \text{ , alors } p^+ := \frac{S - S^-}{S^+ - S^-} \geq 0 \text{ et } p^- := \frac{S^+ - S}{S^+ - S^-} \geq 0.$$
Donc, si on conçoit $\Pi^\pm$ comme une v.a. de Bernouilli, avec $\Pr\{\Pi^\pm\} = p^\pm$ alors, pour cette probabilité, on a $\Pi = \mathbb{E}\Pi^\pm$. Mais qu'est-ce que $\Pi^\pm$? C'est la valeur de $\Pi_t(\omega)$ pourvu que $\Pi_{t-\delta t}(\omega) = \Pi$, c'est-à-dire Π_t *conditionné* par la valeur antérieure $\Pi_{t-\delta t}$, qui est elle-même déterminée par la valeur de $S_{t-\delta t}$. Cette valeur étant fixée, $\Pi^\pm$ reste une v.a. pouvant prendre deux valeurs, et la formule $\Pi = \mathbb{E}\,\Pi^\pm$ est vraie dès lors qu'on à choisit la valeur de p^* comme indidiqué :
$$p^* := p^+ = \frac{S - S^-}{S^+ - S^-} = \frac{S - S(1 + \mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})}{S(1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}) - S(1 + \mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})} = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t}.$$
et on a donc $p^- = 1 - p^* = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t}$.

- Observons encore que les coefficients p^+ et p^- ont également la propriété que

$$S = p^+S^+ + p^-S^-, \tag{4.12}$$

ou encore, avec la cette probabilité,

$$S_{t-\delta t} = \mathbb{E}(S_t \text{ connaisant } S_{t-\delta t}).$$

On dit que $(S_t)_{t\in[0..T]}$ est une *martingale*.

- La marche $(a_t)_{t\in[0..T[}$ est généralement notée $(\Delta_t)_{t\in[0..T[}$, l'une des *greques* de la finance : Delta (Δ), Gamma (Γ), Rho (ρ), Theta (Θ), et Vega (V) ; nous reviendrons sur ces quantités.

4.3 Marches aléatoires associée au bruit-blanc $(\delta W_t^*)_{t\in]0..T]}$

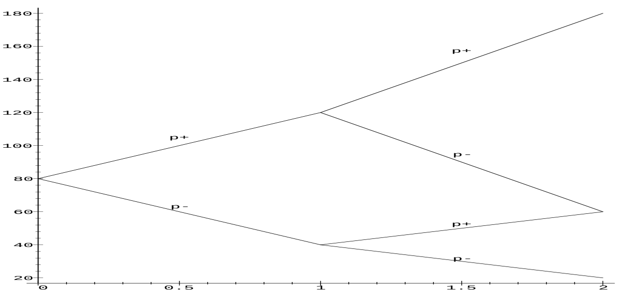

FIG. 4.1: **Calcul du prix Π_0 du portefeuille de couverture.** On sait qu'en fonction de la valeur de S_T, le portefeuille doit valoir $\varphi(S_T)$. Ceci determine les valeurs marquées par un $\otimes$ de la figure (b). La figure (a) rappelle que pour chaque motif "en cerise", la valeur à gauche se déduit des deux valeurs à droites par multiplication respective par $p := p^*$ et $q := 1-p^*$. Il convient alors de se convaincre que, dans Π_0, la contribution de chaque valeur finale $\otimes$ intervient comme la somme sur tous les chemins joignant cette valeur finale à la valeur initiale, chaque chemin étant muni d'un coefficiant multiplicatif égal au produit des coefficients portés par chacun des segments qu'il emprunte. Ces coefficients sont précisément les probabilités choisies pour les chemins de la marche $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de Cox-Ross-Rubinstein, dite *probabilité de calcul*, et $\Pi_0 = \mathbb{E}\,\varphi(S_T) = \sum_{\omega\in\Omega}\varphi(S_T(\omega))\mathrm{pr}^*(\omega)$.

Pour les raisons indiquées à la section précédente, nous considérons la suite de v.a. i.i.d. sur l'espace de probabilité (Ω, Pr)

$$(\delta W_t^*)_{t\in]0..T]} := (\delta W_t^{(p^*)})_{t\in]0..T]}, \tag{4.13}$$

avec $p^* := \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t}$. A partir de ce "bruit-blanc", nous pouvons définir, par récurrence, les marches $(W_t^*)_{t\in[0..T]}$ et $(S_t^*)_{t\in[0..T]}$, par la donnée de $W_0^*(\omega) = 0$ et de $S_0^*(\omega) = S_0$, pour tout $\omega \in \Omega$. Nous allons voir maintenant comment définir, de façon naturelle à partir de ces marches, la marche aléatoire $(\Pi_t^*)_{t\in[0..T]}$ telle que $\Pi_T = \varphi(S_T)$. De là il sera facile de déduire les marches $(\delta a_t)_{t\in[0..T[}$ et $(\delta b_t)_{t\in[0..T[}$, et surtout la valeur de Π_0, le prix du portefeuille de couverture et, partant, de l'option. Nous aurons le théorème suivant :

Théorème 4.1 *Soit $p^* = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t}$. La valeur initiale Π_0 du portefeuille de couverture d'une option sur S_T de valeur finale $\Pi_T = \varphi(S_T)$ définit de manière rétrograde de manière à satisfaire (4.7) et (4.8) est donnée par*

$$\Pi_0 = \mathbb{E}\,\varphi(S_T^{(p^*)}) =: \mathbb{E}^*\varphi(S_T). \tag{4.14}$$

La manière mathématiquement commode de prouver ce théorème est de reconnaître dans la marche $(\Pi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ décrite la belle notion probabiliste d'espérence conditionnelle que nous étudierons au chapitre suivant. Toutefois la figure 4.1 qui résume le calcul permet également de se convaincre de se résultat fondamentale de la théorie de la valorisation des options.

Chapitre 5

Espérances conditionnelles

Au chapitre précédent nous avons introduit une marche binaire $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ modélisant l'ensemble des évolutions possibles des cours d'une action. Puis nous avons vu comment introduire une probabilité sur les accroissements $(\delta S_t)_{t\in\mathbb{T}_*}$, supposés indépendants, comme commodité de calcul du prix Π_t d'un portefeuille de couverture, sachant le prix S_t atteint par l'actif sous-jacent. Nous avons noté $(S_t^*)_{t\in\mathbb{T}}$ la marche aléatoire correspondant à ce choix. Nous allons introduire ici la notion de marche aléatoire "espérance conditionnelle" $\mathbb{E}_t(X/\mathcal{S})$ associée à une v.a. X sur une marche aléatoire $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$; cette notion achèvera de formaliser le calcul du prix du portefeuille de couverture ; nous aurons $\Pi_t = \mathbb{E}_t(\varphi(S_T) \ / \ \mathcal{S})$, et les propriétés élémentaires de la marche espérance conditionnelle nous indiqueront comment calculer Π_0, le prix de l'option.

Rappelons que nous notons $(\Omega, \Pr)$ un espace probabilisé, que nous *supposons* désormais *fini*. Pour $\omega \in \Omega$, nous notons[1] $\mathrm{pr}\,(\omega) := \Pr\{\omega\}$, et supposons que $\mathrm{pr}\,(\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$; en d'autres termes, aucun évènement élémentaire n'est négligeable.

5.1 Un nombre appelé espérance conditionnelle

Soit X une v.a. sur Ω. Rappelons qu'on appelle espérance de X le *nombre*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,X &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathrm{pr}\,(\omega) \\ \Big(&=: \int_{\omega\in\Omega} X(\omega)dP(\omega) =: \int_\Omega X dP \text{ notations alternatives.}\Big)\end{aligned}$$

Soit $A \subseteq \Omega$; soit $\mathbb{I}_A$ la v.a. "indicatrice de A", égale à 1 sur A et 0 sinon. On a

$$\begin{aligned}\Pr A &= \sum_{\alpha\in A} \mathrm{pr}\,(\alpha) = \mathbb{E}\,\mathbb{I}_A \\ \Big(&=: \int_{\alpha\in A} dP(\alpha) =: \int_A dP \text{ avec les notations alternatives.}\Big)\end{aligned}$$

On appelle espérance conditionnelle de "X sachant A" le *nombre*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X/A] &:= \frac{1}{\Pr A}\sum_{\alpha\in A} X(\alpha)\mathrm{pr}\,(\alpha) \\ &= \frac{\mathbb{E}\,X\mathbb{I}_A}{\mathbb{E}\,\mathbb{I}_A} \\ \Big(&= \frac{1}{\int_{\alpha\in A} dP(\alpha)}\int_{\alpha\in A} X(\alpha)dP(\alpha) = \frac{\int_A X dP}{\int_A dP}.\Big)\end{aligned}$$

En d'autres termes $\mathbb{E}[X/A]$ est la moyenne des $X(\alpha)$ pour $\alpha \in A$.

A noter que

$$\mathbb{E}[X/A] = \sum_{\alpha\in A} X(\alpha)\frac{\mathrm{pr}\,(\alpha)}{\Pr A} =: \sum_{\alpha\in A} X|_A(\alpha)\mathrm{pr}_A(\alpha)$$

[1] E. Nelson, *Radically Elementary Probability Theory*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1987).

où $X|_A$ est la restriction à A de la v.a. X, et $\mathrm{pr}_A(\alpha) := \frac{\mathrm{pr}_A(\alpha)}{\mathrm{Pr}\,A} > 0$, qui est une probabilité sur A puisque

$$\sum_{\alpha \in A} \mathrm{pr}_A(\alpha) = \sum_{\alpha \in A} \frac{\mathrm{pr}\,(\alpha)}{\mathrm{Pr}\,A} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,A} \sum_{\alpha \in A} \mathrm{pr}\,(\alpha) = \frac{\mathrm{Pr}\,A}{\mathrm{Pr}\,A} = 1.$$

Si on note $\mathbb{E}_A$ l'espérance sur l'espace probabilisé (A, Pr_A) avec, pour $B \subseteq A$, $\mathrm{Pr}_A(B) := \sum_{\beta \in B} \mathrm{pr}_A(\beta)$, on a donc

$$\mathbb{E}[X/A] = \mathbb{E}_A X|_A. \tag{5.1}$$

5.2 Une v.a. appelée espérance conditionnelle

Soient $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ des parties non vides de Ω. On dit que

$$\wp := \{\Omega_1, \ldots, \Omega_m\}$$

est une partition de Ω si et seulement si les Ω_i sont deux-à-deux disjoints et Ω est la réunion des Ω_i. Pour souligner que $C := A \cup B$ est une réunion de parties disjointes A et B nous utiliserons la notation $C = A \dot\cup B$, et de façon analogue nous écrirons $\Omega = \dot\bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ pour exprimer que $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_m\}$ est une partition de Ω.

La relation $\sim$ sur Ω définie par $\omega' \sim \omega$" si et seulement si ω' et ω" appartiennent à un même $\Omega_i \in \wp$ est une relation d'équivalence. Réciproquement, si $\sim$ est une relation d'équivalence quelconque sur Ω, les classes d'équivalences $\overline{\omega}$ des éléments de Ω consituent une partition de Ω, où on a noté

$$\overline{\omega} := \{w' \in \Omega \mid \omega' \sim \omega\}.$$

Exemple : Un exemple de partition de Ω important pour ce cours, que nous noterons

$$\wp_t \quad ,$$

est la partition associée à la relation d'équivalence $\overset{t}{\sim}$ définie par

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega\text{" si et seulement si } W_r(\omega') = W_r(\omega\text{"}) \text{ pour tout } r \in [0..t],$$

Définition : Si $\wp$ est une partition de Ω et X est une v.a. sur Ω, l'*espérance conditionnelle de X relativement à la partition* $\wp$ est la v.a. notée $\mathbb{E}(X/\wp)$ définie par

$$\mathbb{E}(X/\wp)(\omega) := \mathbb{E}[X/\overline{\omega}]$$

où $\overline{\omega}$ désigne l'élément $\Omega_i \in \wp$ tel que $\omega \in \Omega_i$.

L'espérance conditionnelle est donc une v.a. qui est constante sur les éléments Ω_i de la partition. On dit aussi qu'elle est mesurable pour la partition $\wp$ dans le sens général suivant :

Définition : On dira qu'une v.a. Y est mesurable pour la partition $\wp$ (ou $\wp$-mesurable) si et seulement si Y est constante sur les éléments Ω_i de la partition $\wp$.

Exemple : Soit X une v.a. sur Ω dont les valeurs sont $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Pour $x_i \in X(\Omega)$, soit $\Omega_i = X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$. Les Ω_i forment une partition $\wp_X = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_k\}$ de Ω appelée *partion associée à X*. Dire que la v.a. Y est $\wp_X$-mesurable signifie que Y prend une même valeur y_i sur chaque Ω_i. Si on définit f par $f(x_i) := y_i$ si $x_i \in X(\Omega)$ (et, par exemple, $f(x) = 0$ si $x \notin X(\Omega)$, mais cela n'a pas d'importance), nous voyons que dire que Y est $\wp_X$-mesurable implique que $Y = f(X)$, c'est-à-dire $Y(\omega) = f(X(\omega))$. Cette idée simple porte, dans un contexte un peu plus général, le nom de *lemme de Doob-Dynkin.* Il est facile de voir que la réciproque est vraie, puisque $X(\omega') = X(\omega'')$ implique que $Y(\omega') = f(X(\omega')) = f(X(\omega'')) = Y(\omega'')$. Au lieu de $\wp_X$-mesurable, on écrit souvant X-mesurable. Nous voyons que Y est X-mesurable si et seulement si pour "mesurer Y" (c'est-à-dire, ici, connaître $Y(\omega)$), il suffit de "mesurer X" ; $Y(\omega)$ se déduit de manière déterministe (via f) de $X(\omega)$.

Exercice : Soit $X_t := \operatorname{Max}_{s\in[0..t]_{\delta t}} W_t$. Montrer que, pour $t = 2\delta t$ (puis plus généralement $t \geq 2\delta t$), X_t n'est pas W_t-mesurable mais est $\mathfrak{P}_t$-mesurable. En d'autres termes, il faut connaître tout le passé de W avant t pour connaître la valeur de X ; c'est en ce sens que $\mathfrak{P}_t$ représente l'information disponible, sur W, à l'instant t. Que pensez-vous de $Y_t := \operatorname{Min}_{s\in[0..t]_{\delta t}} W_t$ et de $Z_t := \operatorname{Max}_{s\in[t..T]_{\delta t}} W_t$?

Proposition 5.1 *Si X est une v.a. quelconque, et si Y est une v.a. mesurable pour la partition $\mathfrak{P}$, alors*

$$\mathbb{E}(XY/\mathfrak{P}) = Y\mathbb{E}(X/\mathfrak{P}). \tag{5.2}$$

Preuve : Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\overline{\omega} \in \mathfrak{P}$, et si $\alpha \in \overline{\omega}$, alors $Y(\alpha) = Y(\omega)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY/\mathfrak{P})(\omega) &= \mathbb{E}[XY/\overline{\omega}] \\
&= \sum_{\alpha\in\overline{\omega}} X(\alpha)Y(\alpha)\mathrm{pr}_{\overline{\omega}}(\alpha) \\
&= \sum_{\alpha\in\overline{\omega}} X(\alpha)Y(\omega)\mathrm{pr}_{\overline{\omega}}(\alpha) \\
&= Y(\omega)\sum_{\alpha\in\overline{\omega}} X(\alpha)\mathrm{pr}_{\overline{\omega}}(\alpha) \quad = \quad Y(\omega)\mathbb{E}[X/\overline{\omega}].
\end{aligned}$$

□

L'espérance conditionnelle est une v.a. $\mathfrak{P}$-mesurable qui ne "change pas la moyenne de X" dans le sens suivant :

Proposition 5.2 *Pour toute v.a. X sur Ω et toute partition $\mathfrak{P}$ de Ω, on a*

$$\mathbb{E}\,\mathbb{E}(X/\mathfrak{P}) = \mathbb{E}\,X. \tag{5.3}$$

Preuve : Soit $\mathfrak{P} := \{\Omega_1, \ldots, \Omega_m\}$; donc $\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m}\Omega_i$ et

$$\mathbb{E}(X/\mathfrak{P})(\omega) \quad = \quad \mathbb{E}[X/\overline{\omega}] = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\overline{\omega}}\sum_{\alpha\in\overline{\omega}} X(\alpha)\mathrm{pr}\,(\alpha)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\mathbb{E}(X/\Omega) &= \sum_{\omega\in\Omega}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}\,\overline{\omega}}\sum_{\alpha\in\overline{\omega}} X(\alpha)\mathrm{pr}\,(\alpha)\right)\mathrm{pr}\,(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\omega\in\Omega_i}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}\,\overline{\omega}}\sum_{\alpha\in\overline{\omega}} X(\alpha)\mathrm{pr}\,(\alpha)\right)\mathrm{pr}\,(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\omega\in\Omega_i}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}\,\Omega_i}\sum_{\alpha\in\Omega_i} X(\alpha)\mathrm{pr}\,(\alpha)\right)\mathrm{pr}\,(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}\,\Omega_i}\sum_{\alpha\in\Omega_i} X(\alpha)\mathrm{pr}\,(\alpha)\right)\sum_{\omega\in\Omega_i}\mathrm{pr}\,(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}\,\Omega_i}\sum_{\alpha\in\Omega_i} X(\alpha)\mathrm{pr}\,(\alpha)\right)\mathrm{Pr}\,(\Omega_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha\in\Omega_i} X(\alpha)\mathrm{pr}\,(\alpha) \quad = \quad \sum_{\alpha\in\Omega} X(\alpha)\mathrm{pr}\,(\alpha) \quad = \quad \mathbb{E}\,X.
\end{aligned}$$

□

Définition : On dit que la partition $\mathfrak{P}$ de Ω est plus fine que la partition $\mathfrak{P}$ si et seulement si pour tout $A'' \in \mathfrak{P}$ il existe $A' \in \mathfrak{P}$ tel que $A'' \subseteq A'$. Il convient alors ici de comprendre que chaque $A' \in \mathfrak{P}$ est en fait partitionné par les $A'' \in \mathfrak{P}$ tels que $A'' \subseteq A'$. On note $\mathfrak{P}|_{A'}$ cette partition de A' ; on a $\mathfrak{P}|_{A'} = \mathfrak{P} \cap \mathcal{P}(A')$.

Exemple : Epreuve commune au collège Bachelier : Nous verrons plus bas combien la notion d'espérance conditionnelle est fondamentale en finance. Donnons ici un exemple plus anodin. Soit Ω l'ensemble des élèves écrits en classe de 6ème du collège Bachelier. Chaque élève est inscrit dans une classe, et les classes de 6ème déterminent donc un partition $\boldsymbol{\wp}$ de l'ensemble des élèves en 6ème au collège.

Soit X la note à une épreuve commune à tous les élèves de 6ème. Si on probabilise Ω en donnant à chaque élève ω la même probabilité $\mathrm{pr}\,(\omega) := 1/\mathrm{Card}\,\Omega$, alors $\mathbb{E}\,X =: \mu$ est évidemment la moyenne du collège Bachelier à cette épreuve commune. $\mathbb{E}(X/\boldsymbol{\wp})$ est une nouvelle note affectée à chaque élève pour cette même épreuve : c'est sa note "par équipe", égale à la note moyenne de sa classe. La formule (5.3) assure qu'on ne changerait pas la note moyenne du collège en remplaçant les notes individuelles par les notes par équipe.

Supposons que toutes les copies du collège Bachelier ont été corrigées par les professeurs Cox, Ross, et Rubinstein. Si on considère que les correcteurs n'ont pas fait preuve de la même sévérité, on peut souhaiter faire une *péréquation* des notes : on va multiplier la note X par une v.a. Y mesurable pour la partition par correcteurs, que nous notons $\wp$. Notons $Z := XY$ la note individuelle après péréquation. On souhaite que cette note donne la même moyenne au collège, mais que la moyenne par correcteur $\mathbb{E}(Z/\wp\ )$ soit une constante, que nous notons a. Donc $a = \mathbb{E}(Z/\wp\ )$, et on a

$$a = \mathbb{E}\,a = \mathbb{E}\,\mathbb{E}(Z/\wp\ ) \overset{(*)}{=} \mathbb{E}\,Z = \mathbb{E}\,X = \mu$$

où (*) résulte de (5.3). Donc $a = \mu = \mathbb{E}\,X$. A présent

$$\mathbb{E}\,X = a = \mathbb{E}(Z/\wp\ ) = \mathbb{E}(XY/\wp\ ) \overset{(*)}{=} Y\mathbb{E}(X/\wp\ ),$$

où (*) résulte par (5.2) du fait que la v.a. Y que nous cherchons doit être mesurable pour la partition par correcteurs $\wp$. Finalement on trouve

$$Y = \frac{\mathbb{E}\,X}{\mathbb{E}(x/\wp\ )},$$

et la note individuelle Z après péréquation s'obtient par multiplication de la note individuelle X par le quotient de la moyenne du collège par la moyenne du correcteur de la copie.

La note par équipe, après péréquation est donc

$$\mathbb{E}(Z/\boldsymbol{\wp}) = \mathbb{E}\left(X\frac{\mathbb{E}\,X}{\mathbb{E}(X/\wp\ )}/\boldsymbol{\wp}\right) = \mathbb{E}\,X\ \ \mathbb{E}\left(\frac{X}{\mathbb{E}(X/\wp\ )}/\boldsymbol{\wp}\right).$$

Si MM. Cox, Ross, et Rubinstein se sont partagés les copies "par classe", c'est-à-dire que toutes les copies d'une même classe étaient corrigées par un même correcteur, la partition $\wp$ est moins fine que la partition $\boldsymbol{\wp}$ et la v.a. $\mathbb{E}(X/\wp\ )$ est donc $\boldsymbol{\wp}$-mesurable, d'où, comme Y est également $\boldsymbol{\wp}$-mesurable (puisque $\wp$ est moins fine que $\boldsymbol{\wp}$)

$$\mathbb{E}(Z/\boldsymbol{\wp}) = \mathbb{E}(XY/\boldsymbol{\wp}) = Y\ \ \mathbb{E}(X/\boldsymbol{\wp}) = \frac{\mathbb{E}\,X}{\mathbb{E}(X/\wp\ )}\ \ \mathbb{E}(X/\boldsymbol{\wp}).$$

La moyenne par classe des notes après péréquation se déduit de celle avant péréquation par multiplication du rapport de la moyenne du collège par la moyenne par correcteur.

Tout ceci n'est pas surprenant. Grâce à l'introduction de la probabilité de calcul, le calcul du prix du portefeuille de couverture ne sera guère plus difficile et pourtant il débouche sur un résultat qui, à juste titre, a impressionné bien des traders d'options.

5.3 Une marche aléatoire appelée espérance conditionnelle

Exercice 5.1 *Montrer que*

1. $\omega' \overset{t}{\sim} \omega"$ *si et seulement si* $\delta W_r(\omega') = \delta W_r(\omega")$ *pour tout* $r \in]0..t]$.
2. $\omega' \overset{t}{\sim} \omega"$ *si et seulement si* $S_r(\omega') = S_r(\omega")$ *pour tout* $r \in]0..t]$. *où* $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est la marche de Cox-Ross-Rubinstein.*

En d'autres termes, la partition $\wp_t$ peut être définie indifféremment par les valeurs, pour $r \leq t$, de l'une quelconque des trois marches aléatoires bruit-blanc $\delta\mathcal{W}$, de Wiener $\mathcal{W}$, ou de Cox-Ross-Rubinstein $\mathcal{S}$. Nous utiliserons les notations $\mathcal{W}_t$ ou $\mathcal{S}_t$ comme synonyme de $\wp_t$ lorsqu'il sera plus naturel de penser aux trajectoires de $\mathcal{W}$ ou de $\mathcal{S}$ pour interpréter la partition $\wp_t$.

Théorème 5.3 *Soit* $\wp$ *et* $\wp\!\!\wp$ *deux partitions de* Ω *; supposons que* $\wp\!\!\wp$ *soit plus fine que* $\wp$ *. On a*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\wp\!\!\wp) \ / \ \wp\,) = \mathbb{E}(X/\wp\,). \tag{5.4}$$

Preuve : Pour $\omega \in \Omega$ quelconque, on note respectivement $\overline{\omega}$ et $\overline{\overline{\omega}}$ les éléments des partions $\wp$ et $\wp\!\!\wp$ contenant ω. Observons tout d'abord que pour $\alpha \in \overline{\omega}$, on a

$$\mathbb{E}(X/\wp\!\!\wp)|_{\overline{\omega}} = \mathbb{E}_{\overline{\omega}}(X|_{\overline{\omega}}/\wp\!\!\wp|_{\overline{\omega}}). \tag{5.5}$$

En effet, on a $\alpha \in \overline{\overline{\alpha}} \subseteq \overline{\alpha} = \overline{\omega}$, et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X/\wp\!\!\wp)|_{\overline{\omega}}(\alpha) &= \frac{1}{\Pr\overline{\overline{\alpha}}} \sum_{\beta\in\overline{\overline{\alpha}}} X(\beta)\mathrm{pr}\,(\beta) \\
&= \frac{1}{\frac{\Pr\overline{\overline{\alpha}}}{\Pr\overline{\omega}}} \sum_{\beta\in\overline{\overline{\alpha}}} X(\beta)\frac{\mathrm{pr}\,(\beta)}{\Pr\overline{\omega}} \\
&= \frac{1}{\Pr_{\overline{\omega}}\overline{\overline{\alpha}}} \sum_{\beta\in\overline{\overline{\alpha}}} X(\beta)\mathrm{pr}_{\,\overline{\omega}}(\beta) \quad = \quad \mathbb{E}_{\overline{\omega}}\,(X|_{\overline{\omega}}/\wp\!\!\wp|_{\overline{\omega}})\,(\alpha).
\end{aligned}$$

A présent, soit $\omega \in \Omega$ quelconque ; on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\ \mathbb{E}(X/\wp\!\!\wp) \ / \ \wp\,)(\omega) &= \mathbb{E}[\ \mathbb{E}(X/\wp\!\!\wp) \ / \ \overline{\omega}] \\
&= \mathbb{E}_{\overline{\omega}}\ \mathbb{E}(X/\wp\!\!\wp)|_{\overline{\omega}} && (5.6)\\
&= \mathbb{E}_{\overline{\omega}}\ \mathbb{E}_{\overline{\omega}}(X|_{\overline{\omega}}/\wp\!\!\wp|_{\overline{\omega}} && (5.7)\\
&= \mathbb{E}_{\overline{\omega}}\ X|_{\overline{\omega}} && (5.8)\\
&= \mathbb{E}[X/\overline{\omega}] \quad = \quad \mathbb{E}(X/\wp\,)(\omega) && (5.9)
\end{aligned}$$

où (5.6) et (5.9) résultent de (5.1), (5.7) découle de (5.5), et (5.8) découle de (5.3). $\square$

Proposition 5.4 *Soient* s *et* t *dans* $[0..T]_{\delta t}$*. Si* $s \leq t$*, alors* $\wp_s$ *est moins fine que* $\wp_t$*.*

Preuve : C'est évident (sauf éventuellement si on veut écrire quelque chose). $\square$

Exercice : Ecrire la preuve de la proposition ci-dessus. Indication : pour $A'' \in \wp_t$ et $\alpha \in A''$, noter $\overline{\alpha}_s$ la classe de α pour la relation $\overset{s}{\sim}$ et $\overline{\alpha}_t$ la classe de α pour la relation $\overset{t}{\sim}$; montrer que $A'' = \overline{\alpha}_t \subseteq \overline{\alpha}_s =: A' \in \wp$.

Corollaire 5.5 (Principe de transitivité de la diffusion) *Pour tout* $s \leq t$ *et toute variable aléatoire* X *sur* Ω*, on a*

$$\mathbb{E}_s(\mathbb{E}_t(X)) = \mathbb{E}_s(X). \tag{5.10}$$

Observons que pour toute v.a. X sur Ω, $\mathbb{E}_t(X) := \mathbb{E}(X/\wp_t)$ définit, pour tout $t \in [0..T]$, une nouvelle v.a. sur Ω. On l'appelle la *marche aléatoire espérance-conditionnelle de la v.a.* X *associée à la* P-filtration $(\wp_t)_{t\in[0..T]}$. Voici une définition générale de ces termes :

Définition : On dira que $\mathcal{P} := (\mathcal{P}_t)_{t\in[0..T]}$ est une P-filtration de Ω (ou filtration en partitions) si et seulement si , pour tout $t \in [0..T]$, $\mathcal{P}_t$ est une partition de Ω, et si pour $t \geq s$, la partition $\mathcal{P}_t$ est plus fine que la partition $\mathcal{P}_s$.

On appelle *marche aléatoire espérance conditionnelle* de la v.a. X *associée à* la P-filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in[0..T]}$ la marche aléatoire $(\mathbb{E}_t(X)_{t\in[0..T]})$ définie par

$$\mathbb{E}_t(X)(\omega) := \mathbb{E}(X/\mathcal{P}_t)(\omega) := \mathbb{E}[X/\overline{\omega}_t],$$

où $\overline{\omega}_t$ désigne l'élément de la partition $\mathcal{P}_t$ contenant ω.

Pour la théorie de l'évaluation des options exposée ici, nous n'aurons pas besoins d'autre P-filtration que celle associée à la marche de Wiener que nous avons considérée jusqu'ici. Le "$P-$" placé devant le mot filtration se réfère au fait que nous considérons des *partitions* de Ω, au lieu des *tribus* considérée par la notion plus classique de filtration. C'est le fait de pouvoir se limiter à un ensemble Ω fini qui rend possible cette simplification. Dans la mesure où ne considèrerons ici que des filtrations en partitions, **nous écrirons** ***filtration*** **pour** P-filtration, **et omettrons donc le préfixe** P- .

Chapitre 6

Application au prix d'une option européennes

Rappelons que pour tout $p \in [0,1]$, la marche de Wiener $W^{(p)} := (W_t^{(p)})_{t\in[0..T]}$ est définie à partir de la marche $\delta W^{(p)} := (\delta W_t^{(p)})_{t\in[0..T]}$ par la relation (3.2). Les v.a. δW_t sont indépendantes, identiquement distribuées, avec $\Pr\{\delta W_t^{(p)} = +\sqrt{\delta t}\} = p$ et $\Pr\{\delta W_t^{(p)} = -\sqrt{\delta t}\} = 1-p$. L'objet de ce chapitre est de pousser la formalisation (ou mise en formules) du chapitre 4.2 qui nous a conduit à considérer la probabilité de calcul p^*, et monter notamment que le prix Π_t du portefeuille de couverture n'est autre que

$$\Pi_t = \mathbb{E}_t\left(\varphi\left(S_T^{(p^*)}\right)\right),$$

et d'en déduire une preuve du théorème 4.1. Avec une bonne compréhension du *sens* de l'espérance conditionnelle, le résultat suivant doit être évident, et il est la clé du *calcul* des espérances conditionnées par la marche de Wiener :

Proposition 6.1 *Pour tout $p \in [0,1]$ et tout $t \in]0..T]_{\delta t}$ on a*

$$\mathbb{E}_{t-\delta t}\left(\delta W_t^{(p)}\right) = \mathbb{E}\,\delta W_t^{(p)}. \tag{6.1}$$

En particulier pour la probabilité de calcul $p^* = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t}$,

$$\mathbb{E}^*_{t-\delta t}(\delta W_t) := \mathbb{E}_{t-\delta t}(\delta W_t^*) := \mathbb{E}_{t-\delta t}\left(\delta W_t^{(p^*)}\right) = -\frac{\mu}{\sigma}\delta t. \tag{6.2}$$

6.1 Couverture dynamique et espérance conditionnelle

Au chapitre 4.2 nous avons expliqué pour toute marche binaire

$$S_t(\omega) = S_{t-\delta t}(\omega)(1 + \mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t}) =: S^{\pm}_{t-\delta t}(\omega)$$

comment couvrir une option européenne $\varphi(S_T)$. Nous avons noté $\Pi(t,S)$ la valeur du portefeuille de couverture, en fonction de la date t et la valeur la valeur $S = S_t(\omega)$ de l'action à cette date. L'idée même de portefeuille de couverture d'un option européenne veut que

$$\Pi(T, S_T(\omega)) = \varphi(S_T(\omega)). \tag{6.3}$$

Nous avons vu que la valeur du portefeuille de couverture satisfait la relation de récurrence descendante sur $t \in]0..T]_{\delta t}$.

$$\Pi(t-\delta t, S_{t-\delta t}(\omega)) = p^+\Pi(t, S^+_{t-\delta t}(\omega)) + p^-\Pi(t, S^-_{t-\delta t}(\omega)), \tag{6.4}$$

$$\text{avec } p^{\pm} = \left(\frac{1}{2} \mp \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t}\right).$$

C'est ce qui nous a conduit à considérer la marche de Wiener boîteuse $(W_t^*) = (W_t^{(p^*)})$, avec

$$p^* = \Pr\{\delta W^{(p^*)} = +\sqrt{\delta t}\} = p^+ = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t}.$$

En d'autres termes, pour tout $t \in [0..T]$, les relations (6.3) et (6.4) définissement par récurrence descendante les variables aléatoires Π_t,

$$\Pi_t(\omega) := \Pi\left(t, S_t^{(p^*)}(\omega)\right).$$

Théorème 6.2 (formule fondamentale de valorisation d'une option) *Soit $(S_t^*)_{t\in[0..T]}$ la marche de Cox-Ross-Rubinstein associée au choix $p := p^* = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t}$. On a, pour tout $s \in [0..T]$,*

$$\Pi_s = \mathbb{E}_s(\varphi(S_T^*)). \tag{6.5}$$

Preuve : Montrons la formule (6.5) par récurrence descendante sur $s \in [0..T]$. Elle est vraie pour $s = T$; en effet, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_T(\varphi(S_T))(\omega) &= \mathbb{E}\left[\varphi(S_T)/\overline{\omega}_T\right] = \mathbb{E}_{\overline{\omega}_T}(\varphi(S_T)|_{\overline{\omega}}(\omega)) \\ &= \mathbb{E}_{\overline{\omega}_T}\varphi(S_T(\omega)) = \varphi(S_T(\omega))\mathbb{E}_{\overline{\omega}_T}1 \\ &= \varphi(S_T(\omega)) = \Pi(T, S_T(\omega)).\end{aligned}$$

Supposons la formule (6.5) vraie pour $s = t$: pour tout $\omega \in \Omega$, $\Pi(t, S_t(\omega)) = \mathbb{E}_t(\varphi(S_T))(\omega)$. Vérifions qu'elle est encore vraie pour $s = t - \delta t$. Posons $\overline{\omega}^+_{t-\delta t} = \{\alpha \in \overline{\omega}_{t-\delta t} \mid \delta W_t(\alpha) = +\sqrt{\delta t}\}$ et analogue pour $\overline{\omega}^-_{t-\delta t}$. On a

$$\mathrm{Pr}_{\overline{\omega}_{t-\delta t}}(\overline{\omega}^\pm_{t-\delta t}) = \mathrm{Pr}\,\{\delta W_t^* = \pm\sqrt{\delta t}\} = p^\pm. \tag{6.6}$$

En effet, par indépendance de δW_t^* des δW_s^* pour $s < t$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}_{\overline{\omega}_{t-\delta t}}(\omega^\pm_{t-\delta t}) &= \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\overline{\omega}_{t-\delta t}}\mathrm{Pr}\,\{\delta W_{\delta t}^* = \delta W_{\delta t}^*(\omega), \ldots, \delta W_{t-\delta t}^* = \delta W_{t-\delta t}^*(\omega), \delta W_t^* = \pm\sqrt{\delta t}\} \\ &= \frac{\mathrm{Pr}\,\{\delta W_{\delta t}^* = \delta W_{\delta t}^*(\omega), \ldots, \delta W_{t-\delta t}^* = \delta W_{t-\delta t}^*(\omega)\}\mathrm{Pr}\,\{\delta W_t^* = \pm\sqrt{\delta t}\}}{\mathrm{Pr}\,\overline{\omega}_{t-\delta t}} \\ &= \mathrm{Pr}\,\{\delta W_t^* = \pm\sqrt{\delta t}\} = p^\pm.\end{aligned}$$

A présent nous pouvons achever la preuve : soit $\omega \in \Omega$ et reprenons le mécanisme fondamental du couverture exposé au paragraphe 4.2 dont nous reprenons ici les notations, et aboutissant à la formule de couverture (4.9) et de valeur de l'option (4.10). Pour $\alpha \in \overline{\omega}_{t-\delta t}$, posons

$$S := S_{t-\delta t}(\omega) = S_{t-\delta t}(\alpha)$$

puisque $\alpha \in \overline{\omega}_{t-\delta t}$. Si $\alpha \in \overline{\omega}^+_{t-\delta t}$ on a donc $S_t(\alpha) = S^+$, et on a de même $S_t(\alpha) = S^-$ si $\alpha \in \overline{\omega}^-_{t-\delta t}$. Nous avions posé $\Pi^\pm = \Pi(t, S^\pm) = \Pi(t, S_{t-\delta t}(\omega)^\pm) = \Pi(t, S_t(\alpha))$ si $\alpha \in \overline{\omega}^\pm_{t-\delta t}$. En se souvenant que $\Pi := \Pi_{t-\delta t}(\omega) = \Pi_{t-\delta t}(\alpha)$ si $\alpha \in \overline{\omega}_{t-\delta t}$, le mécanisme de couverture abouti au calcul élémentaire suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t-\delta t}(\varphi(S_T))(\omega) &= \mathbb{E}_{t-\delta t}(\mathbb{E}_t(\varphi(S_T)))(\omega) \qquad \text{par (5.10) ; notez l'introduction du conditionnement !} \\ &:= \mathbb{E}[\mathbb{E}_t(\varphi(S_T) \ / \ \overline{\omega}_{t-\delta t}] \\ &= \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\overline{\omega}_{t-\delta t}} \sum_{\alpha\in\overline{\omega}_{t-\delta t}} \mathbb{E}_t(\varphi(S_T))(\alpha)\mathrm{pr}\,\alpha \\ &= \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\overline{\omega}_{t-\delta t}} \sum_{\alpha\in\overline{\omega}_{t-\delta t}} \Pi(t, S_t(\alpha))\mathrm{pr}\,\alpha\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Pr \overline{\omega}_{t-\delta t}} \left(\sum_{\alpha \in \overline{\omega}^+_{t-\delta t}} \Pi(t, S_t(\alpha)) \mathrm{pr}\, \alpha + \sum_{\alpha \in \overline{\omega}^-_{t-\delta t}} \Pi(t, S_t(\alpha)) \mathrm{pr}\, \alpha \right) \\
&= \frac{1}{\Pr \overline{\omega}_{t-\delta t}} \left(\sum_{\alpha \in \overline{\omega}^+_{t-\delta t}} \Pi(t, S^+) \mathrm{pr}\, \alpha + \sum_{\alpha \in \overline{\omega}^-_{t-\delta t}} \Pi(t, S^-) \mathrm{pr}\, \alpha \right) \\
&= \frac{1}{\Pr \overline{\omega}_{t-\delta t}} \left(\sum_{\alpha \in \overline{\omega}^+_{t-\delta t}} \Pi^+ \mathrm{pr}\, \alpha + \sum_{\alpha \in \overline{\omega}^-_{t-\delta t}} \Pi^- \mathrm{pr}\, \alpha \right) \\
&= \frac{1}{\Pr \overline{\omega}_{t-\delta t}} \left(\Pi^+ \sum_{\alpha \in \overline{\omega}^+_{t-\delta t}} \mathrm{pr}\, \alpha + \Pi^- \sum_{\alpha \in \overline{\omega}^-_{t-\delta t}} \mathrm{pr}\, \alpha \right) = \Pi^+ \Pr\{\overline{\omega}^+_{t-\delta t}\} + \Pi^- \Pr\{\overline{\omega}^-_{t-\delta t}\} \\
&= \Pi^+ p^+ + \Pi^- p^- \qquad \text{par (6.6)}, \\
&= \Pi_{t-\delta t} \qquad \text{par (4.10)}, \\
&:= \Pi_{t-\delta t}(\omega),
\end{aligned}
$$

ce qui montre que (6.5) est vrai pour $s = t - \delta t$ et achève la preuve. □

Notations : On aura compris que la modélisation S de la dynamique du cours de l'action porte uniquement sur le choix des trajectoires possibles de ce cours, déterminé par le choix de μ et σ. Le choix de la probabilité $p = p^*$ *n'est pas* un choix de modélisation, mais introduit pour avoir la formule (6.5), très commode pour le calcul. Il est d'usage de poser

$$\mathbb{E}^*_t(\varphi(S_T)) := \mathbb{E}_t(\varphi(S^*_T)),$$

qui souligne que la probabilité pour laquelle on considère l'espérance (conditionnelle) est cette probabilité de calcul déterminée par le choix de p^* ; la valeur $\Pi_t(\omega) = \Pi(t, S_t(\omega))$ est alors une espérance conditionnelle $\mathbb{E}^*_t$ pour ce choix de la probabilité.

Corollaire 6.3 *La valeur Π_0 du portefeuille de couverture d'une option européenne de pay-off $\varphi(S)$ est donnée par*

$$\Pi_0 = \mathbb{E}\left(\varphi(S^*_T)\right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p_+^j p_-^{n-j} \varphi(S_0 u_+^j u_-^{n-j}). \tag{6.7}$$

6.2 Application : le formule de Cox, Ross, et Rubinstein

Notations : On pose

$$\Phi(a, n, p) := \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

Théorème 6.4 (formule de Cox-Ross-Rubinstein)
Posons $p^* := p_+ := \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t}$ et $q^* = p_+ u_+ = p^*(1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})$. Soit

$$a := \mathit{Min}\{\ j \in \mathbb{N} \ \mid\ S_0 u_-^j u_+^{n-j} > K\ \}.$$

On note C_0 le prix Π_0 du portefeuille de couverture d'une option call européenne. On a

$$C_0 := \mathbb{E}\,(S_T - K)^+ = S_0 \Phi(a, n, q^*) - K \Phi(a, n, p^*). \tag{6.8}$$

Preuve : Observons que, du fait de la relation de martingale (4.12)

$$S = p_+ S^+ + p_- S^- = p_+ S u_+ + p_- S u_-,$$

on a $1 = p_+ u_+ + p_- u_-$, et donc $1 - q^* = 1 - p_+ u_+ = p_- u_-$. A présent, par (6.7), on a

$$\begin{aligned}
C_0 &= \mathbb{E}\,(S_T^* - K)^+ = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j}(S_0 u_+^j u_-^{n-j} - K)^+ \\
&= \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p_+^j p_-^{n-j}(S_0 u_+^j u_-^{n-j} - K) \\
&= S_0 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} (u_+ p_+)^j (u_- p_-)^{n-j} - K \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p_+^j p_-^{n-j} \\
&= S_0 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} q^{*j}(1-q^*)^{n-j} - K \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j} \\
&= S_0 \Phi(a, n, q^*) - K \Phi(a, n, p^*)
\end{aligned}$$

□

6.3 Vers la formule de Black et Scholes

Nous souhaitons à présent trouver une estimation de C_0 lorsque n est grand. Voici un résultat qui nous sera utile. Soulignons qu'il s'agit d'une égalité et non d'une approximation entre une somme finie et une intégrale, d'où le nom de "formule magique" que nous lui avons donné. Il s'agit d'une intégrale eulerienne de première espèce[1] (fonction Beta incomplète).

Proposition 6.5 (formule magique) *On a*

$$\Phi(a, n, p) := \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = a \binom{n}{a} \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a} dt. \tag{6.9}$$

Preuve : Posons $\Phi(a) := a\binom{n}{a} \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a} dt$. On montre la proposition par récurrence descendante.

- Pour $a = n$, on a $\Phi(n) = n\binom{n}{n} \int_0^p t^{n-1} dt = [t^n]_{t=0}^p = p = \Phi(n, n, p, 1)$.
- Soit $a < n$ et supposons la formule (6.9) vraie pour $a + 1$. Notons que

$$a \binom{n}{a} \frac{n-a}{a} = \frac{n\,!}{a\,!(n-a)\,!}(n-a) = (a+1)\frac{n\,!}{(a+1)\,!(n-(a+1))\,!} = (a+1)\binom{n}{a+1}.$$

A présent, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(a) &= a \binom{n}{a} \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a} dt \\
&= a \binom{n}{a} \left(\left[t^a (1-t)^{n-a} \right]_{t=0}^{t=p} + \frac{n-a}{a} \int_0^p t^{(a+1)-1}(1-t)^{n-(a+1)} dt \right) \\
&= a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} + (a+1)\binom{n}{a+1} \int_0^p t^{(a+1)-1}(1-t)^{n-(a+1)} dt \\
&= a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} + \Phi(a+1) \\
&= a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} + \sum_{j=a+1}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.
\end{aligned}$$

□

[1]Les intégrale euleriennes de *seconde* espèce font intervenir la fonction exponentielle, et débouchent, elles, sur la fonction gamma : $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Une intégration par partie montre facilement que $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, et $\Gamma(1) = 1$, d'où $\Gamma(n) = (n-1)\,!$. Nous somme reconnaissant à Adri Olde-Daalhuis de l'université d'Edinbourg d'avoir attiré notre attention sur le parti qui peut être tiré des intégrale euleriennes de *première* espèce pour le calcul asymptotique.

Chapitre 7

La formule de Black et Scholes

Au chapitre précédent, nous avons vu, qu'étant donné une discrétisation de $[0, T]$ en n intervalles de longueur égale δt, comment calculer la valeur $\Pi_0^{(n)}$ d'une option européenne. Dans le cas particulier d'une option call, caractérisée par un pay-off $\varphi(S_T) = (S_T - K)^+$, cette valeur $C_0^{(n)}$ est donnée par la formule de Cox-Ross-Rubinstein (6.2)

$$C_0^{(n)} = \mathbb{E}\,(S_T - K)^+ = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p_+^j p_-^{n-j} (S_0 u_+^j u_-^{n-j} - K)^+ = S_0 \Phi(a, n, q^*) - K\Phi(a, n, p^*), \tag{7.1}$$

avec

$$a := \mathrm{Min}\{\ j \in \mathbb{N} \ \mid \ S_0 u_+^j u_-^{n-j} > K \ \} =: [J] + 1 \text{ où } J \text{ est défini par } \quad S_0 \left(\frac{u_+}{u_-}\right)^J u_-^n = K,$$

$$u_\pm = 1 \pm \sigma\sqrt{\delta t} + \mu\delta t$$

$$p^* := p_+ \ := \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t} \quad , \quad q^* = p_+ u_+ = p^*(1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}) = \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2 - \mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t} + 0\delta t + \frac{\mu^2}{2\sigma}\delta t\sqrt{\delta t} \quad ,$$

$$\text{et} \quad \Phi(a, n, p) := \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = a\binom{n}{a} \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a} dt, \tag{7.2}$$

compte tenu de la formule magique (6.9).

Il paraît souvent raisonable de penser que le modèle de Cox, Ross, et Rubinstein est plus pertinent pour les grandes valeurs de n. Dans ce cas, une *approximation* naturelle de $C_0^{(n)}$ est donnée par la limite $C_0^* := \lim_{n\to\infty} C_0^{(n)}$.

Théorème 7.1 (Formule de Black-Scholes) *On pose* $\mathcal{N}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi$,

$$d_+ := \frac{\ln(S_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \quad , \ et \quad d_- := \frac{\ln(S_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_+ - \sigma\sqrt{T}.$$

La limite $C_0^* := \lim_{n\to\infty} C_0^{(n)}$ *du prix du portefeuille de couverture d'une option call européenne est donnée par la formule*

$$C_0^* = S_0\mathcal{N}(d_+) - K\mathcal{N}(d_-). \tag{7.3}$$

Notons que C_0^* ne dépend pas de la valeur de μ, ce qui fait dire aux financiers que ce qui se négocie sur le marché des options, c'est de la volatilité ! Ceci peut se comprendre en termes économiques par la remarque que ce qui s'échange dans une option, c'est du risque, et que ce risque est mesuré par le terme aléatoire $\pm\sigma\sqrt{\delta t}$, c'est-à-dire par σ. Ceci n'explique toutefois pas entièrement la disparition de μ ; en effet, selon la formule de Black et Scholes, il n'y aurait aucun risque attaché à une erreur de modèle qui serait issue, pour les calculs, d'une mauvaise estimation de la valeur du paramètre μ. En fait, cette disparition est liée au fait que C_0^* est une approximation de $C_0^{(n)}$ obtenue par passage à la limite sur n. Néanmoins, l'influence de la valeur de μ est petite devant celle de σ, et on peut voir là une explication du succès du marché des produits financiers dérivés sur lequel la dynamique "hors risque" des entreprises côtées, mesurée par μ et difficile à déterminer, joue un rôle secondaire. Une question serait de savoir si la présence du marché des dérivés a permi de mieux contrôler la dynamique de σ (supposée constante dans la théorie Black-Cox-Ross-Rubinstein-Scholes abordée ici).

Observons que le modèle CRR est fondé sur le choix $u_\pm = 1 \pm \sigma\sqrt{\delta t} + \mu\delta t = 1 \pm \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{n}} + \frac{\mu T}{n}$. Donc, quitte à remplacer σ par $\sigma\sqrt{T}$ et μ par μT, *on peut*, pour la preuve, *supposer que* $T = 1$.

Au vu des formule (7.1) et (7.2), on comprend que le calcul de la limite $C_0^{(n)}$ peut se ramener à l'étude de l'asymptotique de $a := a^{(n)}$, $\binom{n}{a} := \binom{n}{a^{(n)}}$, et de $I(a,p) := I^{(n)}(a^{(n)}, p^{(n)}) := \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a}dt$, pour $p := p^{*(n)}$ et $q := q^{*(n)}$ à laquelle sera consacré l'essentiel de ce chapitre.

7.1 Rappels d'asymptotique infinitésimale

A noter que, lorsque n tend vers l'infini, $a = a^{(n)}$ tend vers l'infini, ainsi que $\binom{n}{a} = \binom{n}{a^{(n)}}$, alors que $I(a,p) = I^{(n)}(a^{(n)}, p^{(n)})$ tend vers 0. L'asymptotique ne se borne pas à calculer des limites, elle s'intéresse à la manière de s'approcher de cette limite, "comme" cn, $c\sqrt{n}$, $c/\sqrt{n}$, ou c/n par exemple. Classiquement, ceci se fait en introduisant des fonctions $o(n)$, $o(\sqrt{n})$, $o(1/\sqrt{n})$, ou $o(1/n)$ pour résumer le terme d'erreur, et $\varepsilon(n)$ pour représenter ce qui tend vers zéro.

Ici, nous allons utiliser les méthodes des l'analyse infinitésimale (formalisée), qui découlent de l'Analyse Non Standard (ANS), une théorie mathématique sophistiquée branche de la Logique Mathématique. L'analyse infinitésimale cherche avant tout à tirer de l'ANS une notion primitive d'ordre de grandeur sur les nombre, qui n'existe dans les mathématiques traditionnelles que par l'introduction, à la place des nombres, de fonctions d'un ou plusieurs paramètres, ici n. Elle atteint ce résultat par l'introducion d'un mot : *standard*[1]. L'application de l'analyse infinitésimale peut alors supposer standard tous les paramètre libres du problème : ici S_0, K, μ, σ, et T. On fixe alors n à une valeur i-grande, ce qui fixe également les valeurs de a, p^*, etc ... d'où l'allègement de l'écriture que nous avons adoptée. Comme $S_0\mathcal{N}(d_+) - K\mathcal{N}(d_-)$ est standard (voyez-vous pourquoi ?), il convient de montrer que $C_0 - C_0^*$ est i-petit.

Bien des résultats de l'analyse infinitésimale se traduisent immédiatement en équivalent classique et réciproquement ; nous les appelons des résultats d'analyse infinitésimale élémentaires. D'autres n'ont pas d'équivalent classique, non que ceux-ci ne peuvent pas exister, mais ils perdent alors leur simplicité[2].

Voici les résultats d'analyse infinitésimale élémentaire que nous allons utiliser. Rappelons qu'un nombre réel peut être i-petit (ϕ), limité (£), ou i-grand. S'il est limité et non i-petit, il est dit appréciable (@@)[3]. Tout réel standard est limité($2 + \frac{1}{n}$ montre que la réciproque est fausse) et 0 est le seul réel standard i-petit ; les autres réels standard sont donc appréciable. On a

$$\phi + \phi = \phi \quad ; \quad \phi£ = \phi \quad ; \quad \frac{\phi}{@@} = \phi \quad ;$$

Si ε est i-petit, alors

$$\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon(1+\phi) \quad ; \quad \ln(1+\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2\left(-\frac{1}{2} + \phi\right) = \varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon\phi\right) = \varepsilon(1+\phi).$$

Si N est i-grand et x limité, alors

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x(1+\phi) \quad ;$$

$$e^{x+\phi} = e^x e^\phi = e^x(1+\phi) \quad ;$$

$$N\,! = N^N e^{-N}\sqrt{2\pi}\sqrt{N}(1+\phi) \text{ (Formule de Stirling}^4\text{)}$$

Voici un résultat d'analyse infinitésimale non élémentaire :

[1] Essentiellement, une quantité sera standard dès lors qu'elle est indépendante de toute valeur d'un paramètre caché, comme l'est tout objet des mathématiques defini de manière unique : 0, 1, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, +, ∗, exp sont standard, mais tout ensemble infini contient nécessairement des éléments *non-standard*. Dans $\mathbb{N}$ ces éléments non-standard se regroupent : ils sont tous plus grands que les éléments standard ; ceci permet de les choisir pour définir la notion d'infiniment grand (i-grand). Si n est i-grand, $1/n$ est i-petit ; 2 est standard car $2 = 1 + 1$, mais $2 + \frac{1}{n}$ ne l'est pas, sinon $n = 1/(2 + \frac{1}{n} - 2)$ le serait. De façon générale x est i-petit si et seulement si $|x| \leq \frac{1}{m}$ pour tout entier m standard.

[2] mais ceci est bien-entendu une affaire de goût.

[3] Les symboles ϕ, £, et @@ du calcul de Van den Berg représentent, dans un calcul, les nombres dont on sait que seul leur ordre de grandeur sera utile dans la suite du calcul. Deux occurences distinctes de chacun de ces symboles ne représentent généralement pas le même nombre. Ainsi généralement $\phi - \phi \neq 0$, puisque par exemple $\frac{3}{n} - \frac{2}{n} (= \frac{1}{n}) \neq 0$.

[4] si N n'est pas entier, remplacer N ! par $\Gamma(N-1)$.

Proposition 7.2 *Soit Y_- i-grand négatif, b limité, et $B \simeq b$ standard. Supposons qu'il existe des fonctions standard F_0 et ϕ, définies sur $\mathbb{R}$, intégrables sur toute demi-droite $]-\infty, \beta]$, telles que*

1. *$F(Y) \simeq F_0(Y)$ pour tout Y limité du domaine de F,*
2. *$|F(Y)| \leq \phi(Y)$ pour tout Y i-grand du domaine de F.*

Alors

$$\int_{Y_-}^{b} F(Y)dY = \int_{-\infty}^{B} F_0(Y)dY \quad + \quad \oslash \ .$$

7.2 Calcul asymptotique

Dans cette section nous allons calculer une asymptotique des trois quantités a, $\binom{n}{a}$, et $I(a,p) := \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a}dt$ dans trois lemmes.

7.2.1 Asymptotique de a

Lemme 7.3

$$a = \frac{n}{2} + \sqrt{n}(A + \oslash) \quad avec \quad A = -\frac{\ln(S_0/K) + \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}. \tag{7.4}$$

Preuve : Comme $a = [J] + 1$, avec $S_0 \left(\frac{u_+}{u_-}\right)^J u_-^n = K$, on a

$$\begin{aligned} J &= \ln \frac{K}{S_0 u_-^n} / (\ln(u_+) - \ln(u_-)) \\ &= (l - \ln u_-)/(\ln(u_+) - \ln(u_-)) \end{aligned}$$

avec $l := \ln(K/S_0) = -\ln(S_0/K)$. Or

$$\begin{aligned} \ln u_\pm &= \ln(1 \pm \sigma\sqrt{\delta t} + \mu\delta t) = \ln(1 + \sqrt{\delta t}(\pm\sigma + \mu\sqrt{\delta t})) \\ &= \sqrt{\delta t}(\pm\sigma + \mu\sqrt{\delta t}) + \delta t(\pm\sigma + \mu\sqrt{\delta t})^2 \left(-\frac{1}{2} + \phi\right) \\ &= \pm\sigma\sqrt{\delta t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \phi\right)\delta t \end{aligned}$$

puisque μ et σ sont standard donc limités ; d'où

$$\frac{1}{\ln(u_+) - \ln(u_-)} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\delta t} + \phi\delta t} = \frac{1}{\sqrt{\delta t}} \frac{1}{2\sigma\left(1 + \frac{\phi}{2\sigma}\sqrt{\delta t}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\delta t}}\frac{1}{2\sigma}(1 + \phi\sqrt{\delta t}) = \frac{1}{\sqrt{\delta t}}\frac{1}{2\sigma} + \phi.$$

Utilisons à présent que $n\delta t = T = 1$; on a $-n\ln(u_-) = +\sigma\sqrt{n} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \phi)$, d'où

$$\begin{aligned} J &= (\sigma\sqrt{\delta t} + l - \mu + \frac{\sigma^2}{2} + \phi)(\sqrt{\delta t}\frac{1}{2\sigma} + \phi) \\ &= \frac{\sigma n}{2\sigma} + \sqrt{\delta t}\left(\frac{l-\mu}{2\sigma} + \frac{\sigma}{4} + \frac{\phi}{2\sigma} + \phi\sigma + \phi\left(l - \mu + \frac{\sigma^2}{2} + \phi\right)\right) \\ &= \frac{n}{2} + \sqrt{n}M \ , \text{ avec} \end{aligned}$$

$$M \simeq \frac{l-\mu}{2\sigma} + \frac{\sigma}{4} = -\frac{\ln(S_0/K) + \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} =: A.$$

Donc, comme $a = [J] + 1 = J + \alpha$, avec $\alpha \in]0,1]$, et comme $M = A + \phi$,

$$a = J + \alpha = \frac{n}{2} + \sqrt{n}M + \sqrt{n}\alpha = \frac{n}{2} + \sqrt{n}(M + \phi) = \frac{n}{2} + \sqrt{n}(A + \phi).$$

□

7.2.2 Asymptotique de $\binom{n}{a}$

Lemme 7.4

$$\binom{n}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{\sqrt{n}}e^{-2A^2}(1+\phi). \tag{7.5}$$

Preuve : Posons $n = 2m$ et $a = m + L = m + \sqrt{2m}M$, c'est-à-dire $L = \sqrt{2m}M$, avec $M = A + \phi$, avec A défini dans le lemme 7.3. Par la formule de Stirling, et en remarquant que $\frac{1+\phi}{(1+\phi)(1+\phi)} = 1 + \phi$, on a

$$\begin{aligned}
\binom{n}{a} &= \frac{(2m)^{2m}e^{-2m}\sqrt{2\pi}\sqrt{2m}}{(m+L)^{m+L}e^{-(m+L)}\sqrt{2\pi}\sqrt{m+L}(m-L)^{m-L}e^{-(m-L)}\sqrt{2\pi}\sqrt{m-L}}(1+\phi)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2^{2m}m^{2m}}{((m+L)(m-L))^m}\left(\frac{m-L}{m+L}\right)^L\sqrt{\frac{2m}{(m+L)(m-L)}}(1+\phi)\\
&= \frac{4^m}{\sqrt{2\pi}}\frac{m^{2m}}{m^{2m}\left(1-\frac{L^2}{m^2}\right)^m}\left(\frac{1-\frac{L}{m}}{1+\frac{L}{m}}\right)^L\frac{\sqrt{2}\sqrt{m}}{m\sqrt{1-\frac{L^2}{m^2}}}(1+\phi)
\end{aligned}$$

et comme $L = \sqrt{2m}M$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4^m}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\left(1-\frac{2M^2}{m}\right)^m}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}M}{\sqrt{m}}}{1+\frac{\sqrt{2}M}{\sqrt{m}}}\right)^{\sqrt{m}\sqrt{2}M}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M^2}{m}}}(1+\phi)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{4^m}{\sqrt{m}}\frac{1}{e^{-2M^2}(1+\phi)}\left(\frac{e^{-\sqrt{2}M}(1+\phi)}{e^{+\sqrt{2}M}(1+\phi)}\right)^{\sqrt{2}M}\frac{1}{1+\phi}(1+\phi)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{4^m}{\sqrt{m}}e^{+2M^2}e^{-(2\sqrt{2}M^2)\sqrt{2}M}(1+\phi)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{4^m}{\sqrt{m}}e^{-2M^2}(1+\phi) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{\sqrt{n}}e^{-2A^2}(1+\phi),
\end{aligned}$$

puisque $e^{-2M^2} = e^{-2(A+\phi)^2} = e^{-2A^2+\phi} = e^{-2A^2}(1+\phi)$. □

7.2.3 Asymptotique de $I(a,p) := \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a}dt$

Lemme 7.5 *Pour $p = \frac{1}{2} + \sqrt{\delta t}(B+\phi)$ avec B standard, on a*

$$I(a,p) := \int_0^p y^{a-1}(1-y)^{n-a}dy = \frac{2^{-n}}{\sqrt{n}}\left(\int_{-\infty}^{B} 2e^{-2Y^2+4AY}dY + \phi\right). \tag{7.6}$$

Preuve : Posons une nouvelle fois $n = 2m$ et $a = m + L$; on a donc

$$L - 1 = \sqrt{2m}(A+\phi) - \sqrt{2m}/\sqrt{2m} = \sqrt{2m}(A+\phi).$$

A présent

$$I(a,p) := \int_0^p y^{m+L-1}(1-y)^{m-L}dy = \int (y(1-y))^m\left(\frac{y}{1-y}\right)^{L-1}\frac{dy}{1-y}.$$

La présence du terme $(y(1-y))^m = e^{mh(y)}$, où $h(y) := \ln(y(1-y))$ présente un maximum au point $y_0 = \frac{1}{2}$ nous conduit à appliquer la *méthode de Laplace*, qui consiste à faire une loupe au tour du maximum de h, et, plus précisément, à poser

$$y = y_0 + Y/\sqrt{2m}.$$

On a donc $y = \frac{1}{2} + Y/\sqrt{2m}$; $dy = dY/\sqrt{2m}$; $y(1-y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{Y}{\sqrt{2m}}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{Y}{\sqrt{2m}}\right) = 2^{-2}\left(1 - \frac{2Y^2}{m}\right)$;

$$\frac{y}{1-y} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{Y}{\sqrt{2m}}}{\frac{1}{2}-\frac{Y}{\sqrt{2m}}} = \frac{1+\frac{2Y}{\sqrt{2m}}}{1-\frac{2Y}{\sqrt{2m}}} \quad ; \quad \frac{1}{1-y} = \frac{2}{1-\frac{2Y}{\sqrt{2m}}}.$$

Enfin $y = 0$ si et seulement si $Y = -\frac{\sqrt{2m}}{2} =: Y_-$ qui est i-grand négatif, et $y = p = \frac{1}{2} + \sqrt{\delta t} b$ si et seulement si $Y = \sqrt{2m}\sqrt{\delta t} b = b$ puisque $2m\delta t = T = 1$. Ainsi

$$I(a,p) = \int_0^p e^{m\ln(y(1-y))}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\sqrt{2m}(A+\phi)} dy = \frac{2^{-2m+1}}{\sqrt{2m}}\int_{Y_-}^b e^{H(Y)}G(Y)dY \quad \text{, avec}$$

$$H(Y) = m\ln\left(1 - \frac{2Y^2}{m}\right) \quad \text{, et} \quad G(Y) = \left(\frac{1+\frac{2Y}{\sqrt{2m}}}{1-\frac{2Y}{\sqrt{2m}}}\right)^{\sqrt{2m}(A+\phi)} \frac{1}{1-\frac{2Y}{\sqrt{2m}}}.$$

Nous observons que tant que Y est limité, on a $\ln(1-2Y^2/m) = -\frac{2Y^2}{m}(1+\phi)$,

$$H(Y) = m\left(\frac{1}{m}(-2Y^2+\phi)\right) = -2Y^2 + \phi \quad \text{, et} \quad G(Y) = \frac{e^{2Y}(1+\phi)}{e^{-2Y}(1+\phi)}\frac{1}{1+\phi} = e^{4Y}(1+\phi),$$

et lorsque Y est i-grand et contenu dans le domaine d'intégration, donc négatif, on a $0 < G(Y) \leq 1$ et, comme $\ln(1+u) \leq u$, $0 \leq H(Y) \leq -2Y^2$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 7.2 avec $F(Y) := e^{H(Y)}G(Y)$, $F_0(Y) := e^{-2Y^2+4Y}$, et $\phi(Y) = e^{-2Y^2}$ et obtenons

$$I(a,p) = \frac{2^{-n}}{\sqrt{n}}\left(\int_{-\infty}^B 2e^{-2Y^2+4Y}dY + \phi\right).$$

□

7.3 Preuve de la formule de Black et Scholes

Pour prouver la formule de Black et Scholes, il suffit à présent d'appliquer les formules (7.4), (7.5), et (7.6) :

Preuve : (de la formule de Black et Scholes (7.1)) Appliquons la formule magique (6.9) à la formule de Cox-Ross-Rubinstein (6.8) ; on a, en remarquant que $a = \frac{n}{2} + \sqrt{n}(A+\phi) = \frac{n}{2}(1+\phi)$,

$$\begin{aligned}
C_0^{(n)} &= S_0\Phi(a,n,q^*) - K\Phi(a,n,p^*) \\
&= a\binom{n}{a}\left[S_0 I\left(a, \frac{1}{2} + \sqrt{\delta t}\left(\frac{\sigma^2-\mu}{2\sigma} + \phi\right)\right) - KI\left(a, \frac{1}{2} + \sqrt{\delta t}\left(\frac{-\mu}{2\sigma}\right)\right)\right] \\
&= \frac{n}{2}(1+\phi)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{\sqrt{n}}e^{-2A^2}(1+\phi)\frac{2^{-n}}{\sqrt{n}} \times \qquad \text{avec} \quad A = -\frac{\ln(S_0/K) + \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} \\
&\quad \times \left[S_0\left(\int_{-\infty}^{\frac{\sigma^2-\mu}{2\sigma}} 2e^{-2Y^2+4AY}dY + \phi\right) - K\left(\int_{-\infty}^{\frac{-\mu}{2\sigma}} 2e^{-2Y^2+4AY}dY + \phi\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+\phi)\left[S_0\left(\int_{-\infty}^{\frac{\sigma^2-\mu}{2\sigma}} 2e^{-2Y^2+4AY-2A^2}dY + \phi\right) - K\left(\int_{-\infty}^{\frac{-\mu}{2\sigma}} 2e^{-2Y^2+4AY-2A^2}dY + \phi\right)\right] \\
&= \left[S_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\sigma^2-\mu}{\sigma}-2A}\varphi(y)dy - K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{-\mu}{\sigma}-2A}\varphi(y)dy + \phi\right](1+\phi) \\
&\quad \text{avec } e^{-2Y^2+4AY-2A^2} = e^{-2(Y-A)^2} = e^{-\frac{y^2}{2}} =: \varphi(y), \text{ où } y := 2(Y-A) \\
&\simeq S_0\mathcal{N}(d_+) - K\mathcal{N}(d_-),
\end{aligned}$$

puisque, pour $T = 1$, $\frac{\sigma^2-\mu}{\sigma} - 2A = \frac{\sigma^2-\mu}{\sigma} + 2\frac{\ln(S_0/K)+\mu-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} = d_+$, et $\frac{-\mu}{\sigma} - 2A = \frac{-\mu}{\sigma} + 2\frac{\ln(S_0/K)+\mu-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} = d_-$.

□