Université Côte d'Azur
Mathématiques

Feuille 1

S6
Variable Complexe
2019-2020

Exercice 0 Soit c un nombre réel.
a) Représenter dans le plan les nombres complexes de partie réelle égale à c;
b) Représenter dans le plan les nombres complexes de partie imaginaire égale à c;
c) Représenter dans le plan les nombres complexes de valeur absolue égale à c;
d) Représenter dans le plan les nombres complexes de valeur absolue inférieure ou égale à c;
e) Ecrire dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ la matrice de la multiplication avec le nombre complexe $z = \rho exp(i\theta)$, avec ρ un nombre réel ≥ 0 et θ un nombre réel.

Exercice 1 **Opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.**
a. Montrer que toute application $\mathbf{R}$-linéaire $L : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ s'écrit de manière unique $L(z) = az + b\bar{z}$, où a et b sont des nombres complexes.
On note dz l'identité de $\mathbf{C}$ et $d\bar{z}$ la conjugaison complexe. L'écriture précédente devient $L(z) = adz + bd\bar{z}$.
b. Montrer que L est $\mathbf{C}$-linéaire si et seulement si $b = 0$.
On note dx l'application qui associe a un nombre complexe sa partie réelle et dy l'application qui associe a un nombre complexe sa partie imaginaire.
c. Exprimer dz et $d\bar{z}$ en fonction de dx et dy.
Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$ une application continument différentiable au sens réel. La différentielle $Df(z_0)$ est une application $\mathbf{R}$-linéaire. Nous définissons alors $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ par :

$$Df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

d. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ pour $f(z) = z$ et $f(z) = \bar{z}$.
e. Montrer que l'application f est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
f. Calculer $\frac{\partial (f \circ g)}{\partial z}$ et $\frac{\partial (f \circ g)}{\partial \bar{z}}$. En déduire que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$ et $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$.

Exercice 2 Quel est le rayon de convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} z^n \quad ; \sum_{n\geq 0} n^k z^n \quad (k \geq 0) \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} n^n z^n \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n \quad ;$$

Exercice 3 **L'exponentielle.**
1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Lorsque cette somme est définie, on note e^z sa somme. Montrer que, pour z, z_1, z_2 dans $\mathbf{C}$:

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z \qquad \frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\ z} \qquad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

2. On note $\mathrm{ch}\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\mathrm{sh}\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cos z = \mathrm{ch}\ (iz)$ et $\sin z = -i\mathrm{sh}\ (iz)$. Justifier les formules suivantes :

$$\mathrm{ch}^2\ z - \mathrm{sh}^2\ z = 1 \qquad \cos' = -\sin \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh} \qquad |\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2\ y \qquad |\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2\ y.$$

3. Résoudre dans $\mathbf{C}$:

$$e^{3z} = 1 \qquad e^{4z} = i \qquad e^{z} = -1$$
$$\mathrm{ch}\ z = 0 \qquad e^{z} = a\ ;\ a \in \mathbf{R}$$

On pourra rappeler pourquoi la restriction de l'exponentielle à $\mathbf{R}$ est un difféomorphisme.

Exercice 4 Soit f une fonction définie sur un ouvert du plan, à valeurs dans $\mathbf{C}$. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent, on appelle *Laplacien* de f la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Comparer l'opérateur Δ aux opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial}{\partial z}$. Montrer que si f est holomorphe, alors :

$$\begin{aligned} \Delta f &= 0 \\ \Delta |f|^2 &= 4|f'|^2 \\ \Delta\left(\ln\,(1+|f|^2)\right) &= \frac{4|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} \end{aligned}$$

Exercice 5 Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$.
a. Si la partie réelle de f est une fonction constante montrer que f est constante.
b. Si f est à valeurs dans une droite de $\mathbf{R}^2$ montrer que f est constante.
c. Si l'argument de f est constant montrer que f est constante.
d. Si $|f|$ est une fonction constante montrer que f est constante.
e. Si $f(z) = f(\bar{z})$, montrer que f est constante.
f. Si f et g sont holomorphes sur $D(0,1)$ et telles que $|f|^2 + |g|^2$ est constante, alors f *et* g sont constantes.

Exercice 6 Soit f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert U connexe. Montrer que si, pour tout $z \in U$, $f(z) + \overline{g(z)}$ est réel, alors $f - g$ est constante.

Exercice 7 Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction différentiable (au sens réel) définie sur U à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ et à différentielle inversible (en chaque point). On suppose que pour tout point $(x_0, y_0) \in U$, f envoie l'horizontale et la verticale en (x_0, y_0) sur deux courbes orthogonales en $f(x_0, y_0)$. On fait la même hypothèse pour les bissectrices. Montrer que la fonction f est holomorphe ou bien anti-holomorphe (i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$).

Exercice 8 **a.** Soit f une fonction holomorphe définie sur un ouvet U de $\mathbf{C}$. Calculer le jacobien de f (considérée comme fonction $\mathbf{R}$-différentiable) en z.
b. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 1$ et supposons f injective sur le disque unité fermé $\bar{D}$. Calculer l'aire de $f(D)$.
c. En déduire que l'aire de $f(D)$ est supérieure ou égale à $\pi|f'(0)|^2$ et traiter le cas d'égalité.