**UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS** **2017/2018**
**Faculté des Sciences** L3MA
**Département de Mathématiques** Calcul Différentiel
Feuille d'exercices n$^o$2

**Exercice 1.** Soit $(E, ||*||)$ un evn. Montrer que les applications suivantes sont continues.

$$s : E \times E \to E, \quad s(x,y) = x + y;$$
$$m : K \times E \to E, \quad m(\lambda, x) = \lambda x;$$

et

$$n : E \to \mathbb{R}_+, \quad n(x) = ||x||.$$

Ici $E \times E$ (resp. $K \times E$) est muni de la norme $||(x,y)|| = ||x|| + ||y||$ (resp. $||(\lambda, x)|| = |\lambda| + ||x||$).

**Exercice 2.** Soit $(E, ||*||)$ un evn, $\lambda \in K$ et $a \in E$. Montrer que l'application $L(x) = \lambda x + a$ est une application continue, qui est un homéomorphisme si $\lambda \neq 0$. Montre que

$$L(B(x,r)) = B(L(x), |\lambda| r).$$

**Exercice 3.** Soit $a \in \mathbb{R}^3$ un vecteur fixe et considérer les applications produit scalaire $p_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \;\; p_a(x) = < x, a >$ et produit vectoriel $P_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \;\; P_a(x) = x \wedge a = x \times a$. Montrer que $p_a$ et $P_a$ sont des applications linéaires et calculer leurs normes si $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme $||*||_2$ et $\mathbb{R}$ de la norme valeur absolue.

**Exercice 4.** On munit $K[X]$ de la norme

$$||\sum_{k=0}^{d} a_k X^k|| = \max_{1 \leq k \leq d} |a_k|.$$

1. Vérifier que cette formule définit vraiment une norme sur $E = K[X]$.
2. Soit $b \in K$ un nombre tel que $|b| < 1$. Montrer que l'application $E \to K$, $P \mapsto P(b)$ est linéaire et continue. Que se passe-t-il si $|b| \geq 1$ ?
3. L'application linéaire $D : E \to E$, $P \mapsto P'$ est-elle continue ?

**Exercice 5.** Montrer que si $u \in E = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\mathbb{R}^n$ est munie de la norme $||*||_2$ au départ et à l'arrivée, alors

$$||u|| = \max\{\lambda \;:\; |\lambda|^{\frac{1}{2}} \text{ est une valeur propre de } {}^t u \cdot u\}.$$

**Exercice 6.** Soit $u \in E = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, où $\mathbb{R}^n$ est munie de la norme $||*||_1$ (resp. $||*||_\infty$ au départ et à l'arrivée. Déterminer $||u||$.