Feuille 2

Exercice 1 Tracer les chemins définis comme suit : γ_1 est donné par la formule $t^2 + it$ pour $t \in [0, 2]$ et γ_2 est la juxtaposition du segment de droite qui joint $z = 0$ à $z = 2i$ et du segment de droite qui joint $z = 2i$ à $z = 4 + 2i$. Calculer

$$\int_{\gamma_1} \bar{z} dz \text{ et } \int_{\gamma_2} \bar{z} dz$$

Exercice 2 Soient γ_1 et γ_2 deux chemins fermés de classe C^1 paramétrés par un même segment I.
a. On suppose que 0 n'appartient au support d'aucun des deux lacets. Pour $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$, on définit la fonction $\gamma^{m,n}$ qui à $t \in I$ associe $(\gamma_1(t))^m(\gamma_2(t))^n$. Montrer que ceci définit un chemin fermé de classe C^1 et calculer $\mathrm{Ind}_{\gamma^{m,n}}(0)$ en fonction de $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0)$ et $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$.
b. On suppose que, pour tout $t \in I$, $|\gamma_1(t)| < |\gamma_2(t)|$. Montrer que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1+\gamma_2}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$.

Exercice 3 On note ici "log" la détermination principale (et bien sûr holomorphe) du logarithme sur $\Omega = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$. Soit α un nombre complexe. Pour tout $z \in \Omega$, on pose $p_\alpha(z) = e^{\alpha \log z}$.
a. Montrer que si α est un entier relatif, alors, pour tout $z \in \Omega$, $p_\alpha(z) = z^\alpha$ (au sens des puissances dans le corps $\mathbf{C}$).
b. Montrer que la restriction de p_α à $\mathbf{R}^{+*}$ coincide avec la fonction usuelle "puissance α". On notera désormais, pour tout $z \in \Omega$, $p_\alpha(z) = z^\alpha$.
c. Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, $\forall z \in \Omega$; $\left(z^{1/n}\right)^m = z^{m/n}$.
d. A-t-on, dans les mêmes conditions $(z^m)^{1/n} = z^{m/n}$?

Exercice 4 Soient $A = [-1, 1]$, $\Omega_1 = \mathbf{C} \setminus A$.
a. Soit Ω_2 l'image de Ω_1 par l'application $z \mapsto 1/z$. Décrire Ω_2, montrer que c'est un ouvert étoilé.
b. Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur Ω_2 telle que : $\forall z \in \Omega_2$; $(f(z))^2 = 1 - z^2$.
c. En déduire qu'il existe une fonction g holomorphe sur Ω_1 telle que : $\forall z \in \Omega_1$; $(g(z))^2 = 1 - z^2$.
d. Existe-t-il une fonction h holomorphe sur Ω_1 telle que : $\forall z \in \Omega_1$; $\exp(h(z)) = 1 - z^2$. On pourra dériver h puis "l'intégrer" sur un chemin bien choisi.

Exercice 5 Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de fonction entière f telle que $f \circ f = exp$, où exp désigne la fonction exponentielle. On raisonne par l'absurde.
a. Montrer que si il existe f holomorphe sur $\mathbf{C}$ telle que $f \circ f = exp$, alors l'image de f est exactement $\mathbf{C}^*$.
b. Montrer qu'il existe alors une fonction entière g telle que $exp \circ g = f$.
c. Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbf{C}$ telle que

$$(g \circ f)(z) = z + c,$$

pour tout z dans $\mathbf{C}$.
d. En déduire que la fonction exp serait injective. Conclure.