Date : **NOM :**

Université de Nice
Département de Mathématiques

Groupe :
Année 2011-2012
Licence MASS 2e année

Fiche TD 7 et 8
Variance

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille.

Exercice 1 (Calculs de variance de lois)

1. Calculer $\mathbb{E}(aX+b)$ et $\mathrm{Var}\,(aX+b)$ en fonction de $\mu := \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 := \mathrm{Var}\,(X)$.

$\mathbb{E}(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(b) = a\,\mathbb{E}(X) + b = a\mu + b$

$\mathrm{Var}\,(aX+b) = \mathbb{E}\left(((aX+b) - \mathbb{E}(aX+b))^2\right) = \mathbb{E}\left((aX+b-a\mu-b)^2\right)$

$= \mathbb{E}(a^2(X-\mu)^2) = a^2\,\mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)^2) = a^2\,\mathrm{Var}\,X = a^2\sigma^2$

2. Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a,b]$, c'est-à-dire que X a pour densité $f_X(x) := \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$; calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}\,(X)$.

$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=a}^{b}$

$= \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{2}(b^2-a^2) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \boxed{\frac{a+b}{2} = \mathbb{E}X}$

Huygens

$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Après intégration et simplification, on trouve $\boxed{\mathrm{Var}\,(X) = \frac{(a-b)^2}{12}}$

3. On rappelle que $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ si Y a pour densité $f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Montrer que si $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ alors $X := \frac{1}{\sigma}(Y-\mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

On a $\{X \le x_0\} = \{\frac{1}{\sigma}(Y-\mu) \le x_0\} = \{Y \le \sigma x_0 + \mu\}$; posons $y_0 := \sigma x_0 + \mu$

$\int_{-\infty}^{x_0} = F_X(x_0) = \mathbb{P}\{X \le x_0\} = \mathbb{P}\{Y \le y_0\} = \int_{-\infty}^{\sigma x_0+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dy$; posons $y = \sigma x + \mu$ d'où $dy = \sigma\,dx$

$= \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\cancel{\sigma}\,dx$, donc $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ce qui montre que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

4. Montrer que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathrm{Var}\,(X) = 1$.

$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0$ car $x \mapsto x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ est impaire

IPP : $u = x$ $v' = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\overset{=0}{\mathbb{E}X})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{x=-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

$= 0 + 1$ (puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \mathbb{P}\{X \le +\infty\} = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

donc $\boxed{\mathrm{Var}\,X = 1}$

5. En déduire que $\mu = \mathbb{E}(Y)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(Y)$.

Par définition de X, $Y = \sigma X + \mu$; d'après la question 1. on a

$\mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \sigma\,\mathbb{E}X + \mu = 0 + \mu$ donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \mu}$

$\mathrm{Var}\,(Y) = \mathrm{Var}\,(\sigma X + \mu) = \sigma^2\,\mathrm{Var}\,(X) = \sigma^2$ donc $\boxed{\mathrm{Var}\,(Y) = \sigma^2}$

Exercice 2 (Variance d'une somme)

1. Montrer que $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$, où $\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y))$.

$$\mathrm{Var}(X+Y) - \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}((X+Y)^2) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 - \mathbb{E}(X^2) + (\mathbb{E}X)^2 - \mathbb{E}Y^2 + (\mathbb{E}Y)^2$$
$$= \mathbb{E}((X+Y)^2 - X^2 - Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}Y)^2 + (\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}Y)^2$$
$$= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2 - X^2 - Y^2) - (\mathbb{E}X)^2 - 2\,\mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y - (\mathbb{E}Y)^2 + (\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}Y)^2$$
$$= 2\,\mathbb{E}(XY) - 2\,\mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y = 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y) = 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

ailleurs $\mathrm{cov} = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(XY - (\mathbb{E}X)Y - X(\mathbb{E}Y) + (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$
$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

2. On suppose que X et Y sont deux v.a. gaussienne *indépendantes* et que leur somme S est également gaussienne. Montrer que $S \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour des valeur μ et σ que l'on précisera.

D'après 1.5 $\mu = \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X+Y)$
$= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ car $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exercice 3 (Mettre ses oeufs dans deux panier) Soient A_1 et A_2 deux évènements indépendants de même probabilité $0 < p < 1$.

1. Calculer l'espérance et la variance des deux v.a. $X_1 = 2k(1 - \mathbb{I}_{A_1})$ et $X_2 = k(1 - \mathbb{I}_{A_1}) + k(1 - \mathbb{I}_{A_2})$

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(2k(1 - \mathbb{1}_{A_1})) = 2k\,\mathbb{E}(1 - \mathbb{1}_{A_1}) = 2k(1 - \mathbb{E}\mathbb{1}_{A_1}) = 2k(1 - \mathbb{P}A_1) = 2k(1-p)$$
$$\mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(k(1 - \mathbb{1}_{A_1}) + k(1 - \mathbb{1}_{A_2})) = k(1 - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1}) + 1 - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2})) = 2k(1-p)$$
$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(2k(1 - \mathbb{1}_{A_1})) = 4k^2\,\mathrm{Var}(1 + (-\mathbb{1}_{A_1})) = 4k^2(\underbrace{\mathrm{Var}\,1}_{0} + \mathrm{Var}(-\mathbb{1}_{A_1})).$$
$= 4k^2 p(1-p)$, puisque $\mathbb{1}_{A_1} \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$.

$$\mathrm{Var}\,X_2 = \mathrm{Var}(k(1 - \mathbb{1}_{A_1}) + k(1 - \mathbb{1}_{A_2})) = \mathrm{Var}(k(1 - \mathbb{1}_{A_1})) + \mathrm{Var}(k(1 - \mathbb{1}_{A_2})) \text{ car } \mathbb{1}_{A_1} \perp\!\!\!\perp \mathbb{1}_{A_2}$$
$$= k^2 p(1-p) + k^2 p(1-p) = 2k^2 p(1-p).$$

2. Montrer que $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$ et $\mathrm{Var}(X_2) < \mathrm{Var}(X_1)$

Nous avons vus au 1. que $\mathbb{E}(X_1) = 2k(1-p) = \mathbb{E}X_2$.
$\mathrm{Var}(X_1) = 4k^2 p(1-p) \geqslant 2k^2 p(1-p) = \mathrm{Var}(X_2)$.

3. Donner les lois de X_1 et X_2 pour $p = 0.1$

Si $\omega \in A_1$ $X_1(\omega) = 2k(1 - \mathbb{1}_{A_1}(\omega)) = 0$

Si $\omega \in A_1^c$ $X_1(\omega) = 2k(1 - \mathbb{1}_{A_1}(\omega)) = 2k$

Donc $\mathbb{P}\{X_1 = 0\} = \mathbb{P}(A_1) = p$

$\mathbb{P}\{X_1 = 2k\} = \mathbb{P}(A_1^c) = 1-p$

Si $\omega \in A_1 \cap A_2$ $X_2(\omega) = k(1-\mathbb{1}_{A_1}(\omega)) + k(1-\mathbb{1}_{A}(\omega)) = 0$

de m̂ Si $\omega \in A_1^c \cap A_2^c$ $X_2(\omega) = 2k$.

Donc $\mathbb{P}(\{X_2 = 0\}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$

$(A_1 \perp\!\!\!\perp A_2)$ $\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = p^2$

Si $\omega \in (A_1 \cap A_2^c) \dot\cup (A_1^c \cap A_2)$ $X_2(\omega) = k$ de m̂ $\mathbb{P}(\{X_2 = 2k\}) = (1-p)^2$

et $\mathbb{P}(\{X_2 = k\}) = 2p(1-p)$

x_1	0	$2k$
$\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\})$	p	$(1-p)$

x_2	0	k	$2k$
$\mathbb{P}(\{X_2 = x_2\})$	p^2	$2p(1-p)$	$(1-p)^2$

4. En déduire un modèle probabiliste étayant l'adage qu'*il est préférable de mettre ses oeufs dans deux paniers.*

A_1 modelise : le premier panier tombe et casse tous ses oeufs

A_2 modelise le deuxième panier tombe et casse tous ses oeufs.

X_1 modélise le nombre d'oeufs restant sur $2k$ oeufs tous dans le panier 1

X_2 modelise le nombre d'oeufs restant, sur k dans chaque panier.

On a vu que $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$: ce n'est pas le nombre d'oeufs restant espéré qui distingue ces deux stratégies. En revanche $\mathrm{Var}\, X_1 > \mathrm{Var}\, X_2$ (si $kp(1-p) \neq 0$). L'adage révèle que le bon-sens populaire préfère les issues les moins variables (ou moins "risquées")

Exercice 4 (Norme L^2)

1. Soient Z_1 et Z_2 deux v.a.. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ soit $P(\lambda) := \mathbb{E}((Z_1 + \lambda Z_2)^2)$. En développant cette expression montrer que P est un polynôme de degré 2.

$$P(\lambda) := \mathbb{E}((Z_1 + \lambda Z_2)^2) = \mathbb{E}(Z_1^2 + 2\lambda Z_1 Z_2 + \lambda^2 Z_2^2) = \mathbb{E}(Z_1^2) + 2\lambda \mathbb{E}(Z_1 Z_2) + \lambda^2 \mathbb{E}(Z_2^2)$$

$$= a\lambda^2 + b\lambda + c \quad , \text{ avec } a = \mathbb{E}(Z_2^2),\ b = 2\mathbb{E}(Z_1 Z_2), \text{ et } c = \mathbb{E}(Z_1^2)$$

c'est bien un polynôme de degré 2 en λ.

[1] Ceci montre que l'adage qu'*il est préférable de mettre ses oeufs dans deux paniers* exprime qu'à espérance égale le bon sens populaire préfaire l'option de moindre variance, moins "risquée".

2. Déduire du fait que $P(\lambda) \geq 0$ pour tout λ que $(\mathbb{E}(Z_1 Z_2))^2 \leq \mathbb{E}(Z_1^2)\mathbb{E}(Z_2^2)$. (**Indication :** utiliser que le discriminant Δ de P est nécessairement négatif.)

Comme $P(\lambda) \geq 0$ pour tout λ, on a

$b^2 - 4ac =: \Delta \leq 0$, sinon $P(\lambda) < 0$ entre les racines distinctes.

Donc $0 \geq b^2 - 4ac = 4(\mathbb{E}(Z_1 Z_2))^2 - 4\mathbb{E}(Z_2^2)\mathbb{E}(Z_1^2)$, ou encore, en simplifiant par 4

$\mathbb{E}(Z_1^2)\mathbb{E}(Z_2^2) \leq (\mathbb{E}(Z_1 Z_2))^2$

CQFD.

3. On pose $\|Z\| := \sqrt{\mathbb{E}(Z^2)}$; montrer que $\|\lambda Z\| = |\lambda|\|Z\|$.

$\|\lambda Z\| = \sqrt{\mathbb{E}((\lambda Z)^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(\lambda^2 Z^2)} = \sqrt{\lambda^2 \mathbb{E}(Z^2)} = |\lambda|\sqrt{\mathbb{E}(Z^2)} = |\lambda|\|Z\|$

4. Montrer que $\|Z_1 + Z_2\| \leq \|Z_1\| + \|Z_2\|$. (**Indication :** Calculer $(\|Z_1\| + \|Z_2\|)^2$)

$(\|Z_1\| + \|Z_2\|)^2 = \|Z_1\|^2 + 2\|Z_1\| \cdot \|Z_2\| + \|Z_2\|^2 = \mathbb{E}(Z_1^2) + 2\sqrt{\mathbb{E}(Z_1) \cdot \mathbb{E}(Z_2)} + \mathbb{E}(Z_2^2)$

$\geq \mathbb{E}(Z_1^2) + 2\sqrt{(\mathbb{E}(Z_1 Z_2))^2} + \mathbb{E}(Z_2^2)$ d'après 4.2.

$= \mathbb{E}(Z_1^2) + 2|\mathbb{E}(Z_1 Z_2)| + \mathbb{E}(Z_2)^2 \geq \mathbb{E}(Z_1^2) + 2\mathbb{E}(Z_1 Z_2) + \mathbb{E}(Z_2^2)$

car $|x| \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$= \mathbb{E}(Z_1^2 + 2Z_1 Z_2 + Z_2^2)$

$= \mathbb{E}((Z_1 + Z_2)^2)$, d'où $\|Z_1\| + \|Z_2\| = \sqrt{(\|Z_1\| + \|Z_2\|)^2} \geq \sqrt{\mathbb{E}(Z_1 + Z_2)^2} = \|Z_1 + Z_2\|$

5. Montrer que $\|Z\|^2 = (\mathbb{E}Z)^2 + \mathrm{Var}(Z)$

$(\mathbb{E}(Z))^2 + \mathrm{Var}(Z) = (\mathbb{E}(Z))^2 + \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2$ (Huygens).

$= \mathbb{E}(Z^2) = \|Z\|^2$ par définition de $\|Z\|$.