Université Côte d'Azur
Mathématiques
S6

Feuille 4

L3
Variable Complexe
2019-2020

Exercice 1 Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. On suppose qu'il existe deux complexes non nuls a et b, $\mathbf{R}$-linéairement indépendants, tels que pour tout z :

$$f(z+a) = f(z+b) = f(z)$$

Montrer que f est constante.

Exercice 2 Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant le disque $\overline{D}(0,1)$ et f une fonction holomorphe sur U telle que :

$$f(0) = 1 \quad et \quad |\, f(z) \,| > 1 \quad si \quad |\, z \,| = 1$$

Montrer que f a au moins un zéro dans $D(0,1)$.

Exercice 3 Soit f une fonction holomorphe du disque unité dans lui-même telle que $f(0) = a \neq 0$. Montrer que f ne s'annule pas dans le disque de centre 0 et rayon $|a|$.

Exercice 4 : Théorème des trois cercles de Hadamard.
Soit U un ouvert contenant l'anneau $A = \{z \in \mathbf{C} \;;\; r \leq |\, z \,| \leq R\}$ $(0 < r < R)$. Soit f holomorphe sur U. Montrer que, pour $r \leq \rho \leq R$:

$$M_f(\rho) \leq M_f(r)^{\frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}} \; M_f(R)^{\frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}}$$

On pourra appliquer le principe du maximum aux fonctions $z \mapsto z^p [f(z)]^q$,$p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 5 Soit $a \in \mathbf{C}$. Calculer le résidu de la fonction $1/\sin^2 z$ en a.

Exercice 6 Soient f, g deux fonctions holomorphes au voisinage de a et n un nombre entier positif. Supposons que $g(a) \neq 0$. Montrer que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-a)^n}, a\right) = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-a)g(z)}, a\right) = \frac{f(a)}{g(a)}$$

Exercice 7 Calculer

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2\cos t + \sin t} \qquad (b) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} \qquad (c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5 - 4\cos t} dt$$

où a est un nombre réel.

Exercice 8 Calculer

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} \qquad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx \qquad (c) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

On pourra intégrer une fonction holomorphe convenable sur le segment $[-R, R]$ et sur un demi-cercle de centre 0 et de rayon R.

Exercice 9 Montrer que les zéros du polynôme $z^6 - 5z^3 + 12$ se trouvent dans l'anneau $A = \{z \;;\; 1 \leq |z| \leq 2\}$.