

Probabilités
 Contrôle Continu Final - Session de Mai 2008
 Mardi 20 mai 2007
 13 :00 - 15 :00

Calculatrice autorisée. Document autorisé : une feuille A4 (recto-verso) écrite de votre main

Exercice 1 ((5 points)) Soient X et Y deux v.a. de même loi, de fonction de répartition F_X et F_Y , avec $F_X(x) := \frac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Calculer la densité f_X de X .

$$f_X(x) = F_X'(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}} \right)' = \frac{+e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \quad \square$$

2. Montrer que $f_X(-x) = f_X(x)$; en déduire $\mathbb{E}(X)$.

$$f_X(-x) = \frac{e^{+x}}{(1+e^{+x})^2} = \frac{e^{-2x}}{(e^{-x})^2} \cdot \frac{e^{+x}}{(1+e^{+x})^2} = \frac{e^{-2x+x}}{(e^{-x} + e^{-x}e^x)^2} = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = f_X(x)$$

Donc f_X est paire, et donc $x \mapsto x f_X(x)$ est impaire, d'où

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = 0$$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \square$$

3. On suppose que les v.a. sont couplées par la copule $C(u,v) = \frac{uv}{u+v-uv}$. Calculer la fonction de répartition F_Z du vecteur aléatoire $Z := (X, Y)$.

Par définition du couplage par une copule C on a

$$F_Z(x,y) = F_{(X,Y)}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{F_X(x) F_Y(y)}{F_X(x) + F_Y(y) - F_X(x) F_Y(y)}$$

$$\stackrel{\text{et de même loi}}{\downarrow} = \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot \frac{1}{1+e^{-y}}}{\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{-y}} - \frac{1}{1+e^{-x}} \cdot \frac{1}{1+e^{-y}}} = \frac{\frac{1}{(1+e^{-x})(1+e^{-y})}}{\frac{1+e^{-y} + 1+e^{-x} - 1}{(1+e^{-x})(1+e^{-y})}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}$$

$$F_Z(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}} \quad \square$$

