Chapitre 1

Algèbres d'évènements et variables aléatoires

1.1 Indexer toutes les valeurs possibles

Définition : Soit Ω un ensemble. On appelle *algèbre* (ou algèbre de Boole) sur Ω toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ ayant les propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$
3. si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$

Exemples : $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{P}(\Omega)$ sont deux exemples extrêmes l'algèbres sur Ω ; $\mathcal{A}_0$ est la "plus petite" et $\mathcal{A}_\infty$ est la "plus grande", au sens où, pour toute algèbre $\mathcal{A}$ sur Ω, on a $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\infty$. Notez que si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille d'algèbres sur Ω, alors $\mathcal{A}^* := \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$, l'intersection des A_i, est aussi une algèbre sur Ω ; bien entendu, par définition de $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ et pour $A \subseteq \Omega$ on a $A \in \mathcal{A}^*$ si et seulement si $A \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$.

Proposition 1.1 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre sur Ω, $N := \{1, \ldots, n\}$, et $(A_k)_{k\in N}$ une famille de sous-ensembles $A_k \in \mathcal{A}$; alors*

$$\bigcap_{k\in N} A_k \in \mathcal{A} \text{ et } \bigcup_{k\in N} A_k \in \mathcal{A} \tag{1.1}$$

On dit encore qu'une algèbre est stable par intersection finie *et* réunion finie.

Preuve : Montrons d'abord, par récurrence sur le *cardinal* (ou nombre d'éléments) n de N, que $\bigcap_{k\in N} A_k \in \mathcal{A}$. Pour $n = 1$ c'est une hypothèse ; supposons la relation vraie lorsque N est remplacé par $N' := \{1, \ldots, n-1\}$; donc $A' := \bigcap_{k\in N'} A_k \in \mathcal{A}$; comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, on a donc $\bigcap_{k\in N} A_k = A' \cap A_k \in \mathcal{A}$ puisque $A_k \in \mathcal{A}$.

Par ailleurs $A := \bigcup_{k\in N} A_k = \bigcup_{k\in N} (A_k^c)^c = \left(\bigcap_{k\in N} A_k^c\right)^c \in \mathcal{A}$ puisque, comme nous venons le voir, $B := \bigcap_{k\in N} A_k^c \in \mathcal{A}$ du fait que $A_k^c \in \mathcal{A}$ et que $A = B^c \in \mathcal{A}$. □

Définition : On dit que l'algèbre $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre (ou une *tribu*) si (1.1) est encore vrai pour $N = \mathbb{N}$. En d'autres termes, une σ-algèbre est une algèbre *stable par intersection dénombrable* et *réunion dénombrable*.

Définition : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{B}$ une algèbre sur Ω. On appelle *variable aléatoire* (en abrégé v.a.) sur $(\Omega, \mathcal{B})$ toute fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'on ait $\{X \leq x\} \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre sur Ω, on dit que la v.a. X est $\mathcal{A}$-mesurable si et seulement si $\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{B})$ est donc une fonction $\mathcal{B}$-mesurable.

Remarques :

1. $\{X \leq x\}$ dénote l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) \leq x$. Si, pour $G \subseteq \mathbb{R}$, on dénote par $X^{-1}(G)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) \in G$, on a alors $\{X \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$. Observez que X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, alors que X^{-1} ainsi définie est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{P}(\Omega)$; elle est toujours définie, alors que la *fonction réciproque* de X n'est définie que si X est bijective (une situation guère intéressante dès qu'on veut pouvoir considérer plusieurs v.a. simultanément).
2. Une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ n'est donc ni plus ni moins qu'une fonction définie sur Ω. Ce cas nous suffira amplement dans le cas où Ω est fini ; mais bien-entendu dans ce cas la v.a. ne pourra prendre qu'un nombre fini de valeurs, ce qui nous donnera un cadre pour parler d'un jeu de pile-ou-face (choisir par exemple $\Omega = \{0, 1\}$ et $X(\omega) = \omega$, mais $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ et $X(\omega) = \mathrm{mod}\,(\omega, 2)$ convient aussi), d'un jeu de dés, ou de toutes les valeurs inférieurs à 10^9 ([1]) d'une action cotée en $\frac{1}{64}$-èmes d'USD (prendre $\Omega = \{1, \ldots, 64 \cdot 10^9\}$ et $X(\omega) = \omega/64$)... Les vecteurs aléatoires (voir ci-dessous) sur un Ω fini nous donnerons aussi une manière de traiter d'une succession de d tirages d'un dé (prendre $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^d$). En revanche, si nous voulons que notre v.a. puisse prendre toutes les valeurs réelles, ou si nous voulons considérer une suite infinie de tirages à pile-ou-face, un Ω infini sera indispensable. Dans ce cas on choisit généralement pour $\mathcal{B}$ la σ-algèbre (ou "tribu") des *boréliens* (voir cours de L3).
3. Une v.a. *vectorielle* est une fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega))$, telle que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a $\{X_i \leq x_i\} \in \mathcal{B}$ pour tout indice $i = 1..d$. Elle est $\mathcal{A}$-mesurable si et seulement si toutes ses "fonctions coordonnées" X_i le sont.
4. Pour une v.a. vectorielle X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$, par $X(\omega) \leq x$ nous entendons $X_i(\omega) \leq x_i$ pour tout $i = 1..d$, et nous dénoterons par $\{X \leq x\}$ de sous-ensemble $\bigcap_{i=1..d}\{X_i \leq x_i\}$.

Commentaire : Aussi curieux que cela puisse paraître, nous découvrirons progressivement que la manière dont une v.a. est définie (c'est-à-dire comment Ω et $\omega \mapsto X(\omega)$ sont explicitement choisis) est rarement le problème qui retient l'attention ; tout au plus s'assure-t-on qu'il est possible de les choisir ayant une propriété donnée. Cette observation ne peut être que sibyllines à ce stade ; elle n'est là que pour expliquer pourquoi nous ne donnerons guère d'exemples explicites. La notion de v.a. indépendantes qui sera introduite au chapitre suivant nous donnera l'occasion d'illustrer cette question.

Exercice : $X^{-1}(G)$ s'appelle l'*image réciproque* de G par la fonction X. Montrez qu'on a les relations suivantes : $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, $X^{-1}(G^c) = (X^{-1}(G))^c$, $X^{-1}(G \cap H) = X^{-1}(G) \cap X^{-1}(H)$, $X^{-1}(G \cup H) = X^{-1}(G) \cup X^{-1}(H)$.

1.2 Engendrer des algèbres

Définition : Soit $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ une famille de parties de Ω. On appelle *algèbre engendrée par* $\mathcal{X}$ la plus petite algèbre contenant $\mathcal{X}$; on la note $< \mathcal{X} >$; elle est égale à l'intersection de toutes les algèbres contenant $\mathcal{X}$.

Exemple : Si $\mathcal{X} = \{A, B\}$, pour $A \subseteq \Omega$ et $B \subseteq \Omega$, on a

$$< \mathcal{X} >= \{\emptyset, A, A^c, B, B^c, A \cap B, A^c \cup B^c, A \cap B^c, A^c \cup B, A^c \cap B, A \cup B^c, A^c \cap B^c, A \cup B, \Omega\}$$

On définit de même la *σ-algèbre engendrée par* $\mathcal{X}$ comme la plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{X}$; on la note $< \mathcal{X} >_\sigma$ et elle est égale à l'intersection de toutes les σ-algèbres contenant $\mathcal{X}$; la notion de σ-algèbre sera étudiée en L3 ; ici nous ne donnerons aucune preuve relatives aux σ-algèbres et admettrons systématiquement tout résultat faisant appel à cette notion, essentielle pour les v.a. prenant une infinité de valeurs.

Définition : Soit X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{B})$; on note $\alpha(X)$ l'algèbre engendrée par les $\{X \leq x\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(X) :=< \{\{X \leq x\} \ , \ x \in \mathbb{R}\} > .$$

L'algèbre $\alpha(X)$ est la plus petite algèbre $\mathcal{A}$ telle que X soit $\mathcal{A}$-mesurable. On définit de manière analogue $\sigma(X)$, la σ-algèbre engendrée par les $\{X \leq x\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$; ainsi $\sigma(X) =< \{\{X \leq x\} \ , \ x \in \mathbb{R}\} >_\sigma$.

[1] 10^9 = un milliard = one billion en anglais US = one thousand million en anglais EU

Proposition 1.2 *Si X ne prend qu'un nombre fini n de valeurs $x_1, \ldots, x_n$, $\alpha(X)$ est aussi l'algèbre engendrée par les $A'_{x_i} := \{X = x_i\}$, $i = 1..n$. On a $\sigma(X) = \alpha(X)$.*

Preuve : On peut supposer les x_i numérotés par ordre strictement croissant : $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$; posons $A_i := \{X \leq x_i\}$. Par définition $\alpha(X) =< \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} >$; posons $\alpha'(X) :=< \{A'_{x_1}, A'_{x_2}, \ldots, A'_{x_n}\} >$. On voit facilement que

$$A'_{x_1} = A_1 \ , \ A'_{x_i} = A_i - A_{i-1} := A_i \cap A^c_{i-1} \in \alpha(X) \ , \text{ et } A_j = \bigcup_{i \leq j} A'^c_{x_i} \in \alpha'(X).$$

Donc, comme $A'_{x_i} \in \alpha(X)$ pour tout i, on a donc $\alpha'(X) \subseteq \alpha(X)$ puisque $\alpha'(X)$ est la plus petite algèbre ayant cette propriété. De même, comme $A_j \in \alpha'(X)$ pour tout j, on a donc $\alpha(X) \subseteq \alpha'(X)$ puisque $\alpha(X)$ est la plus petite algèbre ayant cette propriété. D'où $\alpha(X) = \alpha'(X)$ □

Observons que les A_{x_i} sont les *atomes* de l'algèbre $\alpha(X)$ au sens suivant :

Définition : On dit que $A \in \mathcal{A}$ est un *atome* de l'algèbre A si et seulement si pour toute parties non vides $C \in \alpha(X)$ telle que $C \subseteq A$ on a nécessairement $C = A$. Nous dirons que l'algèbre $\mathcal{A}$ est *atomisée* si et seulement si pour tout $D \in \mathcal{A}$ il existe une famille finie (ou dénombrable) $(A_i)_{i \in I(D)}$ d'atomes telle que $D = \bigcup_{i \in I(D)} A_i$.

Il est facile de voir que, sous les hypothèses de la proposition 1.2, $\alpha(X)$ est une algèbre atomisée ; les $(A_{x_i})_{i=1..n}$ constituent une *partition* de Ω (c'est-à-dire que $\Omega = \bigcup_{i=1..n} A_{x_i}$ et $A_{x_{i'}} \cap A_{x_{i''}} = \emptyset$ si $i' \times i''$.)

Exercice : Soit X une v.a. prenant deux valeurs $x_1 < x_2$. Donner la liste des éléments de $\alpha(X)$. Même question lorsque X prend trois valeurs $x_1 < x_2 < x_3$. On suppose que X prend quatre valeurs $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$; quel est le cardinal[2] $Card(\alpha(X))$ de $\alpha(X)$?

Théorème 1.3 *Soient X et Y deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{B})$. La v.a. Y est $\alpha(X)$-mesurable si et seulement si il existe une fonction Borel-mesurable[3] $f : X(\Omega) \longrightarrow Y(\Omega)$ telle que $Y = f(X)$, c'est à dire que $Y(\omega) = f(X(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.*

Preuve : Nous ne prouvons ce théorème que dans le cas élémentaire où X et Y satisfont les hypothèses de la proposition 1.2. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les valeurs de X et $y_1, \ldots, y_m$ les valeurs de Y ; notons $A_{x_i} : \{X = x_i\}$ et $B_{y_j} := \{Y = y_j\}$. Les $(A_{x_i})_{i=1..n}$ forment une partion de Ω de même que les $(B_{y_j})_{j=1..m}$; de plus les $(A_{x_i})_{i=1..n}$ sont les atomes de $\alpha(X)$ qu'ils engendrent.

Supposons tout d'abord qu'il existe f telle que $Y = f(X)$ (le fait que f est $\mathcal{B}$-mesurable n'est pas utile dans ce cadre élémentaire). Soit y quelconque et soient $\{y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}\} := \{y_j \in Y(\Omega), \ \ y_j \leq y\}$; donc $\{Y \leq y\} = \{Y = y_{j_1}\} \cup \ldots \cup \{Y = y_{j_k}\}$.

Par ailleurs, pour tout $y_j \in Y(\Omega)\}$, on

$$\begin{aligned} \{Y = y_j\} &= \{\omega \in \Omega, \ \ Y(\omega) = y_j\} = \{\omega \in \Omega, \ \ f(X(\omega)) = y_j\} \\ &= \{\omega \in \Omega, \ \ X(\omega) = x_i \text{ et } f(x_i) = y_j\} \\ &= \bigcup_{x_i \in X(\Omega), f(x_i) = y_j} A_{x_i}, \end{aligned}$$

cette réunion comportant un nombre fini de termes puisque $X(\Omega)$ est fini. Ainsi, nous voyons que $\{Y \leq y\}$ est une réunion finie d'atomes de $\alpha(X)$; c'est donc bien un élément de $\alpha(X)$: la v.a. Y est donc bien $\alpha(X)$-mesurable.

Réciproquement, supposons que Y est $\alpha(X)$-mesurable ; on a donc $B_{y_j} \in \alpha(X)$ qui est une algèbre atomisée : donc pour tout $j = 1..m$, il existe des $x^j_1, \ldots, x^j_{n_j}$ tels que $B_{y_j} = A_{x^j_1} \cup \ldots \cup A_{x^j_{n_j}}$. Il suffit donc, pour $x \in \{x^j_1, \ldots, x^j_{n_j}\}$, de poser $f(x) = y_j$. Comme les $(B_j)_{j=1..n}$ forment une partition de Ω, ceci définit $f(x_i)$ (de manière univoque) pour tout $x_i \in X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. En dehors de $X(\omega)$ on donne à f une valeur constante arbitraire ; par exemple $f(x) = 0$ si $x \in X(\Omega)^c$. A présent, nous voyons que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe j tel que $Y(\omega) = y_j$, donc $\omega \in B_{y_j} = A_{x^j_1} \cup \ldots \cup A_{x^j_{n_j}}$, d'où $X(\omega) \in \{x^j_1, \ldots, x^j_{n_j}\}$, et donc $f(X(\omega)) = y_j = Y(\omega)$. □

[2]Rappelons qu'on appelle *cardinal* d'un ensemble fini le nombre de ses éléments. On dit que D est de cardinal *dénombrable* (ou simplement que D est dénombrable) s'il existe une bijection entre D et l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$

[3]cette hypothèse n'est importante que dans le cas où $X(\omega)$ n'est pas fini. La Borel-mesurabilité sera étudiée en L3.

1.3 Des évènements ni vrais ni faux

Définition : Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés les *évènements* de $(\Omega, \mathcal{B})$, ou simplement des évènements, si Ω et $\mathcal{B}$ sont sous-entendu ou supposés fixés une fois pour toute.

Le fait qu'on a supposé que $\mathcal{B}$ est une algèbre implique que l'intersection $(A, B) \mapsto A \cap B$ et la réunion $(A, B) \mapsto A \cup B$ sont des lois de composition interne sur les éléments de $\mathcal{B}$ et la complémentation $c\ : A \mapsto A^c$ est une involution (c'est-à-dire que $c^2 = \mathrm{Id}$) dans $\mathcal{B}$. Rappelons que sur les parties de tout ensemble Ω on a les relations suivantes :

Proposition 1.4 *Si A, B, et C sont des parties de Ω, alors*

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

En associant à tout évènement A la v.a. $\mathbb{I}_A$, on peut établir une correspondance biunivoque entre évènements et v.a. à valeurs dans $\{0, 1\}$. Pour x et y dans $\mathbb{R}$, posons

$$x \wedge y = \mathrm{Min}\,\{x, y\} \text{ et } x \vee y = \mathrm{Max}\,\{x, y\},$$

ce qui définit les opérations $X \wedge Y$ et $X \vee Y$ sur les v.a. de la façon usuelle : $X \wedge Y(\omega) = X(\omega) \wedge Y(\omega)$, et $X \vee Y(\omega) = X(\omega) \vee Y(\omega)$. Nous avons alors les relations

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{I}_A &= \mathbb{I}_{A^c}, & (1.2) \\ \mathbb{I}_A \wedge \mathbb{I}_B &= \mathbb{I}_{A \cap B} = \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B, & (1.3) \\ \mathbb{I}_A \vee \mathbb{I}_B &= \mathbb{I}_{A \cup B} = 1 - (1 - \mathbb{I}_A)(1 - \mathbb{I}_B). & (1.4) \end{aligned}$$

Exercice : Démontrer ces relations.

Il est d'usage de considérer "le jet du dé amène un *as*", ou "le jet de la pièce amène un *pile*" comme étant un "évènement". Le fait qu'il soit "aléatoire" signifie précisément qu'il peut se produise ou non. Ceci se code très facilement par une v.a. $\mathbb{I}_A$; au fait que le dé amène un as correspond au fait que $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$, l'autre issue correspondant au fait que $\mathbb{I}_A(\omega) = 0$: cela dépend de "l'état du monde" ω et si $\omega \in A$ ou $\omega \in A^c$. Nous voyons qu'ainsi le vrai et le faux se codent par 1 et 0 respectivement.

Au prochain chapitre nous allons montrer comment, en affectant une "probabilité" à chaque évenement on pourra quantifier "l'espérance" d'un v.a. et nous verrons plus tard dans quel sens cette espérance est la meilleure approximation déterministe (c'est-à-dire indépendante de l'état du monde) d'une v.a.

1.4 Questions

1. Que vaut $< \{A\} >$, où $A \subseteq \Omega$?
2. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, et $B = \{2, 4, 6\}$. Que vaut $< \{A, B\} >$?
3. Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $A = 2\mathbb{N} := \{2n, n \in \mathbb{N}\}$. Que vaut $< \{A\} >$?
4. Pourquoi toute fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est-elle une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?
5. On pose $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $X(\omega) = \mathrm{mod}\,(\omega, 2)$, $Y(\omega) = \mathrm{mod}\,(\omega, 3)$, $Z(\omega) = \mathrm{mod}\,(\omega, 4)$. Y est-elle $\alpha(X)$ mesurable ? X est-elle $\alpha(Y)$ mesurable ? Z est-elle $\alpha(X)$ mesurable ? X est-elle $\alpha(Z)$ mesurable ?