Université de Nice, Année 2006-2007 NOM : .
Département de Mathématiques, LICENCE MP, 2e année Prénom : .

Probabilités
Examen Final - Session de Juin 2007
Mardi 9 mai 2007
8 :00 - 11 :00

Calculatrice autorisée. Document autorisé : une feuille A4 (recto-verso) écrite de votre main

Exercice 1 ((6 points)) 1. Quelle est la densité f_X d'une v.a. X suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, de paramètre $\lambda > 0$?

$\boxed{f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)}$ ☐

2. Calculer la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_X(t)$ d'une telle v.a. X ?

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x} dx$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_{x=0}^{+\infty}$$ il faut donc supposer $t-\lambda < 0$ c'est-à-dire $t < \lambda$

$$= \lambda \left(0 - \frac{1}{t-\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$\boxed{M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}}$ ☐

3. On rappelle qu'on dit qu'une v.a. discrète $K \in \{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p \in [0,1]$ si et seulement si pour tout $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(\{K = k\}) = p(1-p)^{k-1}$. Calculer la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_K(t)$ d'une v.a. $K \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$. On rappelle que $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ pour tout $q \in]-1, 1[$.

$$M_K(t) = \mathbb{E}(e^{tK}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)e^t\right)^k$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)e^t}{1-(1-p)e^t} = \frac{p\,e^t}{1-(1-p)e^t}$$ il faut supposer $|(1-p)e^t| < 1$

$\boxed{M_K(t) = \frac{p\,e^t}{1-(1-p)e^t}}$ ☐

4. Pour tout $n \geq 1$ on considère une v.a. $T_n \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_n)$, avec $p_n = \frac{a}{n}$, où $a > 0$ est un réel fixé ; on pose $S_n := \frac{1}{n} T_n$. Calculer la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_{S_n}(t)$ de S_n.

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\frac{1}{n}T_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{n}T_n}\right) = M_{T_n}\left(\frac{t}{n}\right),$$ avec $T_n \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{a}{n}\right)$

donc $$M_{S_n}(t) = M_{T_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{\frac{a}{n} e^{\frac{t}{n}}}{1-\left(1-\frac{a}{n}\right)e^{\frac{t}{n}}}$$

$\boxed{M_{S_n} = \frac{\frac{a}{n} e^{\frac{t}{n}}}{1-\left(1-\frac{a}{n}\right)e^{\frac{t}{n}}}}$ ☐