Chapitre 5

Expression et mesure de l'interdépendance

Nous considérons ici le cas d'un vecteur àléatoire (vct.a.) à deux dimensions $Z = (X, Y) \in \mathbb{R}^2$, pour éviter les lourdeurs du type $Z = (Z_1, \ldots, Z_d) \in \mathbb{R}^d$, (qu'on appelle aussi v.a. de $\mathbb{R}^d$). Ce que nous développerons pour la v.a. X s'adapte généralement facilement à la v.a. Y ; dans ce cas, nous laisserons à la sagacité de la lectrice (ou du lecteur) le soin d'assurer cette adaptation.

5.1 Composantes d'un vecteur aléatoire

Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire (vct.a.) sur Ω, et $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Rappelons que $\{Z \leq z_0\}$ désigne l'évènement $\{X \leq x_0, Y \leq y_0\} := \{\omega \in \Omega | X \leq x_0, Y \leq y_0\}$; la fonction de répartition (ou loi) de Z est la fonction $F_Z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$ définie par $F_Z(z_0) := \mathbb{P}(\{Z \leq z_0\})$. Les composantes X et Y sont également des v.a., à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elles ont donc chacune également une loi $F_X(x_0) := \mathbb{P}(\{X \leq x_0\})$ et $F_Y(y_0) := \mathbb{P}(\{Y \leq y_0\})$.

Définition : Les fonctions de répartition F_X et F_Y s'appellent les *lois marginales* du vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$. La fonction de répartition $F_Z = F_{(X,Y)}$ s'appelle la *loi jointe* des v.a. X et Y. Les lois marginales se déduisent facilement de la loi jointe :

Proposition 5.1 $\boxed{F_X(x_0) = F_{(X,Y)}(x_0, +\infty)} := \lim_{y_0 \to +\infty} F_Z(x_0, y_0)$ *et* $\boxed{F_Y(y_0) = F_{(X,Y)}(+\infty, y_0)}$.

Preuve : $F_X(x_0) = \mathbb{P}(\{X \leq x_0\}) = \mathbb{P}(\{X \leq x_0, Y < +\infty\}) =^1 \lim_{y_0 \to +\infty} \mathbb{P}(\{X \leq x_0, Y \leq y_0\}) = \lim_{y_0 \to +\infty} F_Z(x_0, y_0)$. On procède de manière similaire pour $F_Y(y_0)$. $\square$

En revanche, sans hypothèse complémentaire, il n'est pas possible de résoudre le problème de retrouver la loi jointe à partir des lois marginales. L'indépendance des v.a. est une hypothèse qui donne une solution à ce problème.

Proposition 5.2 *Supposons que les v.a. X et Y soient* indépendantes. *Alors on retrouve la loi jointe à partir des lois marginales par la formule :* $\boxed{F_{(X,Y)}(x_0, y_0) = F_X(x_0) F_Y(y_0)}$. *En particulier*

- *Si (X, Y) est élémentaire, alors* $p_{z_0} := \boxed{\mathbb{P}(\{X = x_0, Y = y_0\}) = \mathbb{P}(\{X = x_0\})\mathbb{P}(\{Y = y_0\})} =: p_{x_0} p_{y_0}$
- *Si X et Y admettent des densités f_X et f_Y, alors* $\boxed{f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)}$.

Preuve : Comme X et Y sont indépendantes, les évènements $\{X \leq x_0\}$ et $\{Y \leq y_0\}$ sont indépendants. On en déduit que

$$F_{(X,Y)}(x_0, y_0) := \mathbb{P}(\{X \leq x_0, Y \leq y_0\}) = \mathbb{P}(\{X \leq x_0\} \cap \{Y \leq y_0\}) = \mathbb{P}(\{X \leq x_0\})\mathbb{P}(\{Y \leq y_0\}) =: F_X(x_0) F_Y(y_0).$$

Si les v.a. sont élémentaires et indépendantes l'une de l'autre les évènement $\{X = x_0\}$ et $\{Y = y_0\}$ sont indépendants. Donc

$$p_{z_0} := \mathbb{P}(\{X = x_0, Y = y_0\}) = \mathbb{P}(\{X = x_0\} \cap \{Y = y_0\} = \mathbb{P}(\{X = x_0\})\mathbb{P}(\{Y = y_0\}) =: p_{x_0} p_{y_0}.$$

[1] ici nous supposons implicitement que $\mathcal{B}$ est une tribu et que la probabilité $\mathbb{P}$ est σ-additive : voir cours de L3.

Si les v.a. X et Y admettent des densités, on voit facilement que $f_{(X,Y)}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$, $f_X(x_0) = \frac{dF_X}{dx}(x_0)$, et $f_Y(y_0) = \frac{dF_Y}{dy}(y_0)$; la dernière relation s'en déduit à partir de la première. □

5.2 Copules

Définition : Soit $C : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$C(0,t) = 0 = C(t,0) \text{ et } C(1,t) = t = C(t,1) \text{ pour tout } t \in [0,1] \tag{5.1}$$

et

$$C(u_+,v_+) - C(u_+,v_-) - C(u_-,v_+) + C(u_-,v_-) \geq 0 \tag{5.2}$$

pour tous $0 \leq u_- \leq u_+ \leq 1$ et $0 \leq v_- \leq v_+ \leq 1$. On dit que les v.a. X et Y *admettent C pour copule* si et seulement si pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$F_{(X,Y)}(x_0,y_0) = C(F_X(x_0), F_Y(y_0)). \tag{5.3}$$

Théorème 5.3 (Abe Sklar, 1959) *Tout couple (X,Y) de v.a. admet une copule C (au moins).*

Preuve : Nous donnons la preuve dans le cas où les v.a. X et Y admettent des fonctions de répartition continues strictement croissantes, $F_X : [x_-,x_+] \longrightarrow [0,1]$ et $F_Y : [y_-,y_+] \longrightarrow [0,1]$, avec $x_- := \mathrm{Inf}\,\{x_0 | F_X(x_0) \in]0,1[\}$ et $x_+ := \mathrm{Sup}\,\{x_0 | F_X(x_0) \in]0,1[\}$ et similaire pour y_- et y_+ (ces nombres étant possiblement égaux à $\pm\infty$). Dans ce cas la relation $F_{(X,Y)}(x_0,y_0) = C(F_X(x_0), F_Y(y_0))$ pour $u = F_X(x_0)$ et $v = F_Y(y_0)$ montre qu'il faut prendre $\boxed{C(u,v) := F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v))}$. On montre alors que C ainsi défini a également les autres propriétés annoncées. □

Exemple : Si les v.a. X et Y sont indépendantes, on voit immédiatement qu'elles admettent la copule $C^{\perp}(u,v) := uv$. Les fonctions $C^-(u,v) := \max\{u+v-1, 0\}$ et $C^+(u,v) := \min\{u,v\}$, appelées *copules extrèmes de Fréchet*, ont la propriété que pour toute copule C, on a $C^-(u,v) \leq C(u,v) \leq C^+(u,v)$ pour tout $(u,v) \in [0,1]^2$.

Exercice : Montrer que les copules extrèmes de Fréchet sont bien des copules. Calculer la loi de v.a. uniformes sur $[0,1]$ dont la loi jointe admet cette copule. Calculer dans ce cas la covariance (voir ci-dessous) de ces v.a..

Exercice : Montrer que la *copule logistique de Gumbel* $C(u,v) := \frac{uv}{u+v-uv}$ est bien une copule.

Proposition 5.4 *Soient h et k deux fonctions strictement croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient X et Y deux v.a., $X' := h(X)$ et $Y' := k(Y)$. Si le couple de v.a. (X,Y) admet la copule C, alors le couple (X',Y') admet également la copule C.*

Exercice : Montrer la proposition 5.4.

5.3 Covariance

Définition : Soient X et Y deux v.a. ; on appelle *covariance* de X et Y et on note $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ le nombre $\boxed{\mathrm{Cov}\,(X,Y) := \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))}$.

On appelle *corrélation* de X et Y et on note $\rho(X,Y)$ le nombre $\boxed{\rho(X,Y) := \dfrac{\mathrm{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)\mathrm{Var}\,(Y)}}}$.

Exemple : Soient X une v.a. et $\mathcal{E}$ une v.a. *centrée*, c'est-à-dire telle que $\mathbb{E}(\mathcal{E}) = 0$; on *suppose* que X et $\mathcal{E}$ sont *indépendantes.* Soient a et b deux réels ; posons $Y := aX + b$ et $Z := aX + b + \mathcal{E}$; nous voyons dans Y une fonction linéaire-affine de la grandeur aléatoire X et dans Z sa valeur perturbée par des erreurs de mesure $\mathcal{E}$ indépendantes de X. Alors $\boxed{\mathrm{Cov}\,(Z, X) = a\mathrm{Var}\,(X)} = \mathrm{Cov}\,(aX + b, X)$; en d'autres termes, dans ce cas $\mathrm{Cov}\,(X, Z)$ ne dépend pas de "l'erreur" $\mathcal{E}$ mais seulement de la pente a de la droite liant X et Y.

Exercice 5.1 Montrer que dans l'exemple on a bien $\mathrm{Cov}\,(Z, X) = a\mathrm{Var}\,(X)$. Soit $Z_n := aX + b + \mathcal{E}_n$, où $\mathcal{E}_n = \frac{1}{n}\mathcal{E}$. On suppose que $a\mathrm{Var}\,(X) \neq 0$; calculer $\rho(Z_n, X)$ et montrer que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \rho(Z_n, X) = 1$.

Proposition 5.5 (inégalité de Cauchy-Schwarz) $\boxed{\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}}$.

Preuve : Il suffit de remarquer que la fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}((\lambda X - Y)^2)$ est un polynôme du second degré qui n'est jamais négatif : son discriminant $\Delta = 4(\mathbb{E}(XY))^2 - 4\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ est donc négatif. L'inégalité de Cauchy-Schwarz en découle immédiatement. □

Proposition 5.6 *L'application $(X, Y) \mapsto Cov(X, Y)$ est bilinéaire et positive. La corrélation est à valeurs dans $[-1, 1]$. Si $\rho(X, Y) = \pm 1$ il existe a et b tel que $y = aX + b$ p.s. avec sgn $(a) = \rho(X, Y)$.*

Remarque : La preuve de ce résultat est sans difficulté ; la positivité tient au fait $\mathrm{Cov}\,(X, X) = \mathrm{Var}\,(X) \geq 0$. Le cas de $\rho(X, Y) = \pm 1$ fait l'objet de l'exercice 5.4

Il est intéressant de noter que Cov n'est pas définie-positive ; en effet, comme nous l'avons vu, le fait que $\mathrm{Var}\,(X) = 0$ n'entraine pas que $X = 0$, mais seulement que $X = \mathrm{Cste}(= \mathbb{E}(X))$ presque sûrement. En fait, il y a bien un produit scalaire derrière la notion de covariance : il s'agit de $< X, Y >:= \mathbb{E}(XY)$, à condition "d'assimiler[2]" deux variables X_1 et X_2 dès lors qu'elles sont égales presque-sûrement ($\mathbb{P}(\{X_1 = X_2\} = 1)$. Dans ce cas les v.a. d'espérance nulle forment un sous-espace de codimension 1, et $X \mapsto X' := X - \mathbb{E}(X)$ est la *projection orthogonale* sur ce sous-espace. L'écart-type $\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)} =: \|X'\|$ est la *norme* de X' au sens de ce produit scalaire, et la covariance de X et Y n'est alors rien d'autre que le produit scalaire des projections X' et Y'. Dans cet esprit, la corrélation $\rho(X, Y)$ n'est autre que le cosinus de l'angle θ entre X' et Y' dans le sens $< X', Y' >= \|X'\|\|Y'\| \cos(\theta)$.

5.4 Exercices

Exercice 5.2 Cas de deux v.a. élémentaires Soient X et Y deux v.a. élémentaires dont les lois sont données par

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathbb{P}(\{X = x\}) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}, \text{ et } \begin{array}{c|ccc} y & 0 & 2 & 4 \\ \hline \mathbb{P}(\{Y = y\}) & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

On se propose de déterminer la loi jointe $F_Z(z)$ de $Z = (X, Y)$ et la copule couplant les lois de X et de Y dans deux situations distinctes. On pose $\mathcal{X} := X(\Omega)$ et $\mathcal{Y} = Y(\Omega)$.

1. On suppose que X et Y sont *indépendantes.* Former successivement les tableaux donnant les $p_z := \mathbb{P}(\{X = x, Y = y\})$, $F_Z(x, y) := \mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq y\})$, et $C(u, v)$ tels que $F_Z(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$, pour tous $z := (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, et tous $(u, v) \in F_X(\mathcal{X}) \times F_Y(\mathcal{Y})$.
   Que vaut $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$?
2. On suppose à présent que les lois de X et Y sont couplées par la copule $C(u, v) := C^-(u, v) := \mathrm{Max}\,(u + v - 1, 0)$. Former successivement les tableaux donnant les $C(u, v)$, $F_Z(x, y)$, et p_z, pour tous $(u, v) \in C(F_X(\mathcal{X}), F_Y(\mathcal{Y}))$ et tout $z := (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$ et la corrélation $\rho(X, Y)$ dans ce cas.

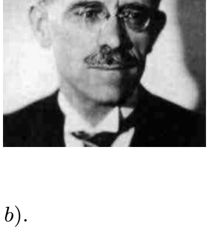
Exercice 5.3 Cas de deux v.a. continues Soient X et Y deux v.a. dont les lois sont données par $f_X(x) = \frac{1}{3}\mathbb{I}_{[0,3]}$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[0,2]}$. On se propose de déterminer la loi jointe $F_Z(z)$ de $Z = (X, Y)$ et la copule couplant les lois de X et de Y dans deux situations distinctes. On pose $\mathcal{X} := X(\Omega)$ et $\mathcal{Y} = Y(\Omega)$.

[2] La relation $X_1 \sim X_2$ si et seulement si $\mathbb{P}(\{X_1 = X_2\}) = 1$ est une relation d'équivalence ; on considère le *quotient* de l'ensemble L^2 des v.a. telles que $\mathbb{E}(X^2)$ existe par cette relation d'équivalence.

1. On suppose que X et Y sont *indépendantes*. Calculer successivement la densité $f_Z(x,y)$, la fonction de répartition $F_Z(x,y) := \mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq y\})$, et la copule $C(u,v)$ (telle que $F_Z(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)))$, pour tous $z := (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, et tous $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$.
   Que vaut $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$?
2. On suppose à présent que les lois de X et Y sont couplées par la copule $C(u,v) := C^+(u,v) := \mathrm{Min}\,(u,v)$. Montrer que[3] $F_Z(x,y) = ((0 \vee (\frac{x}{3} \wedge \frac{y}{2})) \wedge 1$.
   Représenter sur un schema du plan $\mathbb{R}^2_{x,y}$ sur quelles région la fonction F_Z est égale respectivement à 0, 1, $\frac{x}{3}$, et $\frac{y}{2}$, et montrer que si la loi de $Z := (X,Y)$ admettait une densité f_Z on aurait $f_Z(x,y) = 0$ "presque-partout".
   Montrer que $Z := (X,Y)$ a même loi que $Z' := (X, \frac{2}{3}X)$.
   En déduire la covariance $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ et la corrélation $\rho(X,Y)$ dans ce cas.

Exercice 5.4 Soient X_0 et Y_0 tels que $\mathbb{E}(X_0) = 0 = \mathbb{E}(Y_0)$ et $\mathrm{Var}\,(X_0) = 1 = \mathrm{Var}\,(Y_0)$.

1. Montrer que si $\rho(X_0, Y_0) = 1$, alors $\mathrm{Var}\,(X_0 - Y_0) = 0$.
2. Soit Z tel que $\mathbb{E}(Z) = 0 = \mathrm{Var}\,(Z)$; on suppose d'abord que $Z(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(\{Z \neq 0\}) = 0$.
3. Soit toujours Z tel que $\mathbb{E}(Z) = 0 = \mathrm{Var}\,(Z)$. On suppose à présent que Z est absolument continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f_Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, la densité de Z, telle que $\mathbb{P}(\{X \in [a,b]\}) = \int_a^b f_Z(z)dz$ pour tout $a \leq b$. Montrer que pour tout $a \leq b$ tels que $0 \notin [a,b]$ on a $\mathbb{P}(\{X \in [a,b]\}) = 0$; on dit que $Z = 0$ *presque-sûrement*, et on écrit "$Z = 0$ p.s.".
4. Soient X et Y tels que $\rho(X,Y) = \pm 1$. Trouver a et b tels que $Y = aX + b$; vérifier que $\mathrm{sgn}\,(a) = \rho(X,Y)$.

Maurice Fréchet (1878-1973) :   : Abe Sklar ()

[3]On note $a \wedge b := \mathrm{Min}\,(a,b)$ et $a \vee b := \mathrm{Max}\,(a,b)$.