Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice — Année 2012-2013

Département de Mathématiques — Licence MASS 2e année

Fiche TD 11

Estimateurs au maximum de vraisemblance

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez* **finalement votre réponse.**

Exercice 1 (Loi exponentielle) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon indépendant de la loi de probabilité de densité $f_\theta(x) := \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, $\theta > 0$.

1. Déterminer l'estimateur au maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ.

Vraisemblance : $L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_1}{\theta}} \cdots \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_n}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\theta}}$

log-Vraisemblance : $\ell(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \ln(L(x_1, \ldots, x_n; \theta)) = \ln\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{S_n}{\theta}}\right)$ avec $S_n := x_1 + \ldots + x_n$

$= -n \ln(\theta) - \frac{S_n}{\theta}$

θ extremum $\Rightarrow$ $0 = \frac{\partial \ell}{\partial \theta}(x_1, \ldots, x_n; \theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{S_n}{\theta^2}$ et donc $0 = \frac{1}{\theta}\left(-n + \frac{S_n}{\theta}\right)$

d'où $\theta^* = \frac{S_n}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$

donc $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$

$$\boxed{\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n).}$$

2. Est-il biaisé ?

biais $= \theta - \mathbb{E}(\hat{\theta}_n)$ Rappelons que $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta}\left(\left[-x\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \theta e^{-\frac{x}{\theta}} dx\right)$

$= \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \left[\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right]_0^\infty = \theta$

$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)\right)$

$= \frac{1}{n}(\theta + \cdots + \theta) = \frac{n\theta}{\theta} = \theta$

Finalement biais $= \theta - \theta = 0$

$\boxed{\text{L'estimateur } \hat{\theta}_n \text{ est sans biais}}$

3. Est-il consistent ?

Nous devons déterminer si $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$. Or la loi des grand nombre nous assure que $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1) = \theta$. Donc $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est donc bien consistent.

Exercice 2 (Loi uniforme de domaine inconnu) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la loi de la loi uniforme (discrète) sur $\{1, 2, \ldots, \theta\}$.

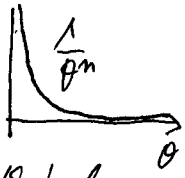
1. Que vaut $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ pour $x_i \in \{1, 2, \ldots, \theta\}$?

Par définition de la loi uniforme $\mathbb{P}(X=x) = \frac{1}{\theta}$ si $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ (et nulle sinon)

Donc $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \overset{\perp\!\!\!\perp X_i}{=} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n) = \frac{1}{\theta} \cdots \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}$ (puisque $x_i \in \{1, \ldots \theta\}$)

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \frac{1}{\theta^n}}$$

2. Déterminer l'estimateur au maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ.



Donc $L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^n}$ si $x_i \in \{1, \ldots, \theta\}$ pour tout i, et $L = 0$ sinon.

Comme $\theta \mapsto \frac{1}{\theta^n}$ est décroissante il convient de choisir le plus petit θ tel que $x_1 \leq \theta, \ldots, x_n \leq \theta$, c'est à dire $\theta^* = \text{Max}\{x_1, \ldots, x_n\}$. ("le plus petit majorant")

Donc $\hat{\theta}_n = \text{Max}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

3. Quelle est sa loi $F_{\hat{\theta}_n}(k)$? (**Indication :** utiliser que $\text{Max}\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \theta$ si et seulement si $x_i \leq \theta$ pour tout $i = 1, \ldots, n$)

$$F_{\hat{\theta}_n}(k) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq k) = \mathbb{P}(\text{Max}\{X_1, \ldots, X_n\} \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, \ldots, X_n \leq k)$$
$$\overset{\perp\!\!\!\perp X_i}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq k) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq k) = \begin{cases} \left(\frac{k}{\theta}\right)^n & \text{si } k \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{si } k < 1 \\ 1 & \text{si } k > \theta \end{cases}$$

Notez qu'on en déduit que, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ $p_k = \mathbb{P}(\hat{\theta}_n = k) = \left(\frac{k}{\theta}\right)^n - \left(\frac{k-1}{\theta}\right)^n$.

4. L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il consistent ? (**Indication :** que vaut $\mathbb{P}(\{\hat{\theta}_n < \theta\})$?

Notons que $\hat{\theta}_n < \theta \iff \text{Max}\{X_1, \ldots, X_n\} < \theta \iff X_1 < \theta$ et $X_2 < \theta$ et ... $X_n < \theta$.

Donc $|\hat{\theta}_n - \theta| > \delta (>0) \Rightarrow X_1 \leq \theta - 1$ et $X_2 \leq \theta - 1$ et ... $X_n \leq \theta - 1$

d'où $0 \leq \mathbb{P}(\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \delta\}) \leq \mathbb{P}(X_1 \leq \theta - 1, X_2 \leq \theta - 1, \ldots, X_n \leq \theta - 1)$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq \theta - 1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq \theta - 1)$$
$$= \left(\frac{\theta - 1}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

donc $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ ce qui montre que $\hat{\theta}_n$ est consistant.