Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice — Année 2012-2013

Département de Mathématiques — Licence MASS 2e année

Fiche TD 05

Décorrelation et indépendance,

et diversification

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez* **finalement votre réponse.**

Exercice 1 (Décorrélation et indépendance) .

1. Montrer que si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Comme X et Y sont indépendantes, il en est de même de $\bar{X} := X - \mathbb{E}X$ et $\bar{Y} := Y - \mathbb{E}Y$

donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(\bar{X}\bar{Y}) = \mathbb{E}(\bar{X})\cdot\mathbb{E}(\bar{Y})$ car $\bar{X} \perp\!\!\!\perp \bar{Y}$

$= \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)\,\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}Y) = [\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(\mathbb{E}X)][\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(\mathbb{E}Y)]$

$= [\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)][\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(Y)] = 0\cdot 0 = 0$

2. Soit X une v.a. prenant ses valeurs dans $\{-1,0,+1\}$, avec $\mathbb{P}(\{-1\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\{+1\})$. Vérifier que $X^3 = X$. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

- On a $(-1)^3 = -1$, $(+1)^3 = +1$, $0^3 = 0$ donc $X^3(\omega) = X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$; en d'autres termes $X^3 = X$.
- $\mathbb{E}(X) = (-1)\mathbb{P}(X=-1) + (+1)\mathbb{P}(X=+1) + 0\cdot\mathbb{P}(X=0)$

$= (-1)\cdot\frac{1}{4} + (+1)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\mathbb{P}(X=0) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

3. On pose $Y = X^2$ qui est donc X-mesurable ; vérifier que X et Y ne sont pas indépendantes (Indication : considérer les évènements $A = \{X \le -1\}$ et $B = \{Y \le 0\}$ qui seraient indépendants si X et Y étaient indépendantes.)

Si X et Y étaient des v.a. indépendantes les évènements A et B seraient indépendants et donc $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ puisque $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \le -1) = \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X^2 \le 0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$.

Or $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(\{X \le -1\} \cap \{X^2 \le 0\}) = \mathbb{P}(\{X \le -1\} \cap \{X = 0\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes (NB : Y est X-mesurable et donc non-indépendante de X !)

4. Vérifier que néanmoins $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}((X-0)(X^2-\mathbb{E}(X^2)))$

$= \mathbb{E}(X^3 - \mu X)$ avec $\mu := \mathbb{E}(X^2)$

$= \mathbb{E}(X^3) - \mu\,\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X) - \mu\,\mathbb{E}(X)$ puisque $X^3 = X$.

$= 0 - \mu 0$ puisque $\mathbb{E}X = 0$

$= 0$

NB : Cet exemple montre que la réciproque de $[X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0]$ est fausse

Exercice 2 (Mettre ses oeufs dans deux paniers) Soient A_1 et A_2 deux évènements indépendants de même probabilité $0 < p < 1$. On considère les deux v.a. $X_1 = 2k(1-\mathbb{I}_{A_1})$ et $X_2 = k(1-\mathbb{I}_{A_1})+k(1-\mathbb{I}_{A_2})$ Voici un exemple de calcul de $\mathbb{E}(X_1)$ et de $\mathrm{Var}(X_1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1) &= \mathbb{E}(2k(1-\mathbb{I}_{A_1})) = 2k\mathbb{E}(1-\mathbb{I}_{A_1}) = 2k(\mathbb{E}(1)-\mathbb{E}(\mathbb{I}_{A_1})) && \text{(linéarité de } \mathbb{E}\text{)}\\
&= 2k(1-\mathbb{P}(A_1)) = 2k(1-p) && (\mathbb{I}_{A_1} \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_1) &= \mathrm{Var}(2k(1-\mathbb{I}_{A_1})) = 4k^2\mathrm{Var}(1-\mathbb{I}_{A_1}) && \text{(2-homogénéité de Var)}\\
&= 4k^2(\mathrm{Var}(1)+\mathrm{Var}(-\mathbb{I}_{A_1}) && (\text{car } 1 \perp\!\!\!\perp A_1)\\
&= 4k^2(0+(-1)^2\mathrm{Var}(\mathbb{I}_{A_1})) = 4k^2p(1-p) && (\text{car } \mathbb{I}_{A_1} \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p))
\end{aligned}$$

1. Calculer en justifiant de même l'espérance et la variance de la v.a X_2.

$\mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(k(1-\mathbb{1}_{A_1}) + k(1-\mathbb{1}_{A_2})) = k(\mathbb{E}(1) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1})) + k(\mathbb{E}(1) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2}))$

$= k(1-\mathbb{P}(A_1)) + k(1-\mathbb{P}(A_2))$ puisque $\mathbb{E}\mathbb{1}_A = \mathbb{P}(A)$ pour tout evt A.

$= k(1-p) + k(1-p) = 2k(1-p)$

$\mathrm{Var}(X_2) = \mathrm{Var}(k(1-\mathbb{1}_{A_1}) + k(1-\mathbb{1}_{A_2})) = \mathrm{Var}(k(1-\mathbb{1}_{A_1})) + \mathrm{Var}(k(1-\mathbb{1}_{A_2}))$ $(A_1 \perp\!\!\!\perp A_2)$

$= k^2\,\mathrm{Var}(1-\mathbb{1}_{A_1}) + k^2\,\mathrm{Var}(1-\mathbb{1}_{A_2}) = k^2(\mathrm{Var}(-\mathbb{1}_{A_1}) + \mathrm{Var}(-\mathbb{1}_{A_2}))$

$= k^2((-1)^2\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{A_1}) + (-1)^2\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{A_2})) = k^2[(p(1-p)) + p(1-p)]$ $(\mathbb{1}_{A_i} \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p))$

$= 2p(1-p)k^2$

2. Montrer que $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$ et $\mathrm{Var}(X_2) < \mathrm{Var}(X_1)$

Comme $p(1-p)k^2 > 0$, on a $2p(1-p)k^2 < 4p(1-p)k^2$ (puisque $0<2<4$)

et donc $\mathrm{Var}(X_1) = 4k^2p(1-p) > 2p(1-p)k^2 = \mathrm{Var}(X_2)$

NB : En mettant ses $2k$ oeufs dans deux paniers on diversifie le risque de voir un (ou deux) paniers de tomber et briser les oeufs ; on ne change pas l'espérance du nombre d'oeufs restant, mais on diminue la variance de ce nombre.

3. Donner les lois de X_1 et X_2 pour $p = 0.1$

X_1 ne prend que deux valeurs : 0 si A_1 a lieu et $2k$ sinon, et $\mathbb{P}(A_1) = p$

donc

x	0	$2k$
$\mathbb{P}(X_1 = x)$	p	$1-p$

X_2 ne prend que trois valeurs : 0 si A_1 et A_2 ont lieu, $2k$ si ni A_1 ni A_2 a lieu, et k sinon.

Or $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \overset{A_1 \perp\!\!\!\perp A_2}{=} \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2) = p^2$.

$\mathbb{P}(X_2 = 2k) = \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_1^c)\cdot\mathbb{P}(A_2^c) = (1-p)^2$.

enfin $\mathbb{P}(X_2 = k) = 1 - p^2 - (1-p)^2 = 1 - p^2 - 1 + 2p - p^2 = 2(p-p^2) = 2p(1-p)$

donc

x	0	k	$2k$
$\mathbb{P}(X_2 = x)$	p^2	$2p(1-p)$	$(1-p)^2$