UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2017/2018**
Faculté des Sciences L3MA
Département de Mathématiques Calcul Différentiel
Feuille d'exercices n^{o}3

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. La fonction $t \mapsto f(t,t^2)$ est-elle continue à l'origine ? La fonction f est-elle alors continue à l'origine ?
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t, at)$ est continue à l'origine.

Exercice 2.

1. Trouver les ensembles compacts dans la liste suivante :

   $$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^6-1 = 0\},\ \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^6+y^8 < 0\},\ \ C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+yz = 0\}.$$

2. Soit $K_1 \subset \mathbb{R}^p$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^p$ deux ensembles compacts. Montrer que $K_1 \cap K_2$, $K_1 \cup K_2$ et $K_1 \times K_2$ sont compacts. Si K_n est une suite de compacts de $\mathbb{R}$, qu'est-ce qu'on peut dire de la réunion $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$?

Exercice 3. Soit $(E, ||*||)$ un evn et $K \subset E$ un compact. Montrer que K est un ensemble fermé et borné.

Exercice 4. Soit $(E, ||*||)$ un evn de dimension finie. Soit $K \subset E$ un ensemble fermé et borné. Montrer que K est un compact, en utilisant le fait que $[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $(E, ||*||)$ un evn et $(x_n)_n$ une suite convergente de E vers $y \in E$. Montrer que l'ensemble $\{x_n \ : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est un compact.

Exercice 6. Montrer que $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ munie de la norme $||*||_1$ n'est pas complet.

Exercice 7. Soit $(E, ||*||)$ un evn de dimension finie. Montrer que E est complet, en utilisant le fait que $\mathbb{R}$ est complet.