UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS — **2017/2018**
Faculté des Sciences — L3MA
Département de Mathématiques — Calcul Différentiel
Feuille d'exercices n^{o}5

Exercice 1. Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h(x, y, z) = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$.

(i) Montrer que h est différentiable sur $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice jacobienne de h en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis en $(t, t, t) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et posons $g = f \circ h$. Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t, t, t) = 0.$$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$h(r, \theta) = (r\cos(\theta), (r\sin(\theta))).$$

On pose $g = f \circ h$. Calculer les dérivées partielles de g en un point (r_0, θ_0) en fonction des dérivées partielles de f au point $(x_0, y_0) = h(r_0, \theta_0)$.

Exercice 3. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||*||_2$. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = x/||x||_2$.

1. Justifier que f est différentiable et calculer la matrice jacobienne de f.
2. Montrer que $D_x f(x) = 0$ pour tout x. Peut-on trouver ce résultat sans calcul ?
3. Calculer le déterminant jacobien de f (si possible sans calcul).

Exercice 4. Soit $E = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $f : E \to \mathbb{R}$, $f(u) = \det(u)$. Montrer que f est différentiable au point $u_0 = Id$ et calculer la différentielle $D_{Id} f$.

Exercice 5. (i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Montrer que f est une fonction constante.

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Montrer que f est une fonction indépendante de x : pour $(x_1, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x_1, y) = f(x_2, y)$.

(iii) Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [0, +\infty[)$. Montrer qu'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et f n'est pas une fonction indépendante de x.

Exercice 6. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Montrer que pour $a, b \in U$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = D_c f(b - a)$.