Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice — Année 2011-2012

Département de Mathématiques — Licence MASS 2e année

Fiche TD 17

Loi du Chi2

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez* **finalement votre réponse.**

Exercice 1 (Gros bras (suite)) On reprend le problème de remboursement de billet de la fiche de TD 16, ainsi que toutes ses notations et hypothèses. On note $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ et $\mathcal{E}_n := \{S_n \leq 6500\}$. On généralise Z_{120} et $a = a_{120}$ à Z_n v.a. centrée réduite et a_n tels que $\mathcal{E}_n = \{Z_n \leq a_n\}$. Nous avons montré que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{120}) \simeq 0.9357$ et on souhaite préciser dans les 6.43% restant, lorsque qu'il n'est pas possible de rembourser tout les présents.

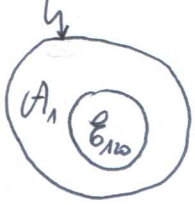
1. A quelle situation correspond l'évènement $\mathcal{A}_k := \mathcal{E}_{120-k} \cap \mathcal{E}^c_{121-k}$

$\omega \in \mathcal{E}_{120-k} \iff$ il est possible de rembourser 120-k personnes

$\omega \in \mathcal{E}^c_{121-k} \iff$ il n'est pas possible de rembourser une personne de plus

$\omega \in \mathcal{A}_k = \mathcal{E}_{120-k} \cap \mathcal{E}^c_{121-k} \iff$ il reste exactement k personnes ne peuvent être remboursées

$\mathcal{A}_k = \{$k personnes ne peuvent être remboursées$\}$.



2. Calculer une approximation de $\mathbb{P}(\mathcal{A}_1)$.

$\mathcal{E}_{119} = \mathcal{E}_{120} \dot\cup \mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_{119}) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_{120} \dot\cup \mathcal{A}_1) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_{120}) + \mathbb{P}(\mathcal{A}_1) \Rightarrow$

$\mathbb{P}(\mathcal{A}_1) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_{119}) - \mathbb{P}(\mathcal{E}_{120})$

$\mathbb{P}(\mathcal{E}_{119}) = \mathbb{P}(\{X_1 + \cdots + X_{119} \leq 6500\})$

$= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{X_1 + \cdots + X_{119} - 119 \cdot 50}{30\sqrt{119}} \leq \frac{6500 - 119 \cdot 50}{30\sqrt{119}}\right\}\right) = \mathbb{P}(\{Z_{119} \leq \underset{1.681..}{a_{119}}\})$

$\approx \mathbb{P}(\{Z \leq 1.68\}) = 0.9535..$ TLC

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{A}_1) &\simeq 0.9535 - 0.9357 \\ &= 0.0178 = 1.78\,\%\end{aligned}}$$

3. Trouver a_n tel que $\{S_n \leq 6500\} = \{Z_n \leq a_n\}$.

$\{S_n \leq 6500\} = \left\{\frac{S_n - n50}{30\sqrt{n}} \leq \frac{6500 - n50}{30\sqrt{n}}\right\}$

$= \{Z_n \leq a_n\}$ avec $a_n = \frac{6500 - n50}{30\sqrt{n}}$

$$\boxed{a_n = \frac{6500 - n50}{30\sqrt{n}}}$$

4. On note k_α le plus petit k tel que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{120-k}) \geq 1 - \alpha$. Trouver $k_{0,01}$ et $k_{0,001}$

$k_\alpha = 120 - n_\alpha$ où n_α = plus grand n tel que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_n) \geq 1 - \alpha$

Or $1 - \alpha \leq \mathbb{P}(\mathcal{E}_n) = \mathbb{P}(\{Z_n \leq a_n\}) \approx \mathbb{P}\left(\left\{Z \leq \frac{6500 - n50}{30\sqrt{n}}\right\}\right)$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ (TLC

Pour $\alpha = 0.01$, $1 - \alpha = 0.99 = \mathbb{P}(\{Z \leq 2.33\})$

Choisir n tq $\frac{6500 - n50}{30\sqrt{n}} = 2.33 \iff n = 115.00762$

Pour $\alpha = 0.01$ $1 - \alpha = 0.999 = \mathbb{P}(\{Z \leq 3.10\}$. $k_{0.01} = 120 - 115$

$\iff n = 110.45$ $k_{0.001} = 10$

$k_{0,01} = 5$	$k_{0,001} = 10$

5. Formulez et expliquez votre conclusion quant au problème du guichetier ?

Avec une probabilité d'au plus 1% de se tromper, la pire situation à laquelle le guichetier doit se préparer est de ne pas être en mesure de rembourser 5 personnes.

S'il veut réduire à 0,1% cette probabilité il doit se préparer à ne pas être en mesure de rembourser 10 personnes.

Johann Carl Friederich Gauss (1777-1855)

Date : **NOM :** **Groupe :**

Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence MP 2e année Probabilité

Fiche TD 18

Estimateurs au maximum de vraisemblance

Exercice 1.(Loi bruitée) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la forme

$$X_i = \frac{\theta}{i^\alpha} + \sigma Y_i$$

où α et σ sont supposés connus et les Y_i sont i.i.d. gaussiennes, centrées, réduites, et θ est le paramètre inconnu que l'on veut estimer.

1. Déterminer la vraissemblance $L(x_1, \ldots, x_n, \theta)$ et la log-vraissemblance $l(x_1, \ldots, x_n, \theta) =$ d'un tel échantillon

Comme $X_i = \mu_i + \sigma Y_i$, avec $Y_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, nous voyons que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma)$, avec $\mu = \frac{\theta}{i^\alpha}$

et donc $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\frac{\theta}{i^\alpha})^2}{2\sigma^2}}$, d'où $L(x_1, \ldots, x_n; \theta) \underset{\perp\!\!\!\perp X_i}{=} f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$.

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\left((x_1 - \frac{\theta}{1^\alpha})^2 + \ldots + (x_i - \frac{\theta}{i^\alpha})^2 + \ldots + (x_n - \frac{\theta}{n^\alpha})^2\right)\right).$$

$$l(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = -n \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\left((x_1 - \frac{\theta}{1^\alpha})^2 + \ldots + (x_n - \frac{\theta}{n^\alpha})^2\right).$$

$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i - \frac{\theta}{i^\alpha})^2\right)$	$l(x_1, \ldots, x_n, \theta) = -n \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i - \frac{\theta}{i^\alpha})^2.$

2. Déterminer l'estimateur au maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ.

Au maximum (en θ) de $\theta \mapsto L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$, comme ln est croissante, la Log-vraisemblance l est aussi maximale, et donc $\frac{\partial}{\partial\theta} l(x_1 \ldots x_n; \theta) = 0$

Si θ^* classique ce maximum il satisfait donc

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta} l(x_1, \ldots, x_n; \theta) = 0 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i 2(x_i - \frac{\theta}{i^\alpha})(-\frac{1}{i^\alpha}) = +\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_i \left(\frac{x_i}{i^\alpha}\right) - \theta \sum_i \frac{1}{i^{2\alpha}}\right)$$

d'où $\theta(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i^\alpha}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{2\alpha}}}$ Pour trouver l'estimateur (au maximum de vraisb.) on remplace les x_i par les X_i i.i.d

$$\boxed{\hat{\theta}_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{2\alpha}}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\alpha} X_i}$$

3. Est-il biaisé ?

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{2\alpha}}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\alpha}\mathbb{E}(X_i) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{2\alpha}}\right)^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\alpha} \cdot \frac{\theta}{i^\alpha} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{2\alpha}}\right)^{-1} \theta \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{2\alpha}}\right) = \theta$$

On en déduit que $\hat{\theta}_n$ n'est pas biaisé

4. Est-il consistent ?

Pour que $\hat{\theta}_n$ soit consistant, il suffit que $Var(\hat{\theta}_n) \to 0$ quand n tends vers l'infini

Or $Var(\hat{\theta}_n) = s_\alpha^{-2} Var\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\alpha} X_i\right) \underset{\perp\!\!\!\perp X_i}{=} s_\alpha^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i^\alpha}\right)^2 Var(X_i) = s_\alpha^{-2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{2\alpha}}\right)\sigma^2 = \frac{1}{s_\alpha}\sigma^2$

où $s_\alpha := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{2\alpha}}$. Donc, pour que $Var(\hat{\theta}_n)$ tende vers 0 (et que $\hat{\theta}_n$ soit consistit) il suffit donc que la série $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^{2\alpha}}$ diverge, ce qui est le cas si $\alpha \leq \frac{1}{2}$

Si $\boxed{\alpha \leq \frac{1}{2}}$ $Var(\hat{\theta}_n)$ tend vers 0 et donc $\hat{\theta}_n$ converge vers $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$