Université Côte d'Azur
Mathématiques
S6

Feuille 5

L3
Variable Complexe
2019-2020

Exercice 0 **(a)** Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$. Supposons que

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = 0.$$

Montrer qu'il existe deux polynômes P et $Q \neq 0$ tels que $f = P/Q$.
(b) Même conclusion s'il existe $l \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = l.$$

Exercice 1 Déterminer toutes les bijections holomorphes du disque $D(0,r) \subset \mathbf{C}$ de centre 0 et de rayon r dans lui même.

Exercice 2 Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité D de $\mathbf{C}$. On suppose que $\lim\limits_{|z|\to 1} |f(z)| = +\infty$ $(*)$.
1. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans D.
2. Construire, à partir de f, une fonction sans zéros dans D qui vérifie encore $(*)$.
3. Aboutir à une contradiction. Montrer que pour toute fonction holomorphe dans D, on a $\liminf\limits_{|z|\to 1} |f(z)| < +\infty$.

Exercice 3 **1.** Pour α dans le disque unité D, on pose :

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

Rappeler les propriétés de telles fonctions.
2. Soient α et β deux complexes de D et g une fonction holomorphe sur D, bornée par 1 et telle que $g(\alpha) = \beta$. Quelle est la plus grande valeur que peut prendre $|g'(\alpha)|$?
3. Soit f une fonction holomorphe sur D telle que $\mid f(re^{i\theta}) \mid$ tend vers 1 quand r tend vers 1, uniformément en θ. Montrer que f a un nombre fini de zéros dans D. Montrer alors qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in D^n$ et u de module 1 tels que :

$$\forall\ z \in D, \qquad f(z) = u\prod_{i=1}^{n} \varphi_{a_i}(z)$$

Exercice 4 Soit f une fonction entière (i.e. holomorphe sur $\mathbf{C}$) telle que $f(0)$ est différent de 0. Pour $r > 0$ fixé, on note $|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n|$ les zéros de f (répétés avec multiplicité) contenus dans $D(0,r)$.
a). En considérant la fonction $g(z) = \dfrac{f(z)}{\prod_{k=1}^{n} \frac{r(z-a_k)}{r^2-\overline{a_k}z}}$, montrer l'inégalité suivante due à Jensen :

$$|f(0)| \cdot \frac{r^n}{\prod_{k=1}^{n} |a_k|} \leq M_f(r),$$

où $M_f(r)$ est $sup_{|z|=r}|f(z)|$.
b). Si $n_f(t)$ désigne le nombre de zéros de f (comptés avec multiplicité) contenus dans le disque $D(0,t)$, montrer que $\int_0^r \frac{n_f(t)}{t}dt = n_f(r)lnr - \sum_{i=1}^{n} ln|a_i|$ et en déduire l'inégalité

$$\int_0^r \frac{n_f(t)}{t}dt \leq logM_f(r) - log|f(0)|.$$

(on pourra commencer par observer que la fonction $n_f(t)$ est constante sur les intervalles $]|a_i|, |a_{i+1}|[$).
c). En déduire que $n_f(r) \leq logM_f(er) - log|f(0)|$.

Exercice 5 Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$, paire, périodique de période π ayant dans le fermé $A = \{-\pi/2 \leq \text{Re}z \leq \pi/2\}$ comme seule singularité un pôle d'ordre au plus 4 en 0 et qui de plus tend uniformément vers 0 quand $|\text{Im}z| \to +\infty$ (z restant dans A). Montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que

$$f(z) = \frac{a}{\sin^2 z} + \frac{b}{\sin^4 z}$$

Que peut-on dire si 0 est un pôle d'ordre au plus 3?

Exercice 6

1. Montrer que, pour $|z| = 1$, $|ze^z| \geq e^{-1}$. En déduire que, pour $|w| < e^{-1}$, l'équation $ze^z - w = 0$ a une unique solution dans le disque unité ouvert. On note $S(w)$ cette solution.

2. Montrer que, pour $|w| < e^{-1}$, on a :

$$S(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,1)} \frac{z(z+1)e^z}{ze^z - w} dz$$

où $\gamma(0,1)$ désigne le cerlce de centre 0 et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.

3. Calculer, pour des entiers relatifs p et q fixés, l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,1)} z^p e^{qz} dz$$

4. Montrer que $S(w)$ est développable en série entière dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon e^{-1} et calculer ce développement.