

**Date :**  
Université de Nice  
Département de Mathématiques

**NOM :**

**Prénom :**

**Groupe :**  
Année 2009-2010  
Licence MASS 2e année

Fiche TD 12

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez finalement votre réponse.*

**Exercice 1** Soit  $(A_i)$  une suite d'épreuves indépendantes de probabilité  $p = 0,5$ . Soit  $X_i = \mathbb{I}_{A_i}$  le résultat de la  $i$ -ème épreuve. On souhaite déterminer un nombre  $\bar{n}$  d'expériences qu'il suffit d'effectuer pour que

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \left| \frac{1}{\bar{n}} \sum_{i=1}^{\bar{n}} X_i - \frac{5}{10} \right| \geq 10^{-2} \right\} \right) \leq 10^{-1}. \quad (1)$$

1. Posons  $Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Calculer  $\mathbb{E}(Y_n)$  et  $\text{Var}(Y_n)$

2. Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev pour  $Y_{\bar{n}}$  et  $\lambda = 10^{-2}$ .

3. En déduire un  $\bar{n}$  pour lequel 1 est satisfait.

4. Posons  $Z_n := \frac{1}{\sigma_n}(Y_n - \mu_n)$ , où  $\mu_n := \mathbb{E}Y_n$  et  $\sigma_n := \sigma(Y_n)$ . Montrer que  $\{|Y_n - \mu_n| \geq 10^{-2}\} = \{|Z_n| \geq 0.02\sqrt{n}\}$

5. Pour  $n \geq 60$  on peut assimiler la loi de  $Z_n$  à la loi d'une v.a.  $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , et donc

$$\mathbb{P}(\{|Y_n - \mu_n| \geq 10^{-2}\}) = \mathbb{P}(\{|Z_n| \geq 0.02\sqrt{n}\}) \simeq \mathbb{P}(\{|Z| \geq 0.02\sqrt{n}\}).$$

En utilisant la symétrie de la loi normale, vérifier qu'ainsi (1) devient  $\mathbb{P}(\{Z < 0.02\sqrt{n}\}) > 0.95$

6. Au moyen de la table de la loi normale fournie, déterminer pour quels  $n$  (1) est satisfaite

| u1\u2 | 0,00      | 0,01      | 0,02      | 0,03      | 0,04      | 0,05      | 0,06      | 0,07      | 0,08      | 0,09      |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0,0   | 0,5000000 | 0,5039894 | 0,5079784 | 0,5119665 | 0,5159535 | 0,5199389 | 0,5239223 | 0,5279032 | 0,5318814 | 0,5358565 |
| 0,1   | 0,5398279 | 0,5437954 | 0,5477585 | 0,5517168 | 0,5556700 | 0,5596177 | 0,5635595 | 0,5674949 | 0,5714237 | 0,5753454 |
| 0,2   | 0,5792597 | 0,5831661 | 0,5870644 | 0,5909541 | 0,5948348 | 0,5987063 | 0,6025681 | 0,6064198 | 0,6102612 | 0,6140918 |
| 0,3   | 0,6179114 | 0,6217195 | 0,6255158 | 0,6293000 | 0,6330717 | 0,6368306 | 0,6405764 | 0,6443087 | 0,6480272 | 0,6517317 |
| 0,4   | 0,6554217 | 0,6590970 | 0,6627572 | 0,6664021 | 0,6700314 | 0,6736448 | 0,6772419 | 0,6808225 | 0,6843863 | 0,6879331 |
| 0,5   | 0,6914625 | 0,6949743 | 0,6984682 | 0,7019441 | 0,7054015 | 0,7088403 | 0,7122603 | 0,7156612 | 0,7190427 | 0,7224047 |
| 0,6   | 0,7257469 | 0,7290692 | 0,7323712 | 0,7356528 | 0,7389138 | 0,7421540 | 0,7453732 | 0,7485712 | 0,7517478 | 0,7549030 |
| 0,7   | 0,7580364 | 0,7611480 | 0,7642376 | 0,7673050 | 0,7703501 | 0,7733727 | 0,7763728 | 0,7793501 | 0,7823046 | 0,7852362 |
| 0,8   | 0,7881447 | 0,7910300 | 0,7938920 | 0,7967307 | 0,7995459 | 0,8023375 | 0,8051055 | 0,8078498 | 0,8105704 | 0,8132671 |
| 0,9   | 0,8159399 | 0,8185888 | 0,8212136 | 0,8238145 | 0,8263912 | 0,8289439 | 0,8314724 | 0,8339768 | 0,8364569 | 0,8389129 |
| 1,0   | 0,8413447 | 0,8437523 | 0,8461358 | 0,8484950 | 0,8508300 | 0,8531409 | 0,8554277 | 0,8576903 | 0,8599289 | 0,8621434 |
| 1,1   | 0,8643339 | 0,8665004 | 0,8686431 | 0,8707618 | 0,8728568 | 0,8749280 | 0,8769755 | 0,8789995 | 0,8809998 | 0,8829767 |
| 1,2   | 0,8849303 | 0,8868605 | 0,8887675 | 0,8906514 | 0,8925122 | 0,8943502 | 0,8961653 | 0,8979576 | 0,8997274 | 0,9014746 |
| 1,3   | 0,9031995 | 0,9049020 | 0,9065824 | 0,9082408 | 0,9098773 | 0,9114919 | 0,9130850 | 0,9146565 | 0,9162066 | 0,9177355 |
| 1,4   | 0,9192433 | 0,9207301 | 0,9221961 | 0,9236414 | 0,9250663 | 0,9264707 | 0,9278549 | 0,9292191 | 0,9305633 | 0,9318879 |
| 1,5   | 0,9331928 | 0,9344783 | 0,9357445 | 0,9369916 | 0,9382198 | 0,9394292 | 0,9406200 | 0,9417924 | 0,9429466 | 0,9440826 |
| 1,6   | 0,9452007 | 0,9463011 | 0,9473839 | 0,9484493 | 0,9494974 | 0,9505285 | 0,9515428 | 0,9525403 | 0,9535214 | 0,9544861 |
| 1,7   | 0,9554346 | 0,9563671 | 0,9572838 | 0,9581849 | 0,9590705 | 0,9599409 | 0,9607961 | 0,9616365 | 0,9624621 | 0,9632731 |
| 1,8   | 0,9640697 | 0,9648522 | 0,9656206 | 0,9663751 | 0,9671159 | 0,9678433 | 0,9685573 | 0,9692582 | 0,9699460 | 0,9706211 |
| 1,9   | 0,9712835 | 0,9719335 | 0,9725711 | 0,9731967 | 0,9738102 | 0,9744120 | 0,9750022 | 0,9755809 | 0,9761483 | 0,9767046 |
| 2,0   | 0,9772499 | 0,9777845 | 0,9783084 | 0,9788218 | 0,9793249 | 0,9798179 | 0,9803008 | 0,9807739 | 0,9812373 | 0,9816912 |
| 2,1   | 0,9821356 | 0,9825709 | 0,9829970 | 0,9834143 | 0,9838227 | 0,9842224 | 0,9846137 | 0,9849966 | 0,9853713 | 0,9857379 |
| 2,2   | 0,9860966 | 0,9864475 | 0,9867907 | 0,9871263 | 0,9874546 | 0,9877756 | 0,9880894 | 0,9883962 | 0,9886962 | 0,9889894 |
| 2,3   | 0,9892759 | 0,9895559 | 0,9898296 | 0,9900969 | 0,9903582 | 0,9906133 | 0,9908625 | 0,9911060 | 0,9913437 | 0,9915758 |
| 2,4   | 0,9918025 | 0,9920237 | 0,9922397 | 0,9924506 | 0,9926564 | 0,9928572 | 0,9930531 | 0,9932443 | 0,9934309 | 0,9936128 |
| 2,5   | 0,9937903 | 0,9939634 | 0,9941322 | 0,9942969 | 0,9944574 | 0,9946138 | 0,9947664 | 0,9949150 | 0,9950600 | 0,9952012 |
| 2,6   | 0,9953388 | 0,9954729 | 0,9956035 | 0,9957307 | 0,9958547 | 0,9959754 | 0,9960929 | 0,9962074 | 0,9963188 | 0,9964274 |
| 2,7   | 0,9965330 | 0,9966358 | 0,9967359 | 0,9968332 | 0,9969280 | 0,9970202 | 0,9971099 | 0,9971971 | 0,9972820 | 0,9973645 |
| 2,8   | 0,9974448 | 0,9975229 | 0,9975988 | 0,9976725 | 0,9977443 | 0,9978140 | 0,9978817 | 0,9979476 | 0,9980116 | 0,9980737 |
| 2,9   | 0,9981341 | 0,9981928 | 0,9982498 | 0,9983051 | 0,9983589 | 0,9984111 | 0,9984617 | 0,9985109 | 0,9985587 | 0,9986050 |
| 3,0   | 0,9986500 | 0,9986937 | 0,9987361 | 0,9987772 | 0,9988170 | 0,9988557 | 0,9988932 | 0,9989296 | 0,9989649 | 0,9989991 |
| 3,1   | 0,9990323 | 0,9990645 | 0,9990957 | 0,9991259 | 0,9991552 | 0,9991836 | 0,9992111 | 0,9992377 | 0,9992636 | 0,9992886 |