Université Côte d'Azur
Mathématiques
S6

Feuille 3

L3
Variable Complexe
2019-2020

Exercice 1
On note $D = \{z \in \mathbf{C}\,;\, |z| < 1\}$ et on considère une fonction f continue dans D et holomorphe dans $D \backslash]-1,1[\times \{0\}$. Montrer que si T est un triangle dans D alors :

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 2
Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et Δ une droite. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \Delta$ et continue sur Ω. Montrer que f est holomorphe dans Ω.

Exercice 3
Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ connexe et symétrique par rapport à l'axe réel.
On note $\underline{\Omega}^+ = \{z \in \Omega\,;\, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $\Omega^+ = \{z \in \Omega\,;\, \operatorname{Im} z > 0\}$ et $\Omega^- = \{z \in \Omega\,;\, \operatorname{Im} z < 0\}$.
Soit f une fonction continue sur $\underline{\Omega}^+$, holomorphe sur Ω^+. On suppose de plus que f est réelle sur l'axe réel.
Soit g la fonction définie par :

$$g(z) = \quad f(z) \quad \text{si } z \in \underline{\Omega}^+$$

$$g(z) = \quad \overline{f(\overline{z})} \quad \text{si } z \in \Omega^-$$

a. Montrer que g est holomorphe dans Ω.
b. Décrire toutes les fonctions holomorphes dans Ω qui coincident avec f sur Ω^+.
c. On suppose maintenant que $\Omega = D(0,1)$, que f est nulle sur $]-1,1[\times\{0\}$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 4
a. Soit f une fonction holomorphe sur $D \setminus \{0\}$, bornée. Montrer que f est holomorphe sur D (On pourra démontrer la formule suivante $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_\mathcal{R}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$, où $0 < \varepsilon < |z| < R < 1$ et $\mathcal{C}_\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}_\varepsilon$ sont respectivement les cercles de rayon R et ε orientés positivement).
b. Peut-on affaiblir l'hypothèse f bornée ?

Exercice 5 Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant l'adhérence du disque unité D et soit f une fonction holomorphe sur U. Pour $t \in [0, 2\pi]$, on pose $\gamma(t) = e^{it}$.
a. Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_\gamma \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz \quad , \quad I_2 = \int_\gamma \left(2 - z - \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz$$

En déduire la valeur de :

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2 \frac{t}{2}\, dt \quad , \quad \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2 \frac{t}{2}\, dt$$

b. Pour $|a| \neq 1$, calculer :

$$I(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z - a}\, dz$$

c. Soit g une fonction holomorphe sur le disque unité D et continue sur son adhérence. Montrer que pour $z \in D$, on a :

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g(u)}{u - z}\, du$$

Exercice 6 **a.** Soit f une fonction entière non constante. Montrer que $f(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathbf{C}$.
b. Que dire de deux fonctions entières f et g telles que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 7
Soit f et g deux fonctions holomorphes non nulles sur un ouvert connexe Ω contenant 0. On suppose qu'il existe une suite de points $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans Ω qui tend vers 0 et telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}\ ;\ f'(a_n)g(a_n) = f(a_n)g'(a_n)$$

Trouver une relation entre f et g.

Exercice 8
Soit $\Omega = D(1,1)$. Décrire, s'il en existe, toutes les fonctions holomorphes f dans Ω et qui vérifient, pour $n \geq 2$:

a) $f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}$ b) $f\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = f\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{n}$

c) $f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = e^{-n}$ d) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}$