Sur l'uniformisation locale et globale des structures géométriques holomorphes rigides

Sorin DUMITRESCU

30 juin 2011

Résumé. Nous présentons des résultats de classification pour des variétés complexes compactes possèdant des structures géométriques holomorphes rigides.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-JCJC-0130-01.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Géométries de Klein

Une *géométrie*, au sens de Klein, est un espace homogène G/I, où G est un groupe de Lie (de dimension finie) et I un sous-groupe fermé de G. Le groupe G est alors le groupe des symétries (isométries) de la géométrie et joue le rôle central suivant : deux parties de l'espace G/I seront considérées équivalentes si l'une est l'image de l'autre par une transformation appartenant au groupe G.

L'exemple type est celui de *la géométrie euclidienne*, associée au groupe des déplacements $G = O(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$ et où le stabilisateur d'un point est le groupe *d'isotropie* $I = O(n, \mathbf{R})$. Comme le sous-groupe des translations $\mathbf{R}^n$ agit librement et transitivement sur G/I, un modèle de la géométrie euclidienne sera alors $\mathbf{R}^n$ muni de la forme quadratique définie positive standard $dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$.

Autres exemples remarquables de géométries (présentées sous leurs versions complexes) sont :

- *la géométrie riemannienne holomorphe plate*, obtenue pour $G = O(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ et $I = O(n, \mathbf{C})$. Un modèle de cette géométrie est $\mathbf{C}^n$ muni de la forme quadratique complexe non dégénérée $dz_1^2 + \ldots + dz_n^2$. *Il s'agit de la version holomorphe de la géométrie euclidienne.*
- *la géométrie affine complexe* obtenue pour $G = GL(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ et $I = GL(n, \mathbf{C})$. L'action de G sur $\mathbf{C}^n$ préserve les droites complexes parcourues à vitesse constante.
- *la géométrie projective complexe*, où G est le groupe de transformations projectives de l'espace projectif complexe $P^n(\mathbf{C})$ et I est le stabilisateur d'un point. Dans ce cas G préserve les droites projectives, sans respecter le paramétrage.

Gauß et Riemann sont les premiers à avoir introduit et étudié l'objet infinitésimal associé à la géométrie euclidienne : en language moderne, *une métrique riemannienne* sur une variété est un champ lisse de formes quadratiques définies positives sur l'espace tangent.

Postérieurement, dans un vaste programme de généralisation, Cartan a réussi à définir les objets infinitésimaux associés aux géométries de Klein G/I et qui sont, à ces géométries, ce que les métriques riemanniennes sont à la géométrie euclidienne [76]. Par exemple, *une connexion affine holomorphe* est la généralisation infinitésimale de la géométrie affine complexe et *une connexion projective holomorphe* est la généralisation infinitésimale de la géométrie projective complexe.

Cartan associe à ces objets un tenseur de courbure qui s'annule si et seulement si l'objet infinitésimal est *plat*, autrement dit localement équivalent à G/I.

Cartan et Lie ont longuement étudié les symétries (isométries) de ces objets infinitésimaux.

Ehresmann est celui qui a posé le cadre moderne intrinsèque dans lequel ces *structures géométriques* infinitésimales se définissent [25]. La définition de structure géométrique, dégagée par Ehresmann (suite aux travaux précurseurs de Cartan) et reprise fructueusement par Gromov dans [35], est présentée dans la suite et sera amplement revisitée au chapitre 3.

1.2 Structures géométriques holomorphes

Commençons par donner la définition d'une structure géométrique d'après [3, 35], dans le contexte holomorphe qui sera discuté dans ce texte.

Considérons une variété complexe M de dimension n. Rappelons que, pour tout entier positif r, le groupe D^r, des r-jets en 0 de germes de biholomorphismes locaux de $\mathbf{C}^n$ qui fixent 0, est un groupe linéaire algébrique qui coïncide avec $GL(n, \mathbf{C})$, pour $r = 1$, et avec une extension de $GL(n, \mathbf{C})$ par le groupe additif des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbf{C}^n$, si $r = 2$.

Le fibré des r-repères $R^r(M)$ de M, autrement dit le fibré des r-jets en 0 de germes de biholomorphismes locaux, centrés en 0, entre $\mathbf{C}^n$ et M, est un fibré principal au-dessus de M, de groupe structural D^r. Nous suivons [3, 35] et donnons la

Définition 1.1 *Une structure géométrique holomorphe ϕ (d'ordre r) sur M est une application holomorphe, D^r-équivariante, $\phi : R^r(M) \to Z$, avec Z une variété algébrique munie d'une action algébrique de D^r. Si Z est une variété affine, alors la structure géométrique ϕ est dite de type algébrique affine.*

L'application ϕ s'interprète comme une section holomorphe du fibré de fibre Z, associé au fibré principal $R^r(M)$ via l'action de D^r sur Z.

Exemple : Si $r = 1$ et Z est un espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire de $GL(n, \mathbf{C})$, alors ϕ est un *tenseur holomorphe*. Il s'agit d'une structure géométrique de type algébrique affine. On dira, avec Bogomolov [12, 13], que ϕ est *de type général*, s'il existe un point dans l'image de ϕ dans Z dont le stabilisateur est un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbf{C})$.

Un biholomorphisme local f de M agit naturellement sur les sections du fibré précédent. Si cette action préserve ϕ, alors f est une *isométrie locale* de ϕ. Si les isométries locales agissent transitivement sur M, alors la structure géométrique ϕ est dite *localement homogène.*

Si l'image de ϕ dans Z est exactement une D^r-orbite, qui s'identifie alors à un espace homogène D^r/G, où G est le sous-groupe de D^r qui stabilise un point de l'image, alors ϕ s'interprète comme une section d'un fibré de fibre D^r/G. Cette section fournit une réduction du groupe structural de $R^r(M)$ au sous-groupe G. Une telle structure géométrique est dite une *G-structure holomorphe* [48].

La structure géométrique ϕ est dite *rigide*, au sens de Gromov [3, 35], si une isométrie locale est déterminée par un jet d'ordre fini. Le pseudo-groupe des isométries locales d'une structure géométrique rigide est un pseudo-groupe de Lie de dimension finie, engendré par une algèbre de Lie de dimension finie appelée *algèbre de Lie des champs de Killing locaux.*

Présentons maintenant des exemples importants de structures géométriques holomorphes rigides qui sont des G-structures.

– Si $r = 1$ et $G = \{Id\}$, on est en présence d'une trivialisation holomorphe du fibré tangent holomorphe. Une telle structure est aussi appelée *parallélisme holomorphe* et, dans ce cas, la variété M est dite *parallélisable.*
– Si $r = 1$ et $G = O(n, \mathbf{C})$, on est en présence d'une *métrique riemannienne holomorphe* qui est l'équivalent, dans le contexte complexe, d'une métrique riemannienne. Il s'agit de la version infinitésimale de la géométrie riemannienne holomorphe plate.
– Si $r = 1$ et $G = \mathbf{C}^* \ltimes O(n, \mathbf{C})$ est le groupe des similitudes linéaires complexes, on est en présence d'une *structure conforme holomorphe.* Il s'agit d'une structure géométrique rigide, dès que n est supérieur ou égal à trois.
– Soit $r = 2$ et considérons le sous-groupe G de D^2, isomorphe à D^1, constitué par les 2-jets en 0 d'isomorphismes linéaires de $\mathbf{C}^n$. Cette G-structure est une *connexion affine holomorphe sans torsion.*
– Soit $r = 2$ et G le sous-groupe de D^2, constitué par les 2-jets en 0 de transformations projectives de $P^n(\mathbf{C})$ qui fixent 0. Il s'agit d'une *connexion projective holomorphe normale.*

Remarque 1 *Les parallélismes et les connexions affines sont des structures géométriques de type algébrique affine, mais pas les structures conformes, ni les connexions projectives.*

La définition précédente des connexions affines et projectives, vues comme G-structures est classique [49]. Le lecteur pourra également se référer à [67], pour voir que la définition précédente coïncide avec celle issue de la théorie des faisceaux et adoptée dans [38, 51, 52].

Des nombreux résultats montrent que les G-structures holomorphes sur les variétés compactes ont tendance a être localement homogènes (et même plates dans le cas des variétés kählériennes) [41], [43], [61], [82], [21], [19], [22].

Le plus instructif dans ce sens nous semble le résultat suivant dû à Wang [82] (voir la preuve un peu plus tard).

Théorème 1.2 *(Wang) Soit M une variété complexe compacte connexe admettant un parallélisme holomorphe. Alors M est un quotient d'un groupe de Lie com-*

plexe connexe simplement connexe G par un réseau cocompact Γ. De plus, M est kählérienne si et seulement si G est abélien (et M est un tore complexe).

Rappelons aussi les théorèmes suivants qui seront prouvés et généralisés à la section 4 :

Théorème 1.3 *(Inoue, Kobayashi, Ochiai) Soit M une variété kählérienne compacte et connexe, munie d'une connexion affine holomorphe ∇. Alors M admet un revêtement fini non ramifié qui est un tore complexe et sur lequel l'image réciproque de ∇ est invariante par translations.*

Théorème 1.4 *(Bogomolov, Yau) Soit M une variété kählérienne compacte connexe dont la première classe de Chern est nulle, munie d'un tenseur holomorphe de type général ϕ. Alors M admet un revêtement fini non ramifié qui est un tore complexe et sur lequel l'image réciproque de ϕ est un tenseur invariant par translations.*

Ce texte présente un survol des théorèmes de classification pour les variétés complexes *compactes* M admettant des structures géométriques holomorphes *rigides* ϕ (qui unifient et généralisent les résultats précédents).

Par exemple, dans le contexte des variétés kählériennes nous démontrons :

Théorème 1.5 *Soit M une variété kählérienne compacte connexe dont la première classe de Chern est nulle, munie d'une structure géométrique holomorphe de type affine ϕ. Alors ϕ est localement homogène.*

Si, de plus, ϕ est rigide, alors M admet un revêtement fini qui est un tore complexe et sur lequel l'image réciproque de ϕ est invariante par translations.

Dans le cas où M n'est pas supposée kählérienne, la situation est plus délicate. Les résultats de classification obtenus dans ce cadre sont moins généraux : ils concernent les métriques riemanniennes holomorphes en dimension trois et les connexions affines et projectives holomorphes sur les surfaces complexes compactes. Ces résultats seront présentés au dernier chapitre.

La stratégie générale pour obtenir ce type de résultat est la suivante. On démontre que la structure géométrique est localement homogène, localement isomorphe à une structure géométrique G-invariante $\tilde{\phi}$ sur un espace homogène modèle G/I (ici G sera le groupe de Lie connexe et simplement connexe associé à l'algèbre de Lie des champs de Killing locaux de ϕ).

Nous sommes alors dans la situation décrite par la définition suivante.

Définition 1.6 *La variété M est localement modelée sur la géométrie G/I, au sens d'Ehresmann-Thurston [24, 79], ou encore admet une $(G, G/I)$-géométrie, s'il existe un atlas de M à valeurs dans des ouverts de G/I tel que les applications de changements de carte soient données par des éléments du groupe G.*

Si M est compacte, nous dirons aussi que la géométrie G/I admet *une réalisation compacte* sur M.

De plus, la structure géométrique ϕ sur M proviendra d'une structure géométrique du même type, G-invariante, sur G/I. On peut tenter de classifier toutes ces géométries G/I, ainsi que leurs réalisations compactes.

Rappelons que Thurston a donné cette classification pour le cas où G/I est de dimension (réelle) trois et G préserve une métrique riemannienne sur G/I (voir [78, 79, 75]). Il est classiquement connu (comme conséquence du théorème de Hopf-Rinow) que, dans le cas riemannien, toute réalisation compacte de G/I est un quotient. Ceci n'est nullement assuré (et souvent faux) dans le cas où I est non compact.

Dans [23], nous réalisons complétement ce programme dans le cas où M est une variété complexe compacte de dimension trois munie d'une métrique riemannienne holomorphe (voir section 5.1). Dans ce cas, G/I est de dimension complexe trois et l'action canonique de G sur G/I préserve une métrique riemannienne holomorphe.

La composition de ce texte est la suivante.

La section 2 présente des résultats classiques d'uniformisation locale et globale pour des structures géométriques sur les surfaces de Riemann. On démontre le théorème de coordonnées isothermes de Gauß, l'uniformisation des courbes elliptiques, et on commente le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann.

La section 3 introduit avec détails les structures géométriques rigides au sens de Gromov dans son cadre naturel (le language des jets d'Ehresmann) et on démontre le théorème de décomposition en orbites du pseudo-groupe des isométries locales (théorème 3.10). Comme application nous démontrons que toute structure géométrique holomorphe sur une surface d'Inoue est localement homogène.

La section 4 présente des résultats de classification pour les variétés parallélisables et les variétés kählériennes qui admettent des structures géométriques holomorphes rigides.

Lors de la dernière section, on aborde le cas des variétés non nécessairement kählériennes. On y présente la classification (obtenue en collaboration avec Zeghib) des métriques riemanniennes holomorphes en dimension trois, ainsi que des résultats sur la géométrie locale des connexions affines et projectives holomorphes sur les surfaces complexes compactes. On énonce également des questions, des conjectures et des directions pour des développements futurs.

2 Résultats classiques d'uniformisation

2.1 Le théorème de coordonnée isothermes de Gauß

Commençons avec quelques remarques préliminaires sur les *structures conformes et les structures complexes sur les surfaces.*

Soit V un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbf{R}$ et supposons-le muni d'une orientation.

Une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel sur V est la donnée d'un endomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire $J : V \to V$ tel que $J \circ J = -Id$.

Remarquons que toute forme quadratique réelle définie positive sur V munit V d'une unique structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel compatible avec l'orientation (i.e. (v, iv) est une base directe du $\mathbf{R}$-espace vectoriel V, quelque soit $v \in V$). En effet, il suffit de définir iv comme l'unique vecteur orthogonal à v, de même norme que v et tel que la base (v, iv) est directe. Ceci définit bien une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension un sur V.

Par ailleurs, deux formes quadratiques g_1 et g_2 définissent la même structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel sur V si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $g_1 = \lambda g_2$. Dans ce cas, on dira que les formes quadratiques g_1 et g_2 sont *conformes* et qu'elles définissent la même structure conforme sur V (i.e. la même mesure d'angles). Pour préciser ces remarques, démontrons la

Proposition 2.1 *Soit V un espace vectoriel orienté de dimension deux. Alors la donnée d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel sur V compatible avec l'orientation est équivalente à la donnée d'une forme quadratique définie positive à équivalence conforme près.*

Démonstration On vient de voir que toute structure conforme sur V définit une structure complexe. De point de vue de la théorie des groupes, ceci est dû au fait que le groupe des transformations linéaires de V préservant la structure conforme et l'orientation est le groupe des similitudes directes et ce groupe préserve une structure complexe.

Inversement, si V est muni d'une structure complexe, V est identifié à $\mathbf{C}$ via un isomorphisme bien défini modulo les transfomations $\mathbf{C}$-linéaires $z \to \lambda z$, avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Toutes ces transformations préservent la classe conforme de la forme quadratique réelle définie positive $dx^2 + dy^2$, où $z = x + iy$. $\boxdot$

Généralisons maintenant ces considérations au cas des surfaces (dans ce cas, chaque espace tangent à la surface jouera le rôle de l'espace vectoriel V).

Rappelons d'abord qu'une structure de *surface de Riemann* sur une surface réelle S est la donnée d'un atlas holomorphe (qui confére donc à S une structure de variété complexe de dimension égale à un). En particulier, chaque espace tangent à S est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension égale à un.

Une *structure conforme* sur M est une classe d'équivalence de métriques riemanniennes par rapport à la relation d'équivalence qui décide que deux métriques g_1 et g_2 sont (conformément) équivalentes s'il existe un difféomorphisme f de M tel que $f^* g_1 = \lambda g_2$, où λ est une fonction définie sur M à valeurs dans $\mathbf{R}^*$.

Définition 2.2 *On dit que la structure conforme définie par une métrique riemannienne g sur une surface de Riemann S est compatible avec la structure complexe* *lorsque pour toute carte locale holomorphe locale $\phi : U \to S$, où U est un ouvert de $\mathbf{C}$, on a $\phi^* g = \lambda(dx^2 + dy^2)$, où $z = x + iy$ est la variable de $\mathbf{C}$ et $\lambda : U \to \mathbf{R}_+^*$ est une fonction lisse.*

Cette définition signifie que la restriction de la métrique riemannienne à chaque espace tangent $T_P S$ définit la même structure complexe que celle donnée par l'orientation et la structure complexe induite par la structure de surface de Riemann.

Une simple application du résultat d'existence d'une partition de l'unité montre l'existence sur la surface de Riemann S d'une métrique riemannienne compatible avec la structure complexe (l'ensemble des métriques compatibles est un cône convexe). On obtient ainsi :

Proposition 2.3 *Sur toute surface de Riemann il existe une unique structure conforme compatible avec la structure complexe.*

Dans l'autre sens, les considérations précédentes impliquent la

Proposition 2.4 *Soit S une surface réelle orientée. Alors toute structure conforme sur S détermine une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel complexe sur chaque espace tangent à S. Autrement dit, il existe un champ lisse d'endomorphismes J sur S tel que, pour tout $P \in S$, $J(P) : T_P \to T_P$ est tel que $J \circ J = -Id$.*

On appelera la donée d'un champ d'endomorphismes J avec la propriété précédente *une structure presque-complexe.*

Le résultat suivant, dû à Gauß, implique que les structures presque-complexes analytiques sur les surfaces analytiques définissent des structures complexes (on dit aussi qu'elles sont intégrables).

Théorème 2.5 (Gauß) *Soit g une métrique riemannienne analytique réelle, définie au voisinage d'un point p sur une surface analytique. Alors il existe une carte locale (x, y) au voisinage de p dans laquelle $g = f(x, y)(dx^2 + dy^2)$, pour une certaine fonction analytique réelle f. Autrement dit, g est localement conforme à la métrique plate standard.*

Dans une telle carte locale (x, y), le champ d'endomorphismes J est "constant", égal à la multiplication par i. Il s'agit d'un résultat d'uniformisation locale des structures presque-complexes (et conformes) en dimension (réelle) deux. Ceci s'avère faux en dimension supérieure.

Démonstration

Le problème étant local, on considére une métrique g définie dans un voisinage ouvert U de l'origine dans $\mathbf{R}^2$.

Nous allons commencer par démontrer un résultat analogue dans le cas d'une métrique lorentzienne g (i.e. un champ de formes quadratiques de signature $(+,-)$.

On se donne donc en chaque point de U une forme quadratique de signature $(+,-)$ et il s'agit de montrer que cette métrique lorentzienne est localement conforme à la métrique lorentzienne standard $dx^2 - dy^2$ de $\mathbf{R}^2$.

En chaque point de U, la métrique g définit alors deux droites sur lesquelles elle s'annule : les deux directions isotropes.

Pour la métrique lorentzienne standard $dx^2 - dy^2$, ces droites sont les droites parallèles aux deux bissectrices. On va trouver un difféomorphisme local qui relève les deux champs de droites isotropes de g sur les deux champs de droites parallèles aux bissectrices. Comme deux formes quadratiques non dégénérées de signature $(+,-)$ sont proportionnelles si et seulement si elles ont les mêmes directions isotropes, ceci démontrera le résulat dans le contexte lorentzien.

On fixe maintenant l'origine O comme point base dans U.

Par le point O passent deux courbes isotropes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui intègrent les deux champs de droites. Il suffit de construire deux champs de vecteurs locaux X_1 et X_2 au voisinage de O qui commutent et qui sont tangents aux deux champs de droites. Pour cela, définissons arbitrairement X_1 et X_2 le long des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et prolongeons les au voisinage de O en forçant la relation de commutation et le fait de rester tangent aux deux champs de droites.

Dans les coordonnées locales (x,y) dans lesquelles ce deux champs de vecteurs sont $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, on peut donc écrire $g = f(x,y)dxdy$, où f est une fonction. Ce qui est équivalent à la conclusion recherchée. Dans ce contexte lorentzien, la preuve n'utilise visiblement qu'une faible régularité ($\mathcal{C}^1$ suffit).

Dans le cas où g est une métrique *riemannienne* analytique réelle, il n'y a pas de direction isotrope.

On commence par complexifier l'ouvert U en un ouvert $\hat{U} \subset \mathbf{C}^2$; c'est un voisinage ouvert de U considéré maintenant comme contenu dans $\mathbf{C}^2$.

On notera $q_0 = dx^2 + dy^2$ la métrique *riemannienne holomorphe* standard de $\mathbf{C}^2$, où x et y sont les coordonnées complexes usuelles sur $\mathbf{C}^2$.

Les coefficients de la métrique g étant des fonctions analytiques réelles, on peut les prolonger, de manière unique, en une métrique riemannienne holomorphe q sur l'ouvert $\hat{U}$ (quitte à diminuer au besoin $\hat{U}$).

Sur $\mathbf{C}^2$, on dispose de deux réseaux transverses de droites complexes isotropes pour la métrique standard q_0, d'équations $y = \pm ix + cste$. Sur $\hat{U}$, on dispose de deux champs holomorphes de droites complexes, isotropes pour q. Rappelons que chaque champ de droites holomorphe s'intègre localement en une famille de courbes complexes (surfaces réelles). On définit alors, exactement comme dans le cadre lorentzien, un biholomorphisme local de $\mathbf{C}^2$ qui relève les deux champs de droites holomorphes sur les deux champs de droites parallèles aux deux bisectrices. Ceci montre que la métrique riemannienne holomorphe q est localement conformément équivalente à q_0.

Pour pouvoir revenir aux coordonéées réelles et à la métrique riemannienne initiale, il faut encore montrer que le biholomorphisme local de $\mathbf{C}^2$ que nous venons de construire a la propriété additionnelle d'être invariant par la conjugaison complexe.

Puisque les coefficients de g sont réels, $I^*q = \overline{q}$, où I désigne la conjugaison complexe $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$. Ceci montre que I envoie les deux champs de droites isotropes de q sur leurs conjugués. Il en est bien sûr de même pour les champs de droites isotropes de q_0. Ceci implique que le difféomorphisme local de conjugaison commute avec I, dès qu'on le construit en choisissant dans $\hat{U}$ un point origine réel qu'on envoie sur un point réel de $\mathbf{C}^2$. $\boxdot$

Traditionnellement, on qualifie les coordonnées locales (x, y) dans lesquelles la métrique est conforme à la métrique plate standard, de *coordonnées isothermes.*

Bien entendu, ces coordonnées ne sont pas uniques. Deux d'entre elles diffèrent par une transformation conforme du plan. La différentielle du changement de carte est donc en tout point une similitude.

Si l'on suppose que l'orientation est également préservée, on obtient une similitude directe du plan, donc une transformation holomorphe.

En résumé, toute métrique analytique réelle sur une surface analytique définit un atlas holomorphe et donc une structure de variété complexe de dimension 1 (surface de Riemann).

Le théorème de Gauß que nous avons établi dans le cas des métriques analytiques réelles reste vrai dans le cadre différentiable, mais il est alors bien plus difficile : il sera démontré par Korn et Lichtenschtein en 1916 dans le cadre C^∞, et finalement par Ahlfors et Bers en 1960 dans le cadre mesurable.

En particulier, toute métrique riemannienne g sur une surface orientée S définit de manière unique une structure de surface de Riemann sur S compatible avec g. Nous obtenons ainsi (au moins dans le cas analytique) l'autre sens de l'implication prouvée à la proposition 2.3 :

Théorème 2.6 *Une structure de surface de Riemann sur une surface S est équivalente à la donnée d'une orientation et d'une structure conforme.*

2.2 Théorème d'uniformisation des surfaces

Cette section est consacrée à un court rappel du théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann, résultat des travaux de plusieurs mathématiciens dont notamment Poincaré, Köebe, Klein, Schwarz et Picard.

Pour une excellente introduction aux mathématiques sous-jacentes au théorème d'uniformisation des surfaces le lecteur intéressé pourra bientôt consulter le livre [80].

Théorème 2.7 *Toute surface de Riemann connexe et simplement connexe est biholomorphe à la droite projective $P^1(\mathbf{C})$, à $\mathbf{C}$ ou au disque unité de $\mathbf{C}$.*

Remarquons que pour le cas des surfaces de Riemann compactes de genre $g = 0$ ceci donne :

Théorème 2.8 *Toute métrique riemannienne sur une surface compacte simplement connexe est conforme à la métrique standard de la sphère S^2.*

Démonstration L'unicité de la structure complexe sur une surface compacte simplement connexe (isomorphe à celle de $P^1(\mathbf{C})$) implique l'unicité de la structure conforme. ⊡

Nous démontrons ici l'uniformisation des surfaces de Riemann de genre $g = 1$. Commençons par l'énoncé suivant :

Théorème 2.9 *Toute cubique lisse dans $P^2(\mathbf{C})$ est biholomorphe à une courbe elliptique* $\mathbf{C}/\Lambda$.

Démonstration

Toute cubique lisse peut se mettre sous la forme $y^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, avec α, β, γ des nombres complexes deux à deux distinctes.

La forme différentielle

$$\omega = \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)}}$$

est bien définie et *non singulière* sur le revêtement double de la droite projective $x \in P^1(\mathbf{C})$, ramifié au-dessus des points $\alpha, \beta, \gamma, \infty$. Autrement dit, la cubique (compacte) lisse C d'équation $y^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ hérite d'une 1-forme holomorphe non singulière. En effet, la coordonnée locale v de la cubique C au voisinage de $x = \alpha$ est telle que $x - \alpha = v^2$. Par conséquent, $dx = 2vdv$ et $\omega \simeq 2dv$. Un calcul similaire au voisinage de l'infini (où la variable locale v satisfait la relation $1/x = v^2$) montre que ω est également holomorphe et non singulière à l'infini.

De manière duale, C hérite d'un champ de vecteurs holomorphe non singulier X, défini par la relation $\omega(X) = 1$. Comme C est compacte, le flot (complexe) de X est complet et son action (transitive) paramètre C par le quotient de $\mathbf{C}$ par le stabilisateur Λ d'un point. La cubique lisse vient d'être uniformisée par $\mathbf{C}$. L'application uniformisante est l'inverse d'une primitive w de ω : on vient de voir que le groupe des périodes de ω est un réseau Λ de $\mathbf{C}$ et w^{-1} est une fonction holomorphe (uniforme) Λ-périodique sur $\mathbf{C}$. ⊡

Plus généralement, on démontre, avec la même méthode, le :

Théorème 2.10 *Toute surface de Riemann S de genre $g = 1$ est biholomorphe à un quotient $\mathbf{C}/\Lambda$. En particulier, le revêtement universel est biholomorphe à $\mathbf{C}$.*

Démonstration On a vu précédemment qu'il suffit de montrer que S possède une 1-forme différentielle holomorphe non singulière. Ceci est une conséquence directe du théorème de Riemann-Roch [38] dont un cas simple affirme que S possède "autant" des 1-formes différentielles holomorphes non singulières que des fonctions holomorphes. Il s'agit donc d'un espace vectoriel de dimension 1. $\boxdot$

Corollaire 2.11 *Toute surface de Riemann de genre $g = 1$ admet une métrique riemannienne complète plate compatible avec la structure complexe.*

Démonstration Il s'agit de la métrique dx^2+dy^2 dans la coordonnée $z = x+iy \in \mathbf{C}$ du revêtement universel. Cette métrique est invariante par translations et descend sur la courbe elliptique. $\boxdot$

Bien sûr le théorème général équivalent au théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann est

Théorème 2.12 *Toute surface de Riemann admet une métrique riemannienne complète de courbure sectionnelle constante compatible avec la structure complexe.*

Démonstration Par le théorème de Poincaré-Koebe, la surface de Riemann est un quotient de $P^1(\mathbf{C})$, de $\mathbf{C}$, ou bien du disque unité dans $\mathbf{C}$ par un sous-groupe discret d'automorphismes agissant proprement et sans points fixes.

Dans le cas de $P^1(\mathbf{C})$, tout automorphisme admet au moins un point fixe (vecteur propre de la matrice de taille $(2,2)$ correspondante). Ainsi, la seule surface de Riemann revêtue par $P^1(\mathbf{C})$ est elle-même. Or, $P^1(\mathbf{C})$ possède la métrique standard de la sphère S^2.

Dans le cas du disque, la métrique de Poincaré $\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$ est complète et préservée par le groupe d'automorphismes $PSL(2,\mathbf{R})$. Cette métrique descend donc sur la surface quotient. $\boxdot$

2.3 Un théorème d'uniformisation dû à Wang

Théorème 2.13 *(Wang) Soit M une variété complexe compacte connexe admettant un parallélisme holomorphe. Alors M est un quotient d'un groupe de Lie complexe connexe simplement connexe G par un réseau cocompact Γ. De plus, M est kählérienne si et seulement si G est abélien (et M est un tore complexe).*

Démonstration Considérons une famille $X_1, \dots, X_n$ de champs de vecteurs holomorphes sur M qui forment, en chaque point, une base sur $\mathbf{C}$ de l'espace tangent holomorphe. Les crochets de Lie de ces champs, pris deux à deux, sont :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k.$$

Les fonctions c_{ij}^k, ainsi définies, sont holomorphes et, par conséquent, constantes. Ceci montre que les champs X_i forment une algèbre de Lie de dimension finie. D'après un résultat classique, dû à Lie, notre parallélisme est localement homogène, localement modelé sur un parallélisme donné par des champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie complexe connexe et simplement connexe G. Comme M est compacte, les X_i sont complets et G agit (à droite) sur M. Cette action est nécessairement transitive et M s'identifie au quotient (à gauche) de G par un réseau cocompact Γ.

Suposons maintenant que $M = \Gamma \backslash G$ est kählérienne et considérons la base $\omega_1, \dots, \omega_n$ de 1-formes différentielles holomorphes invariantes à gauche sur G, duale à $X_1, \dots, X_n$. Les formes ω_i descendent sur M. Rappelons que sur une variété kählérienne compacte toutes les formes differentielles holomorphes sont fermées [34].

Par ailleurs, la formule de Lie-Cartan donne :

$$d\omega_i(X_j, X_k) = -\omega_i([X_j, X_k]),$$

quels que soient $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

On constate que les formes ω_i sont toutes fermées si et seulement si les champs de vecteurs X_i commutent et donc G est abélien. $\boxdot$

3 Structures géométriques holomorphes

3.1 Le groupe $D^r(\mathbf{C}^n)$

Nous commençons par considérer l'ensemble des germes en 0 de toutes les applications holomorphes définies sur un ouvert de $\mathbf{C}^p$ qui contient le point 0, à valeurs dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ qui contient le point 0, et qui envoient 0 sur 0. Il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

Le quotient de cet espace par la relation d'équivalence "avoir le même polynôme de Taylor d'ordre r en 0" est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$, qu'on appelle classiquement *l'espace des r-jets en* 0 *des germes d'applications holomorphes de* $\mathbf{C}^p$ *dans* $\mathbf{C}^n$. Notons le $J_0^r(\mathbf{C}^p, \mathbf{C}^n)$ et précisons qu'un élément de cet espace s'exprime par une application polynômiale de degré r, de $\mathbf{C}^p$ dans $\mathbf{C}^n$, dont la partie homogène de degré i est déterminée par les dérivées partielles d'ordre i, calculées au point 0, de tout germe qui le représente. Par exemple $J_0^1(\mathbf{C}^p,\mathbf{C}^n)$ n'est rien d'autre que l'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^p,\mathbf{C}^n)$ des applications $\mathbf{C}$-linéaires de $\mathbf{C}^p$ dans $\mathbf{C}^n$.

Dans le cas particulier où p est égal à n, la composition des germes de fonctions munit l'espace vectoriel $J_0^r(\mathbf{C}^n)=J_0^r(\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^n)$ d'une loi de produit. Par la suite nous désignerons par le symbole $D^r(\mathbf{C}^n)$ le groupe des éléments inversibles de $J_0^r(\mathbf{C}^n)$. Le groupe $D^r(\mathbf{C}^n)$ est constitué des éléments de $J_0^r(\mathbf{C}^n)$ dont la partie linéaire est inversible dans $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^n)$.

Nous appellerons $D^r(\mathbf{C}^n)$ *le groupe des r-jets en* 0 *des biholomorphismes locaux de* $\mathbf{C}^n$ *qui fixent* 0*.*

Le groupe $D^1(\mathbf{C}^n)$ s'identifie au groupe $GL(n,\mathbf{C})$, des automorphismes $\mathbf{C}$-linéaires de $\mathbf{C}^n$.

Il importe de remarquer que $D^r(\mathbf{C}^n)$ est *un groupe algébrique*, autrement dit $D^r(\mathbf{C}^n)$ admet une structure de variété algébrique affine (sur le corps de base $\mathbf{C}$) pour laquelle la loi de groupe et le passage à l'élément inverse sont des applications polynômiales. Là où il n'y aura pas de confusion possible, nous allons désigner le groupe $D^r(\mathbf{C}^n)$ par D^r.

La généralisation naturelle des considérations précédentes, dans le contexte des variétés complexes, nous conduit aux fibrés des jets, introduits pour la première fois par Ehresmann.

3.2 Fibrés des r-repères et autres fibrés

Soit M une variété complexe de dimension n.

Considérons l'espace des germes en 0 de toutes les applications holomorphes définies sur un ouvert de $\mathbf{C}^p$ qui contient 0 et à valeurs dans la variété M. Nous identifions deux éléments de cet espace s'ils ont le même r-jet en 0. La légitimité de cette définition est assurée par le fait que la relation d'équivalence "avoir le même développement de Taylor en 0" ne dépend pas du choix d'un système de coordonnées.

Le quotient de notre espace par la relation d'équivalence précédente est l'ensemble $J^{r,p}(M)$, des r-jets en 0 d'applications holomorphes d'un ouvert de $\mathbf{C}^p$ à valeurs dans M.

L'ensemble $J^{r,p}(M)$ admet une structure de variété complexe qui se projette holomorphiquement sur M, la projection étant simplement l'évaluation en 0. Cette projection confère à $J^{r,p}(M)$ une structure de fibré vectoriel complexe sur M, de fibre $J_0^r(\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^p)$. Pour $r=1$ et $p=1$ on retrouve le fibré tangent complexe de la variété $M : J^{1,1}(M)=TM$.

Le groupe $D^r(\mathbf{C}^p)$ agit à droite sur le fibré $J^{r,p}(M)$ en préservant les fibres. Explicitons cette action : si g est un élément de $D^r(\mathbf{C}^p)$ et f un élément de $J^{r,p}(M)$, le résultat de l'action de g sur f est le r-jet en 0 de l'application $\tilde{f}\circ\tilde{g}$, les symboles $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ désignant des germes qui représentent les r-jets en question. Ceci ne dépend pas des représentants choisis. L'action est linéaire dans les fibres. Dans le cas où p

est égal à n, le groupe $D^r(\mathbf{C}^n)$ agit à droite sur le fibré $J^{r,n}(M) = J^r(M)$.

Considérons à présent l'ensemble formé par les germes en 0 de tous les *biholomorphismes* entre des ouverts de $\mathbf{C}^n$ qui contiennent 0 et des ouverts de M.

Le quotient de cet ensemble par la relation d'équivalence "avoir le même r-jet en 0" est un sous-fibré de $J^r(M)$, invariant par l'action du groupe $D^r(\mathbf{C}^n)$, et appelé classiquement *le fibré des r-repères* de la variété M. Par la suite, il sera noté $R^r(M)$. L'action de $D^r(\mathbf{C}^n)$ sur $R^r(M)$ est transitive dans les fibres et munit le fibré des r-repères d'une structure de fibré principal de groupe structural $D^r(\mathbf{C}^n)$.

Pour r égal à 1, le fibré $R^1(M)$ s'identifie aux couples formés par un point de M et une base de l'espace vectoriel complexe T_mM. Cette identification justifie la terminologie *fibré des repères.* Le fibré des repères $R^1(M)$ est un $GL(n, \mathbf{C})$-fibré principal.

Pour tout couple $l \geq k$, il existe un morphisme surjectif de fibrés principaux $R^k(M) \to R^l(M)$ défini de manière naturelle par troncature.

3.3 Définition et exemples des structures géométriques

Nous sommes maintenant en mesure de présenter la définition du concept "structure géométrique holomorphe".

Soit M une variété complexe de dimension n et $R^r(M)$ son fibré des r-repères. Considérons aussi une variété algébrique (quasiprojective) lisse Z munie d'une action algébrique du groupe algébrique $D^r(\mathbf{C}^n)$. Nous rappelons que $D^r(\mathbf{C}^n)$ agit à droite sur le fibré $R^r(M)$, l'action étant transitive dans les fibres.

Définition 3.1 *Une structure géométrique holomorphe ϕ (d'ordre r et de type Z) est une application holomorphe du fibré $R^r(M)$ dans la variété Z, équivariante sous l'action du groupe $D^r(\mathbf{C}^n)$ (c'est-à-dire $\phi(f \cdot g) = g^{-1} \cdot \phi(f)$, $\forall f \in R^r(M)$ et $\forall g \in D^r(\mathbf{C}^n)$).*

Nous suivons donc la présentation de Gromov [35], qui a été commentée et élaborée dans des nombreux travaux dont nous citons, par exemple, [3, 4, 7, 15, 26, 84].

Nous allons adopter aussi la terminologie suivante.

Définition 3.2 *La structure géométrique holomorphe ϕ est dite de type algébrique affine si la variété Z est algébrique affine.*

Remarque 2 L'application ϕ s'interpréte comme une section holomorphe du fibré associé au fibré des r-repères via la représentation de $D^r(\mathbf{C}^n)$ sur Z. Ce fibré est, par définition, le quotient de $R^r(M) \times Z$ par la relation d'équivalence $(f, z) \sim (f \cdot g^{-1}, g \cdot z)$. Il n'est pas difficile de s'apercevoir qu'on obtient un fibré localement trivial de fibre Z et qu'une section de ce fibré correspond exactement à une application $D^r(\mathbf{C}^n)$-équivariante de $R^r(M)$ dans Z.

Exemples de structures géométriques holomorphes :

• *champ de vecteurs holomorphe*

Un champ de vecteurs holomorphe sur une variété complexe est une section holomorphe du fibré tangent. Soit n la dimension complexe de la variété. On peut voir un champ de vecteurs holomorphe comme une application équivariante du fibré des repères de la variété (qui est un $GL(n, \mathbf{C})$ fibré principal) dans l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ muni de l'action naturelle de $GL(n, \mathbf{C})$. C'est une structure d'ordre 1 et de type $\mathbf{C}^n$.

Un champ de vecteurs holomorphe est une G-structure si le champ est non singulier, le groupe H étant le stabilisateur d'un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$.

• *champ de droites dans le fibré tangent*

Un champ de droites holomorphe peut être vu comme une application holomorphe équivariante du fibré des repères de la variété dans l'espace projectif $P^{n-1}(\mathbf{C})$ muni de l'action projective du groupe $GL(n, \mathbf{C})$.

Contrairement à la structure antérieure, ce n'est pas une structure de type algébrique affine et c'est toujours G-structure.

• *un parallélisme complet*

Nous disons que la variété complexe M de dimension n porte un parallélisme complet s'il existe n sections holomorphes du fibré tangent, en chaque point linéairement indépendantes. Le fibré tangent est donc trivial et il existe une application holomorphe $D^1(\mathbf{C}^n)$-équivariante du fibré $R^1(M)$ dans $D^1(\mathbf{C}^n)$.

Un parallèlisme complet est une G-structure d'ordre 1 de groupe Id. D'après le théorème de Wang, si M est compacte, elle sera nécessairement un espace homogène, quotient d'un groupe de Lie complexe par un sous-groupe discret cocompact.

• *métrique riemannienne holomorphe*

Formellement, une métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe M, de dimension n, est une section holomorphe g du fibré $S^2(T^*M)$ des formes quadratiques complexes sur l'espace tangent holomorphe à M telle que, en tout point m de M, la forme quadratique complexe $g(m)$ est non dégénérée (de rang maximal, égal à n).

Il s'agit d'une structure géométrique dont le type Z est l'espace vectoriel des formes quadratiques complexes sur $\mathbf{C}^n$. Dans ce cas, Z est muni de l'action de $GL(n, \mathbf{C})$, induite sur les formes quadratiques par l'action canonique de $GL(n, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^n$.

L'application équivariante de $R^1(M)$ dans Z est celle qui associe au couple formé par un point $m \in M$ et un repère de $f \in T_mM$ (vu comme un isomorphisme entre $\mathbf{C}^n$ et T_mM) la forme quadratique $q_m \circ f$ sur $\mathbf{C}^n$.

Les orbites de Z sous l'action de $GL(n, \mathbf{C})$ sont caractérisées par un invariant discret : le rang.

Dans le cas particulier où l'image de l'application q est incluse dans l'ouvert dense des formes quadratiques de rang maximal, c'est-à-dire lorsque les formes quadratiques sont en chaque point de M non dégénérées, notre structure géométrique est l'analogue complexe d'une métrique riemannienne. Nous conviendrons d'appeler cette structure *métrique riemannienne holomorphe*, comme dans [56, 57].

Une métrique riemannienne holomorphe est une $O(n, \mathbf{C})$-structure. De manière analogue aux métriques riemanniennes, une métrique riemannienne holomorphe admet une unique connexion de Levi-Civita (i.e. il existe une unique connexion affine holomorphe ∇, sans torsion, compatible avec la métrique) [56, 57].

- *structure conforme holomorphe*

Une structure conforme holomorphe sur une variété complexe M est la donnée d'un sous-fibré en droites L du fibré $S^2(T^*M)$ tel que tout élément non nul d'une fibre L_m est une forme quadratique non dégénérée sur l'espace tangent T_mM. Une section locale de L qui ne s'annule pas au-dessus d'un ouvert U de M est une métrique holomorphe sur U.

Dans le cas d'une structure conforme, il convient de considérer l'espace projectif sur l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbf{C}^n$ et, plus précisément, l'ouvert dense Z, formé par les points qui proviennent des formes quadratiques non dégénérées.

Cette structure n'est pas de type affine.

- *juxtaposition*

A partir des structures géométriques ϕ_1 et ϕ_2, on peut construire leur juxtaposition (ϕ_1, ϕ_2). Pour préciser cela, considérons $\phi_1 : R^{r_1}(M) \to Z_1$ et $\phi_2 : R^{r_2}(M) \to Z_2$ deux structures d'ordre r_1 et r_2 respectivement et supposons que $r_1 \leq r_2$.

Alors $(\phi_1, \phi_2) : R^{r_2}(M) \to Z_1 \times Z_2$ est une structure géométrique d'ordre r_2. Cette application sera équivariante pour l'action diagonale de D^{r_2} sur $Z_1 \times Z_2$. L'action de D^{r_2} sur Z_1 transite par la projection canonique $D^{r_2} \to D^{r_1}$.

- *tenseur holomorphe*

Par définition, un tenseur holomorphe de type (p, q) sur la variété complexe M, de dimension n est une section holomorphe du fibré vectoriel $TM^p \otimes (TM^*)^{\otimes q}$. Les champs de vecteurs holomorphes et les métriques holomorphes sont des exemples de tenseurs holomorphes.

Un tenseur holomorphe est une structure géométrique d'ordre 1 dont le type est l'espace vectoriel $\mathbf{C}^{n \otimes p} \otimes (\mathbf{C}^{n*})^{\otimes q}$. L'action de $GL(n, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^{n \otimes p} \otimes (\mathbf{C}^{n*})^{\otimes q}$ est celle induite par l'action canonique sur $\mathbf{C}^n$.

- *connexion affine holomorphe*

Une connexion affine holomorphe sur une variété complexe de dimension n s'exprime dans une carte locale par n^3 fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbf{C}$: les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k. Le type de cette structure est l'ensemble des 0-jets de germes de connexion sur $\mathbf{C}^n$:

$$Z = \{\Gamma_{ij}^k(0) | 1 \leq i, j, k \leq n\} \simeq \mathbf{C}^{n^3}.$$

L'image d'un germe de connexion en 0 par le germe d'un biholomorphisme local de $\mathbf{C}^n$ qui préserve 0 est un autre germe de connexion en 0 dont le 0-jet ne dépend que du 0-jet de la connexion de départ et du 2-jet en 0 du biholomorphisme de transport. Ceci fournit une action algébrique de $D^2(\mathbf{C}^n)$ sur Z.

Une connexion affine holomorphe est donc une application holomorphe de $R^2(M)$ dans Z, équivariante sous l'action de $D^2(\mathbf{C}^n)$. C'est une structure géométrique d'ordre 2.

Géométriquement, une connexion affine peut être vue comme un champ de plans horizontaux de dimension n, dans le fibré tangent à la variété (ou comme un champ de plans horizontaux de dimension n et $GL(n, \mathbf{C})$-invariant sur $R^1(M)$).

Une connexion affine est dite sans torsion si les coefficients de Christoffel vérifient la relation $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$). Dans ce cas le champ de plans est donné par une section de la fibration $R^2(M) \to R^1(M)$. Il s'agit d'une réduction du groupe structural du fibré $R^2(M)$ à $GL(n, \mathbf{C})$, autrement dit nous avons une application équivariante de $R^2(M)$ dans le quotient $D^2(\mathbf{C})/GL(n, \mathbf{C})$. Une connexion affine sans torsion est donc une G-structure d'ordre 2 dont le groupe est $GL(n, \mathbf{C})$, vu comme sous-groupe algébrique de $D^2(\mathbf{C}^n)$.

Les connexions projectives holomorphes, les structures de contact holomorphes et les structures projectives holomorphes sont d'autres exemples de structures géométriques holomorphes.

- *prolongement*

Le s-jet (ou la s-prolongation) d'une structure géométrique $g : R^r(M) \to Z$ sera une structure géométrique d'ordre $(r+s)$ de la forme

$$g^{(s)} : R^{r+s}(M) \to J^{s,n}(Z).$$

Il faut encore décrire en détail l'action de D^{r+s} sur $J^{s,n}Z$. Précisons d'abord que dans le cas où Z est un espace vectoriel V, alors $J^{s,n}(V) = V \oplus (\mathbf{C}^n)^* \otimes V \oplus S^2(\mathbf{C}^n)^* \otimes V \oplus \ldots \oplus S^s(\mathbf{C}^n)^* \otimes V$, où $S^k(\mathbf{C}^n)$ désigne les polynômes symétriques homogènes de degré k sur $\mathbf{C}^n$.

Faisons quelques remarques préliminaires :

(i) Si $\alpha : Z_1 \times Z_2 \to Z_3$ est une application holomorphe, alors elle induit une application $J^{s,n}(Z_1) \times J^{s,n}(Z_2) \to J^{s,n}(Z_3)$ définie de la manière suivante. Si j_1 est le s-jet en 0 d'une application holomorphe $f : \mathbf{C}^n \to Z_1$ et j_2 est le s-jet en 0 d'une application $g : \mathbf{C}^n \to Z_2$, alors notre application est celle qui envoie (j_1, j_2) sur le s-jet en 0 de l'application holomorphe $\alpha(f, g)$.

(ii) En particulier, si D est un groupe de Lie complexe, alors $J^{s,n}(D)$ est un groupe de Lie complexe et l'inverse de l'élément j_1 qui est le s-jet en 0 de $f : \mathbf{C}^n \to D$ sera le s-jet de l'application f^{-1}.

(iii) Si D agit holomorphiquement sur Z, alors $J^{s,n}(D)$ agit holomorphiquement sur $J^{s,n}(Z)$. En particulier, $J^{s,n}(D^r)$ agit holomorphiquement sur $J^{s,n}(Z)$.

(iv) Rappelons l'action canonique de D^s sur $J^{s,n}(Z)$ qui préserve l'ouvert $R^s(Z)$ dans le cas où n est la dimension de Z.

Nous sommes en mesure à présent d'expliciter l'action de D^{r+s} sur $J^{s,n}(Z)$.

Considérons une carte locale $u : U \subset \mathbf{C}^n \to V \subset M$ centrée en 0 et telle que $u(0) = m \in V$. Cette carte permet de trivialiser le fibré principal $R^r(M)$ au-dessus de l'ouvert V. En effet, le r-jet de u en un point $x \in U$, défini comme $j^r_x u = j^r_0(u \circ \theta_x)$, où θ_x est la translation de vecteur x, fournit une section de $R^r(M)$ au-dessus de V.

On considére le s-jet de g dans cette carte. Plus précisément, on considére $j^s_0(g \circ j^r_x u)$. Il s'agit du s-jet en 0 d'une application holomorphe définie sur U et à valeurs dans Z. Ce s-jet ne dépend que du $r+s$-jet en 0 de la carte u.

Pour comprendre l'action de D^{r+s} sur $J^{s,n}(Z)$, changeons la carte u en $u \circ f$, où f est un biholomorphisme local de $\mathbf{C}^n$ qui fixe 0 et notons $h = j^{r+s}_0(f) \in D^{r+s}$.

La section locale trivialisante de $R^r(M)$ change par la multiplication avec la fonction holomorphe $\bar{f}^r : U \to D^r$ qui à un point $x \in U$ associe $j^r_0(\theta_{-x} \circ f \circ \theta_{f^{-1}(x)})$, où θ_x désigne la translation de vecteur x.

Il s'agit par conséquent de considérer le s-jet en 0 de $\bar{f}^r$. On obtient un élément de $J^{s,n}(D^r)$. Ceci définit bien un morphisme de groupes $D^{r+s} \to J^{s,n}(D^r)$: celui qui associe à l'élément h, le s-jet $a(h) = j^s_0(\bar{f}^r)$.

L'action de D^{r+s} sur $J^{s,n}(Z)$ se fera via le morphisme $D^{r+s} \to D^s \ltimes J^{s,n}(D^r)$ défini par $h \to (\bar{h}, a(h))$, où $\bar{h}$ est le s-jet sous-jacent. Rappelons que la loi de produit semi-direct sur $D^s \ltimes J^{s,n}(D^r)$ est induite par l'action canonique de D^s sur $J^{s,n}(D^r)$.

L'action d'un élément $(\bar{h}, a(h)) \in D^s \ltimes J^{s,n}(D^r)$ sur $J^{s,n}(Z)$ est donnée par :

$$(\bar{h}, a(h)) \cdot v = a(h) \cdot (v\bar{h}^{-1}),$$

où $v \in J^{s,n}(Z)$ et $a(h)$ agit sur $J^{s,n}(Z)$ via l'action canonique de $J^{s,n}(D^r)$ sur $J^{s,n}(Z)$.

- *structure symplectique holomorphe*

Une structure symplectique holomorphe sur une variété complexe M est une 2-forme différentielle holomorphe fermée, non dégénérée en tout point. Une variété qui porte une structure symplectique holomorphe est nécessairement de dimension paire et son fibré canonique est trivial. Par exemple le fibré cotangent d'une variété complexe admet toujours une structure symplectique canonique. Les tores et les surfaces $K3$ sont des exemples de variétés complexes symplectiques compactes.

Une 2-forme différentielle holomorphe non dégénérée est une structure tensorielle, donc d'ordre 1.

Le type Z de cette structure est la variété algébrique (quasiprojective) qui est l'orbite des 2-formes différentielles non dégénérées de l'espace vectoriel $\Lambda = \Lambda^2(\mathbf{C}^n)^*$

sous l'action de $GL(n, \mathbf{C})$. Notons ϕ cette structure.

La condition de fermeture est une condition algébrique qui porte sur le 1-jet de la forme différentielle. Considérons $\phi^{(1)}$ le 1-jet de la structure ϕ. Il s'agit d'une structure d'ordre 2 et de type $V = \Lambda \oplus (\mathbf{C}^n)^* \otimes \Lambda$.

La condition de fermeture s'exprime par l'inclusion de l'image de $\phi^{(1)}$ dans la sous-variété de V définie par les couples $(\omega, \nu) \in \Lambda \oplus (\mathbf{C}^n)^* \otimes \Lambda$, tels que

$$\nu(u_1, u_2) \cdot u_3 + \nu(u_2, u_3) \cdot u_1 + \nu(u_3, u_1) \cdot u_2 = 0,$$

pour tous les vecteurs $u_i \in \mathbf{C}^n$ et où l'on note $\cdot u_i$ la dérivée directionnelle dans la direction u_i.

- *structure affine complexe*

Une variété complexe admet une structure affine complexe si elle peut être recouverte par un système des cartes compatibles avec la structure complexe par rapport auxquelles toutes les applications de changement de carte sont des transformations affines.

La version infinitésimale de cette structure est une connexion affine holomorphe. Un théorème d'Elie Cartan affirme qu'une connexion affine, sans torsion, dont le tenseur de courbure est nul en chaque point, est la même donnée qu'une structure affine complexe [38].

Au niveau des coefficients de Christoffel, ces relations se traduisent par les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} = \sum_{l'} (\Gamma_{ik}^l \cdot \Gamma_{jl}^{l'} + \Gamma_{jk}^l \cdot \Gamma_{il}^{l'}).$$

La condition sur la courbure met en jeu les dérivées partielles des coefficients de Christoffel. Il s'agit d'une équation algébrique dans l'espace des 1-jets des coefficients de Christoffel.

Considérons l'espace vectoriel des 1-jets en 0 de germes de connexions affines holomorphes sur $\mathbf{C}^n$. Un élément de Z est la donnée des valeurs des coefficients de Christoffel en 0, ainsi que de leurs dérivées directionnelles. Si on transporte un germe de connexion affine en 0 par un biholomorphisme qui fixe le 0, le 1-jet en 0 de la nouvelle connexion ne dépend que du 1-jet en 0 de la connexion initiale et du 3-jet en 0 du biholomorphisme en question. De plus cette dépendance est algébrique et munit la variété affine Z d'une action algébrique de $D^3(\mathbf{C}^n)$ qui laisse stable la sous-variété affine lisse Z' donnée par les deux équations ci-dessus.

En résumé, une structure affine est une structure géométrique d'ordre 3 de la forme $\phi^{(1)}$, où ϕ est une connexion affine holomorphe et $\phi^{(1)}$ est telle que $Im\phi^{(1)} \subset Z'$.

3.4 Isométries locales. Rigidité

Soit $g : R^r(M) \to Z$ une structure géométrique d'ordre r. Rappelons que tout biholomorphisme local de M dans N se relève naturellement en une application de $R^r(M)$ dans $R^r(N)$.

Définition 3.3 *Un biholomorphisme local f entre deux ouverts de U et V de M est une isométrie locale si son relevé $\bar{f} : R^r(U) \to R^r(V)$ respecte les fibres de g, autrement dit $g \circ \bar{f} = g$.*

Il existe une isométrie locale qui envoie $x \in U$ sur $y \in V$ si et seulement s'il existe des coordonnées locales au voisinage de x et au voisinage de y dans lesquelles g admet la même expression locale (est donnée par les mêmes fonctions locales).

On notera Is^{loc} le pseudo-groupe des isométries locales de g et $Is^{loc}_{x,y}$ l'ensemble des isométries locales qui envoient x sur y. Si Is^{loc} agit transitivement sur un ouvert de M on dira que g est *localement homogène* sur cet ouvert.

Isométries infinitésimales

Définition 3.4 *On appelle $(r+k)$-jet isométrique de g (ou isométrie infinitésimale d'ordre $r+k$), le $(r+k)$-jet en un point de M d'un biholomorphisme local f de M tel que $g^{(k)} \circ \bar{f} = g^{(k)}$, où $g^{(k)}$ est le k-jet de g et $\bar{f}$ est le relèvement de f à un biholomorphisme local de $R^{r+k}(M)$.*

Ceci ne dépend pas du biholomorphisme f, mais seulement de son $(r+k)$-jet au point de M considéré.

Remarquons que l'ensemble $Is^{(r+k)}$ des $(r+k)$-jets isométriques est un pseudo-groupe. Le sous-ensemble $Is^{(r+k)}_{x,y}$ formé par les $(r+k)$-jets isométriques qui envoient $x \in M$ sur $y \in M$ est non vide si et seulement s'il existe des coordonnées locales centrées en x et y dans lesquelles g admet le même k-jet.

Remarquons que Is^r agit transitivement sur M si et seulement si g est une G-structure (autrement dit, l'image de g est une D^r-orbite de Z). Plus généralement, $Is^{(r+k)}$ agit transitivement sur M si $g^{(k)}$ est une G-structure. Dans ce cas on dira que g est *localement homogène à l'ordre k*.

Définition 3.5 *Une structure géométrique g d'ordre r sur M est dite rigide à l'ordre $r_1 = r+k$ si la projection naturelle $Is^{r_1+1}_{x,x} \to Is^{r_1}_{x,x}$ est injective quelque soit $x \in M$.*

Ceci signifie qu'un jet isométrique d'ordre r_1+1 est entièrement déterminé par sa partie d'ordre r_1.

Traitons maintenant quelques exemples :

Exemple 1 : Une application holomorphe $g : M \to Z$ est une structure géométrique d'ordre 0 qui est rigide à l'ordre 0 si et seulement si g est une immersion.

En effet, g est rigide si et seulement si la projection naturelle $Is^1_{x,x} \to Is^0_{x,x}$ est injective. Un élément de $Is^1_{x,x}$ est de la forme (x,x,l), où $l \in GL(T_xM)$ est tel que $dg(x) \circ l = dg(x)$. Cette relation implique $l = Id$ si et seulement si $dg(x)$ est injective.

Exemple 2 : Une métrique riemannienne holomorphe g est rigide à l'ordre 1.

Montrons donc que l'application $Is^2_{x,x} \to Is^1_{x,x}$ est un morphisme de groupe injectif.

En coordonnées locales au voisinage de x, on a que $f \in Is^1_{x,x}$, si et seulement si

$$\sum_{i,j} g_{ij}(f(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_l} = g_{kl}(x),$$

quels que soient $1 \leq i \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq l \leq n$.

En considérant les dérivées secondes par rapport à la coordonnée x_s on obtient :

$$\sum_{i,j,r} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}(f(x)) \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_l} + \sum_{i,j} g_{ij}(f(x)) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_s \partial x_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_l} + \sum_{i,j} g_{ij}(f(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_s \partial x_l} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_s}(x).$$

Rappelons qu'en coordonnées exponentielles au voisinage de x, la matrice $[(g_{ij}(x)]$ vaut l'identité et toutes les dérivées partielles d'ordre un des fonctions g_{ij} sont nulles en x (le 1-jet de g est trivial).

Donc, en coordonnées exponentielles seules les relations où $i = j$ sont non triviales :

$$\sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_s \partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_s \partial x_k} = 0.$$

Montrons que le seul élément de $Is^2_{x,x}$ qui se projete sur l'identité est identité. Supposons donc que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Les relations précédentes sont alors non triviales si et seulement si $i = j = l$, ou $i = j = k$.

Il vient alors

$$\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_s \partial x_k} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_s \partial x_l} = 0,$$

quels que soient k, l, s.

Ceci donne

$$\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_s \partial x_k} = -\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_s \partial x_l} = -\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l \partial x_s} = \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_l \partial x_k} = -\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_s \partial x_k}.$$

Le 2-jet de f est donc trivial.

De manière similaire on a :

Exemple 3 : Un parallélisme holomorphe est rigide à l'ordre 1.

Exemple 4 : Une connexion holomorphe ∇ *est rigide à l'ordre* 2.

Bien sûr on a la

Proposition 3.6 *Si g est rigide à l'ordre $r+k$, elle sera également rigide à l'ordre $(r+k+1)$.*

Pour la preuve, nous renvoyons à [15, 26].

On peut alors conclure au corollaire suivant :

Corollaire 3.7 *Si g_1 est une structure géométrique holomorphe d'ordre r_1 et g_2 est une structure géométrique holomorphe d'ordre r_2 rigide à l'ordre $r_2' \geq r_2$, alors (g_1, g_2) est une structure géométrique holomorphe d'ordre $max(r_1, r_2)$, rigide à l'ordre $max(r_1, r_2')$.*

Démonstration $Is^k(g_1, g_2)$ s'injecte dans $Is^k(g_2)$, dès que $k \geq max(r_1, r_2)$. Or, $Is^{k+1}(g_2) \to Is^k(g_2)$ est injective, si $k \geq r_2'$. Ceci implique que $Is^{k+1}(g_1, g_2) \to Is^k(g_1, g_2)$ est injective, dès que $k \geq max(r_1, r_2')$. $\boxdot$

Nous avons également le :

Corollaire 3.8 *Si g est une structure géométrique holomorphe rigide, il existe un entier $s(x)$ (qui dépend de x) tel que la projection canonique $Is^{s+1}_{x,x} \to Is^s_{x,x}$ est un isomorphisme dès que $s \geq s(x)$.*

Démonstration La rigidité et la proposition 3.6 assurent que l'on peut regarder $Is^{s+1}_{x,x}$ comme un sous-groupe de $Is^s_{x,x}$ pourvu que s soit suffisamment grand. On obtient ainsi une suite décroissante de sous-groupes algèbriques de $Is^s_{x,x}$ qui doit stabiliser. $\boxdot$

Remarquons que le corollaire précédent montre aussi que $Is^{s+1}_{x,y} \to Is^s_{x,y}$ sera une bijection, dès que $s \geq s(x)$. En effet, si l'on fixe $f \in Is^s_{x,y}$, l'application $h \to f \circ h^{-1}$ définit une action simple et transitive de $Is^s_{x,x}$ sur $Is^s_{x,y}$. Dès que $Is^s_{x,y}$ est non trivial, il est en bijection avec $Is^s_{x,x}$.

Le théorème suivant dû à Gromov [35, 3] montre que l'entier s ne dépend pas du point x :

Théorème 3.9 *Soit M une variété complexe compacte munie d'une structure géométrique holomorphe rigide g. Alors il existe un entier s tel que tout élément de Is^s se prolonge en unique isométrie locale de g.*

Nous allons donner la preuve seulement dans le cas où g est une métrique riemannienne holomorphe q sur M. Dans ce cas, la présence de la métrique riemannienne holomorphe nous permet de considérer des cartes exponentielles (dans lesquelles le 1-jet de la métrique est celui de la métrique plate standard $dz_1^2 + \ldots + dz_n^2$).

Une carte exponentielle centrée en $m \in M$ est complétement déterminée par une base de $T_m M$. L'ensemble des cartes exponentielles s'indentifie donc à $R^1(M)$. Considérer le k-jet de q dans ces cartes permet de voir le k-jet de q comme une application (équivariante) définie non pas sur $R^{k+1}(M)$ mais directement sur $R^1(M)$.

Passons à la preuve (qui est directement inspirée de [2, 3]).

Démonstration Nous considérons donc une variété complexe compacte M de dimension n, munie d'une métrique holomorphe q.

Nous construisons le fibré $F \to M \times M$ qui a comme fibre au-dessus du couple $(m_1, m_2) \in M \times M$ l'ensemble des isométries linéaires de $T_{m_1}M$ dans $T_{m_2}M$. Un élément $l \in F_{(m_1,m_2)}$ détermine un biholomorphisme local qui envoie m_1 sur m_2 et dont l'expression en coordonnées exponentielles est donnée par l'isométrie linéaire l.

Notons F_k, le sous-ensemble de F formé par les applications linéaires qui donnent naissance à des biholomorphismes dont le k-jet est un k-jet isométrique de q. Nous avons une filtration $F_{k+1} \subset F_k$. L'ensemble $F_\infty = \cap F_k$ est constitué des 1-jets qui engendrent des isométries locales. Notre but est de montrer que pour k suffisamment grand $F_k = F_\infty$.

Nous allons utiliser le fait que sur une variété complexe compacte toute suite décroissante des sous-ensembles analytiques stabilise [58].

Pour cela, nous commençons par compactifier le fibré F. Dans chaque espace tangent de $M \times M$ nous considérons l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n totalement isotropes pour la métrique $q \oplus (-q)$. Le fibré F s'injecte dans le nouveau fibré $\overline{F}$ par l'application qui associe à une isométrie linéaire de $T_{m_1}M$ dans $T_{m_2}M$ son graphe vu comme sous-espace vectoriel $q \oplus (-q)$-isotrope de $T_{(m_1,m_2)}(M \times M)$.

Par l'application exponentielle de la variété $M \times M$, un sous-espace vectoriel de $T_{(m_1,m_2)}(M \times M)$ engendre un germe de sous-variété analytique en (m_1, m_2) de $M \times M$. L'image du graphe d'une isométrie linéaire par cette application sera le graphe du biholomorphisme engendré vu comme sous-ensemble de $M \times M$. Si le biholomorphisme en question s'avère être une isométrie locale de M, alors son graphe est totalement isotrope pour la métrique $q \oplus (-q)$.

Nous désignons par $\overline{F}_k$ les éléments de $\overline{F}$ qui engendrent une sous-variété analytique de $M \times M$ sur laquelle la métrique $q \oplus (-q)$ s'annule à l'ordre k au point base. Nous avons l'inclusion $F_k \subset \overline{F}_k$.

Prouvons que $\overline{F}_k$ est un sous-ensemble analytique compact de $\overline{F}$. Considérons pour cela un point $\bar{l} \in \overline{F}_{(m_1,m_2)}$ et soit $J^k_{\bar{l}}$ l'espace vectoriel des k-jets en (m_1, m_2) de différentielles quadratiques définies sur le germe de sous-variété de $M \times M$ engendrée par $\bar{l}$. L'union $\bigcup_{\bar{l}} J^k_{\bar{l}}$ a une structure de fibré vectoriel holomorphe au-dessus de $\overline{F}$. Ce fibré admet une section holomorphe tautologique j, celle qui à chaque point $\bar{l}$

associe le k-jet en (m_1, m_2) de $q \oplus (-q)$ restreinte au germe de sous-variété engendrée par $\bar{l}$. Bien sûr, j s'annule exactement sur $\overline{F_k}$.

Aussi $\overline{F}_k \setminus F_k$ est un sous-ensemble analytique compact de $\overline{F}_k$ car il correspond aux sous-espaces de dimension n de $T(M \times M)$ qui ne se projetent pas injectivement sur le premier facteur. On a l'inclusion évidente $\overline{F}_{k+1} \setminus F_{k+1} \subset \overline{F}_k \setminus F_k$.

On conclut d'abord que, pour k suffisamment grand, $\overline{F}_k = \overline{F}_{k+1} = \overline{F}_\infty$. On applique la même propriété de stabilité des sous-ensembles analytiques pour en déduire que $\overline{F}_k \setminus F_k = \overline{F}_{k+1} \setminus F_{k+1}$, pour k assez grand.

Par conséquent, $F_k = F_\infty$ dès que k est assez grand ; ces k-jets isométriques s'intègrent en isométries locales (car ils préservent q à tous les ordres). Bien sûr, l'ensemble F_k peut être vide, auquel cas il n'y a aucune isométrie locale. ⊡

Le résultat précédent combiné avec un théorème de Rosenlicht conduit au résultat suivant (qui est la version holomorphe d'un théorème de Gromov) :

Théorème 3.10 *Soit M une variété complexe compacte munie d'une structure géométrique holomorphe rigide ϕ. Alors :*

(i) il existe un sous-ensemble analytique compact S de codimension strictement positive dans M tel que $M \setminus S$ est Is^{loc}-invariant et les orbites de Is^{loc} dans $M \setminus S$ sont les fibres d'une application holomorphe de rang constant.

(ii) Les fonctions méromorphes de M constantes sur les fibres de la fibration précédente séparent les fibres distinctes. En particulier, les fibres de cette fibration sont de dimension $\geq n - a(M)$, où $a(M)$ est la dimension algébrique de M.

Rappelons que la dimension algébrique de M est le nombre maximal de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur M. Si $a(M) = 0$, le résultat précédent affirme que ϕ est localement homogène sur un ouvert dense.

Le théorème précédent est encore valable pour des structures géométriques méromorphes rigides sur un ouvert dense [17].

Démonstration Supposons que ϕ est d'ordre r et de type Z. Comme ϕ est rigide, d'après le théorème 3.9, il existe un entier positif s tel que les orbites du pseudogroupe des $s + r$-jets isométriques et les orbites du pseudogroupe des isométries locales coïncident.

Nous considérons le s-jet de la structure ϕ, donné par l'application

$$\phi^{(s)} : R^{s+r}(M) \to J^{s,n}(Z).$$

C'est une application équivariante sous l'action du groupe D^{s+r}.

Le théorème de Rosenlicht [72] affirme qu'il existe une stratification D^{s+r}-invariante

$$J^{s,n}(Z) = Z_0 \supset \ldots \supset Z_l,$$

avec la propriété que Z_{i+1} est un fermé de Zariski de Z_i et que les fonctions rationnelles D^{s+r}-invariantes séparent les orbites de $Z_i \setminus Z_{i+1}$.

L'ouvert dense invariant $U = M \setminus S$ sur lequel les orbites du pseudogroupe Is^{loc} sont les fibres d'une fibration est construit de sorte que $d\phi^{(s)}$ soit de rang constant sur $R^{s+r}(M)|_U$, l'image de $R^{s+r}(M)|_U$, par $\phi^{(s)}$ tombe dans un $Z_i \setminus Z_{i+1}$, tandis que l'image de $R^{s+r}(M)$ est incluse dans Z_i.

Supposons que les fibres de notre fibration sont de dimension complexe p.

Considérons une petite boule D, de dimension complexe $n-p$, centrée en un point de U et transverse aux orbites de Is^{loc}. Deux points m, m' de ce disque s'envoient par $\phi^{(s)}$ sur des orbites différentes de $Z_i \setminus Z_{i+1}$. Il existe donc une fraction rationnelle invariante F, sur Z_i, qui sépare ces deux orbites de $Z_i \setminus Z_{i+1}$. La fonction méromorphe $F \circ \phi^{(s)}$ descend en une fonction méromorphe sur M qui prend des valeurs distinctes et bien définies aux points m et m'.

Les fonctions méromorphes sur M séparent donc les points de la boule D. Cela montre que le corps des fonctions méromorphes sur M contient au moins $n-p$ éléments algébriquement indépendants. $\boxdot$

Précisons que, dans le cas d'une structure géométrique rigide, Is^{loc} est un pseudogroupe de Lie de dimension finie. Son algèbre de Lie est donc de dimension finie. Elle est constituée par les *champs de Killing*, autrement dit par les champs de vecteurs (holomorphes si la structure géométrique est holomorphe) dont les flots préservent la structure géométrique. Une structure géométrique rigide est localement homogène sur un ouvert si et seulement si son algèbre de champs de Killing agit transitivement sur cet ouvert.

Un exemple où $a(M) = 0$ et l'ouvert localement homogène de M ne coïncide pas avec M est le suivant (je remercie Benjamin McKay pour cet exemple). Considérons le quotient de $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ par le groupe engendré par la contraction linéaire $T(z_1, z_2) = (\frac{1}{2}z_1, \frac{1}{3}z_2)$. Ce quotient est une surface de Hopf de dimension algébrique nulle dont les seules courbes sont les deux courbes elliptiques S obtenues comme projections des axes$\{z_1 = 0\}$ et $\{z_2 = 0\}$ [5].

La surface de Hopf M hérite la structure affine de $\mathbf{C}^2$, ainsi que des champs de vecteurs $X_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ et $X_2 = z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ (grâce à la T-invariance). Désignons par ϕ la structure géométrique holomorphe rigide formée par la juxtaposition de la structure affine avec les champs de vecteurs X_1 et X_2.

L'ouvert dense de M localement homogène est $M \setminus S$, projection de $\mathbf{C}^2$ privé des axes. En effet, le groupe de dimension deux formé par les matrices diagonales inversibles agit transitivement sur $\mathbf{C}^2$ privé des axes et préserve la préimage $\tilde{\phi}$ de ϕ sur $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$. Par ailleurs, comme X_1 ou X_2 s'annulent sur S, l'ouvert localement homogène maximal de M est exactement $M \setminus S$.

Néanmoins nous prouvons ici le

Théorème 3.11 *Sur les surfaces d'Inoue, toutes les structures géométriques holo-*

morphes sont localement homogènes.

Rappelons que les surfaces d'Inoue ont dimension algébrique nulle et possèdent des structures affines holomorphes [42, 5].

Démonstration

Considérons une structure géométrique holomorphe τ sur une surface d'Inoue S. Soit ∇_0 la connexion affine holomorphe sans torsion et plate sur S associée à la structure affine. Nous démontrons que la structure géométrique (τ, ∇_0) qui consiste en la juxtaposition de τ et de ∇_0 est localement homogène. Autrement dit, le pseudo-groupe des isométries locales de ∇_0 qui préservent τ agit transitivement sur S. L'avantage de ce procédé est de travailler avec la structure géométrique (τ, ∇_0), qui est *rigide.*

Par le théorème 3.10, les structures géométriques holomorphes rigides sur les variétés complexes compactes de dimension algébrique nulle sont localement homogènes en dehors d'un sous-ensemble analytique compact d'intérieur vide (eventuellement vide). Il vient que (τ, ∇_0) est localement homogène sur S privé d'un sous-ensemble analytique compact d'intérieur vide E.

Nous allons démontrer que l'ensemble E est vide.

Montrons d'abord que, eventuellement à revêtement double non ramifié près, E est lisse (ceci est automatique si S est constitué d'un nombre fini de points, mais S peut également admettre des composantes de dimension complexe un).

Supposons par l'absurde que E n'est pas une sous-variété lisse de S.

Comme le pseudo-groupe des isométries locales de (τ, ∇_0) préserve E, il vient que ce pseudo-groupe laisse invariant l'ensemble des points singuliers de E.

Considérons $p \in E$ un point singulier de E. En particulier, p n'est pas isolé dans E. Mais p est isolé parmi les points singuliers de E et, par conséquent, p est un point isolé dans son orbite sous l'action du pseudo-groupe des isométries locales. Il découle que chaque champ de Killing local s'annule en p.

Notons $\mathcal{G}$ l'algèbre des germes de champs de Killing au voisinage de p. Comme $\mathcal{G}$ agit transitivement sur un ouvert, elle est de dimension au moins 2.

L'action de $\mathcal{G}$ préserve ∇ et se linéarise donc en coordonnées exponentielles au voisinage du point fixe p. La linéarisation plonge $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie de $GL(2, \mathbf{C})$. En particulier, $\mathcal{G}$ est de dimension au plus 4.

Si $\mathcal{G}$ est de dimension 2, les sous-groupes de $GL(2, \mathbf{C})$ correspondants sont conjugués au groupe des matrices diagonales, ou bien à l'un des groupes suivants :

- $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$;

- $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix}$, avec $m \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{C}^*$;

- $\begin{pmatrix} m' & n' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $m' \in \mathbf{C}^*$ et $n' \in \mathbf{C}$.

Dans le premier cas, le fermé invariant E s'identifie via l'application exponentielle à la reunion des deux droites propres, tandis que dans les deux derniers cas E s'identifie à la droite invariante $y = 0$. Dans les trois situations, E est lisse (quitte à considérer un revêtement double non ramifié de S).

Réglons maintenant le cas où $\mathcal{G}$ est de dimension 3 ou 4. Dans ce cas $\mathcal{G}$ engendre un sous-groupe de $GL(2, \mathbf{C})$ conjugué au bien à $SL(2, \mathbf{C})$, ou bien à $GL(2, \mathbf{C})$ ou bien au groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures. Dans les deux premiers cas, il n'y a pas de fermé invariant autre que le point p, qui doit par conséquent être un point isolé (et donc lisse) de E : absurde. Dans le dernier cas E s'identifie comme avant à l'unique droite invariante par les matrices triangulaires supérieures et est donc lisse.

On vient de montrer que (à revêtement double près) E est une sous-variété holomorphe de S. Si E admet des composantes de dimension complexe un, alors ces composantes sont une reunion de courbes fermées (lisses). Or, les surfaces de Inoue ne contiennent aucune courbe fermée (lisse) [42].

Il vient que E est composé d'un nombre fini de points. Supposons par l'absurde que E est non vide et considérons $p \in E$. On vient de montrer que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est nécessairement isomorphe à $SL(2, \mathbf{C})$ ou bien à $GL(2, \mathbf{C})$. En effet, dans tous les autres cas il existe au voisinage de p des droites invariantes et donc E ne se réduit pas à un nombre fini de points.

Traitons d'abord le cas où $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie $sl(2, \mathbf{C})$ de $SL(2, \mathbf{C})$. L'action linéaire de $\mathcal{G}$ sur T_pS étant fidèle, elle s'identifie nécessairement à l'action canonique de $sl(2, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^2$. Cette action a deux orbites : le point origine p et $\mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$. Le stabilisateur H d'un élément de $\mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$ sous l'action correspondante de $SL(2, \mathbf{C})$ est un sous-groupe à un paramètre conjugué dans $SL(2, \mathbf{C})$ à un sous-groupe unipotent de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $b \in \mathbf{C}$.

Remarquons que G/H possède un champ de vecteurs holomorphe G-invariant qui s'exprime sur $\mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$ sous la forme $z_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \dfrac{\partial}{\partial z_2}$.

Comme l'ouvert $S \setminus E$ est localement modelé sur $(G, G/H)$, il hérite d'un champ de vecteurs holomorphe X. Le principe de prolongement de Hartog implique que le champ de vecteurs X se prolonge à S. Par construction, X est $\mathcal{G}$-invariant sur S privé de E et, par analyticité, X doit être invariant partout. Ceci implique que X s'annule au point p car l'action de l'isotropie $SL(2, \mathbf{C})$ en p ne préserve aucun vecteur non nul de $T_pS \simeq \mathbf{C}^2$. La contradiction recherchée vient du fait que les surfaces d'Inoue ne supportent aucun champ de vecteurs non trivial qui s'annule en au moins un point [42].

On peut également conclure en démontrant directement que les surfaces d'Inoue n'admettent aucun feuilletage singulier $\mathcal{F}$ avec toutes les singularitées locales de la forme $z_1\dfrac{\partial}{\partial z_1}+z_2\dfrac{\partial}{\partial z_2}$. En effet, le théorème de Hartog permet de prolonger le fibré tangent $T\mathcal{F}$ en un fibré holomorphe en droites sur S (qui n'est pas un sous-fibré de TS à cause des singularités) [33] et, comme les classes de Chern d'une surface d'Inoue sont nulles [5], les formules de Baum-Bott [34] donnent $k = 4k = c_1^2(T\mathcal{F})$, où k est le cardinal de E et $c_1(T\mathcal{F})$ est la première classe de Chern du fibré $T\mathcal{F}$. Il vient que $k = 0$ et l'ensemble E est vide.

La preuve est la même quand $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de $GL(2,\mathbf{C})$. $\boxdot$

Théorème 3.12 *Toute structure géométrique holomorphe rigide localement homogène sur une surface complexe est localement isomorphe à une structure géométrique G-invariante sur un espace homogène de dimension deux G/I.*

Démonstration L'algèbre des champs de Killing $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie de dimension finie qui agit transitivement sur la surface. Considérons la sous-algèbre $\mathcal{I}$ de $\mathcal{G}$ formée par tous les champs de Killing qui s'annulent en un point donné de la surface. Pour construire un espace modèle, considérons G l'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe associé à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ par le théorème de Lie. Comme $\mathcal{I}$ est de codimension réelle égale à 4 dans $\mathcal{G}$, un résultat de Mostow [68] démontre que l'image de $\mathcal{I}$ par l'application exponentielle de G est un sous-groupe *fermé* I de G. Notre espace modèle sera alors l'espace homogène G/I qui hérite d'une structure géométrique holomorphe G-invariante localement isomorphe à la structure géométrique initiale. $\boxdot$

Théorème 3.13 *Toute structure géométrique holomorphe rigide localement homogène ϕ sur une surface complexe est localement isomorphe à une structure géométrique invariante par translation sur $\mathbf{C}^2$ ou sur le groupe $Aff(\mathbf{C})$ des transformations affines de $\mathbf{C}$.*

Démonstration La structure géométrique ϕ est localement isomorphe à une structure géométrique G-invariante sur G/I. Par le théorème de Lie de classification des espaces homogènes de dimension deux, G admet un sous-groupe de Lie de dimension deux (isomorphe donc localement à $\mathbf{C}^2$ ou à $Aff(\mathbf{C})$) qui agit avec une orbite ouverte [71]. La structure géométrique ϕ est alors localement isomorphe à une structure géométrique invariante par translation sur $\mathbf{C}^2$ ou sur $Aff(\mathbf{C})$. $\boxdot$

4 Résultats de classification

4.1 Sur les variétés parallélisables

Rappelons que, d'après le théorème de Wang, une variété complexe compacte parallélisable est un quotient d'un groupe de Lie complexe par un réseau cocompact. Nous étudions ici les connexions affines holomorphes sur ces variétés.

D'abord, pour ce qui est des tenseurs, on a la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Tout tenseur holomorphe sur une variété parallélisable $M = G/\Gamma$ provient d'un tenseur holomorphe G-invariant sur G.*

Démonstration

Comme le fibré tangent à M est holomorphiquement parallélisable, le fibré principal $R^1(M)$ l'est également. En particulier, tout fibré vectoriel associé est trivial. De plus, l'image réciproque sur G de chacun de ces fibrés admet des trivialisations G-invariantes. $\boxdot$

Passons maintenant aux connexions affines :

Proposition 4.2 *Soit M une variété complexe compacte parallélisable de dimension n, quotient d'un groupe de Lie complexe connexe G par un réseau cocompact Γ de G. Alors :*

(i) M admet des connexions affines holomorphes. L'image réciproque d'une telle connexion sur G est une connexion affine holomorphe invariante par translation à droite.

(ii) M admet des connexions affines holomorphes plates.

(iii) M admet une connexion affine holomorphe plate sans torsion si et seulement s'il existe un morphisme injectif d'algèbres de Lie $i : \mathcal{G} \to gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ dont l'image intersecte trivialement l'isotropie $gl(n, \mathbf{C})$, où $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de G et $gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ est l'algèbre de Lie du groupe affine de $\mathbf{C}^n$.

Corollaire 4.3 *Si G est un groupe de Lie complexe semi-simple, alors les variétés complexes compactes parallélisables $M = G/\Gamma$ n'admettent aucune connexion affine holomorphe plate sans torsion.*

Corollaire 4.4 *Si $M = G/\Gamma$ est une variété complexe compacte parallélisable de dimension trois, alors M admet une connexion affine holomorphe plate sans torsion si et seulement si G est résoluble.*

Passons à la preuve de la proposition 4.2.

Démonstration

(i) Soient $X_1, \ldots, X_n$, des champs de vecteurs invariants par translation à droite sur G. Toute connexion ∇ invariante par translation à droite sur G est caractérisée par des constantes $\Gamma_{ij}^k \in \mathbf{C}$ telles que $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$. Une telle connexion descend sur M.

Inversement, si ∇ est une connexion affine holomorphe sur M, les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k relatifs à la famille de champs de vecteurs holomorphes sur M dont l'image réciproque sur G est $X_1, \dots, X_n$, sont des fonctions holomorphes et donc constantes sur la variété compacte M.

(ii) Si les constantes Γ_{ij}^k sont toutes nulles, la connexion ∇ est plate. Elle se relève en une connexion plate bi-invariante sur G. La torsion $T(X_i, X_j) = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j]$ est nulle si et seulement si G est abélien.

(iii) Supposons d'abord que ∇ est une connexion holomorphe plate sans torsion sur G/Γ. Comme ∇ est localement isomorphe à la connexion standard de $\mathbf{C}^n$, l'algèbre de Lie du pseudo-groupe des isomorphismes locaux de ∇ est $gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$. Par ailleurs, d'après le point (i), il existe dans l'algèbre de Lie du pseudo-groupe des isomorphismes locaux de ∇ une copie de $\mathcal{G}$ agissant transitivement (et donc intersectant trivialement l'isotropie $gl(n, \mathbf{C})$).

Réciproquement, si le morphisme i existe, il engendre une action (à droite) affine localement libre du revêtement universel $\tilde{G}$ de G sur $\mathbf{C}^n$ telle que l'orbite de 0 est ouverte. Ceci munit le groupe de Lie $\tilde{G}$ d'une structure affine complexe invariante par translation à droite. Or, M est biholomorphe à un quotient $\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$, où $\tilde{\Gamma}$ est un réseau cocompact de $\tilde{G}$. Par conséquent, M hérite de la structure affine complexe $\tilde{G}$-invariante à droite de $\tilde{G}$. $\boxdot$

Nous en déduisons à présent le corollaire 4.3.

Démonstration

On appliquera le point (iii) de la proposition 4.2 au groupe G supposé semi-simple complexe et de dimension n.

Considérons un morphisme injectif i de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G dans $gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$. Comme $\mathcal{G}$ est semi-simple, la projection $p_1 \circ i$ sur le premier facteur est également un morphisme injectif (sinon $\mathcal{G}$ admettrait un idéal abélien non trivial). Le lemme classique de Whitehead affirme alors que le premier groupe de cohomologie de $(p_1 \circ i)(\mathcal{G})$ à coefficients dans la représentation induite par la représentation canonique de $gl(n, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^n$ s'annule. Ceci implique que, à automorphisme interne près, les seuls morphismes injectifs de $\mathcal{G}$ dans $gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ sont à image dans $gl(n, \mathbf{C})$.

Il reste à montrer qu'une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ sur $\mathbf{C}^n$ n'admet aucune orbite ouverte. Considérons une telle représentation et soient $K_1, K_2, \dots, K_n$ des champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ qui sont les champs fondamentaux de l'action de $\mathcal{G}$ associés à une base de $\mathcal{G}$.

Comme $\mathcal{G}$ est semi-simple, sa représentation sur $\mathbf{C}^n$ est à valeurs dans l'algèbre de Lie $sl(n, \mathbf{C})$ du groupe spécial linéaire et préserve la forme volume holomorphe $vol = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ sur $\mathbf{C}^n$.

Supposons par l'absurde qu'une telle représentation ait une orbite ouverte non triviale $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{G}$ est unimodulaire, la fonction holomorphe $vol(K_1, K_2, \dots, K_n)$ est constante (non nulle) sur $\mathcal{O}$, et donc sur $\mathbf{C}^n$. Ceci contredit le fait que l'action fixe 0 et donc tous les K_i s'annulent à l'origine. $\boxdot$

Nous en déduisons le corollaire 4.4.

Démonstration

On appliquera de nouveau le point (iii) de la proposition 4.2.

Les algèbres de Lie complexes unimodulaires de dimension trois sont : $sl(2, \mathbf{C})$, $\mathbf{C}^3$ et les algèbres de Lie (résolubles) *heis* et *sol* [45]. Rappelons que les algèbres *heis* et *sol* sont engendrées par des générateurs e_1, e_2, e_3, avec les relations de crochet respectivement $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$ et $[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = -e_3, [e_2, e_3] = 0$.

Le cas de l'algèbre de Lie semi-simple $sl(2, \mathbf{C})$ vient d'être traité.

Bien sûr $\mathbf{C}^3$ agit librement par translation sur $\mathbf{C}^3$.

Il reste à exhiber dans l'algèbre de Lie du groupe affine de $\mathbf{C}^3$ des copies de *heis* ou *sol* qui intersectent trivialement l'isotropie. Soit (f_1, f_2, f_3) la base canonique de $\mathbf{C}^3$. Les éléments $e_1 = (A, f_1), e_2 = (0, f_2), e_3 = (0, f_3) \in gl(3, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^3$ engendrent une algèbre de Lie isomorphe à *heis* ou à *sol* selon que $A \in gl(3, \mathbf{C})$ vérifie $Af_2 = f_3, Af_3 = 0$, ou bien $Af_2 = f_2, Af_3 = -f_3$. $\boxdot$

Rappelons qu'une connexion affine holomorphe sans torsion ∇ sur une variété complexe M de dimension n est dite *projectivement plate* s'il existe un atlas de M à valeurs dans des ouverts de $P^n(\mathbf{C})$ dont chaque carte redresse les géodésiques de ∇ sur des droites de $P^n(\mathbf{C})$ (sans nécessairement préserver le paramètrage). Dans ce cas les changements de carte sont des transformations projectives et cet atlas munit M d'une *structure projective complexe* [38].

Proposition 4.5 *Toute variété complexe compacte parallélisable de dimension trois $M = G/\Gamma$ admet des connexions affines holomorphes sans torsion projectivement plates.*

Démonstration D'après le corollaire 4.4, il reste à prouver le résultat pour $G = SL(2, \mathbf{C})$. On commence par construire une structure projective complexe invariante à droite sur $SL(2, \mathbf{C})$. Remarquons que $P^3(\mathbf{C})$ est l'espace projectif sur l'espace vectoriel des polynômes homogènes complexes en deux variables de degré 3. L'action linéaire (par changement linéaire de variable) de $SL(2, \mathbf{C})$ sur cet espace vectoriel se projectivise et admet dans $P^3(\mathbf{C})$ l'orbite ouverte qui provient des polynômes homogènes qui sont produits de trois formes linéaires distinctes (l'action de $SL(2, \mathbf{C})$ sur $P^1(\mathbf{C})$ est trois fois transitive). Ceci fournit une action projective de $SL(2, \mathbf{C})$ sur $P^3(\mathbf{C})$ qui possède une orbite ouverte. On obtient donc une structure projective complexe invariante par translation sur $SL(2, \mathbf{C})$. Celle-ci descend bien sur $SL(2, \mathbf{C})/\Gamma$.

Comme le fibré canonique de M est trivial, cette structure projective complexe correspond à une connexion affine holomorphe sans torsion projectivement plate sur M (voir [50], formule (3.6), pages 78-79).

Une méthode plus directe est de considérer la connexion (holomorphe sans torsion) standard sur $SL(2, \mathbf{C})$, déterminée par $\nabla_x y = \frac{1}{2}[x, y]$, pour $x, y \in sl(2, \mathbf{C})$. On vérifie que celle-ci est projectivement plate (formellement les calculs sont les mêmes que pour la sphère S^3). $\boxdot$

Quotients exotiques de Ghys. En dimension 3, des exemples inédits de variétés complexes compactes équipées de connexions affines holomorphes et dont le fibré tangent n'est pas holomorphiquement trivial ont été construits dans [29]. Ces exemples s'obtiennent à partir de $SL(2, \mathbf{C})/\Gamma$ par déformation de la structure complexe selon le procédé suivant.

D'après [29] il existe des morphismes de groupe $u : \Gamma \to SL(2, \mathbf{C})$ tels que l'action à droite de Γ sur $SL(2, \mathbf{C})$ donnée par :

$$(m, \gamma) \in SL(2, \mathbf{C}) \times \Gamma \to u(\gamma^{-1}) m \gamma \in SL(2, \mathbf{C})$$

est libre et totalement discontinue. Le quotient est une variété complexe compacte $M(u, \Gamma)$ qui, en général, n'est pas parallélisable.

Proposition 4.6 *Les variétés $M(u, \Gamma)$ possèdent des connexions affines holomorphes plates et des connexions affines holomorphes sans torsion projectivement plates, mais aucune connexion affine holomorphe sans torsion plate .*

Démonstration

D'après la preuve de la proposition 4.2, $SL(2, \mathbf{C})$ admet une connexion affine holomorphe plate bi-invariante. Celle-ci descend en une connexion plate sur $M(u, \Gamma)$.

La connexion standard de $SL(2, \mathbf{C})$ est projectivement plate sans torsion et bi-invariante : elle descend sur $M(u, \Gamma)$.

Considérons maintenant une connexion affine holomorphe quelconque ∇ sur $M(u, \Gamma)$. La différence entre ∇ et la connexion standard est un tenseur holomorphe [38]. Il est prouvé dans [29] que tout tenseur holomorphe sur $M(u, \Gamma)$ se relève en un tenseur holomorphe sur $SL(2, \mathbf{C})$ invariant par translation à droite. En particulier, ∇ se relève en une connexion invariante par translation à droite sur $SL(2, \mathbf{C})$ et donc l'algèbre de Lie du pseudo-groupe des isomorphismes locaux de ∇ contient une copie de $sl(2, \mathbf{C})$ agissant transitivement. On conclut, comme dans la preuve du corollaire 4.3, que ∇ n'est pas plate sans torsion. $\boxdot$

4.2 Sur les variétés Kählériennes

Un résultat de [43], basé essentiellement sur la preuve de Yau de la conjecture de Calabi, classifie les variétés kählériennes compactes admettant des connexions affines holomorphes (en particulier, celles qui admettent des métriques riemanniennes holomorphes) :

Théorème 4.7 *(Inoue, Kobayashi, Ochiai) Soit M une variété kählérienne compacte et connexe, munie d'une connexion affine holomorphe ∇. Alors M admet un revêtement fini non ramifié qui est un tore complexe et sur lequel l'image réciproque de ∇ est invariante par translations.*

Démonstration La première étape de la preuve consiste à constater que, d'après la méthode de Chern-Weil, les classes de Chern de M peuvent se calculer à partir d'une connexion affine sur TM [34]. Si l'on effectue ces calculs à l'aide de la connexion holomorphe ∇, on trouve un représentant de la p-ième classe de Chern qui est une $2p$-forme différentielle holomorphe. Par ailleurs, le calcul de la même classe de Chern à partir de la connexion d'une métrique hermitienne quelconque fournit un autre représentant qui est une (p,p)-forme différentielle fermée. Or, dans le contexte kählérien, deux formes différentielles fermées non nulles de type différent ne sont jamais cohomologues. Ceci implique l'annulation de toutes les classes de Chern de M.

Comme M a sa première classe de Chern nulle, la preuve de Yau de la conjecture de Calabi implique que M admet une métrique kählérienne de courbure de Ricci nulle. Comme la seconde classe de Chern est également nulle, des formules classiques, dues à Berger et Lascoux, impliquent que la courbure scalaire de cette métrique kählérienne est nulle [43]. Le théorème de Bieberbach [79, 83] implique alors que M admet un revêtement fini qui est un tore. $\boxdot$

En mettant ensemble des arguments de [12, 13] et des théorèmes de structure pour les variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle [6], on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.8 *(Bogomolov, Yau) Soit M une variété kählérienne compacte connexe dont la première classe de Chern est nulle, munie d'un tenseur holomorphe de type général ϕ. Alors M admet un revêtement fini non ramifié qui est un tore complexe et sur lequel l'image réciproque de ϕ est un tenseur invariant par translations.*

Démonstration La preuve de Yau de la conjecture de Calabi, implique l'existence d'une métrique kählérienne Ricci plate sur M. Une formule de type Bochner (due à Kobayashi) montre alors que tout tenseur holomorphe sur M est invariant par le transport parallèle de cette métrique [6]. En particulier, ϕ est une G-structure holomorphe d'ordre un, pour un sous-groupe fini G de $GL(n, \mathbf{C})$.

Il vient que M admet un revêtement fini non ramifié muni d'un parallélisme holomorphe et on conclut en appliquant le théorème de Wang. $\boxdot$

Dans [21] nous avons obtenu une généralisation des résultats précédents sous la forme suivante :

Théorème 4.9 *Soit M une variété kählérienne compacte connexe dont la première classe de Chern est nulle, munie d'une structure géométrique holomorphe de type affine ϕ. Alors ϕ est localement homogène.*

Si, de plus, ϕ est rigide, alors M admet un revêtement fini qui est un tore complexe et sur lequel l'image réciproque de ϕ est invariante par translations.

Démonstration Le lemme-clef de la preuve (voir dans la suite lemme 4.10) montre que si ϕ est non localement homogène, alors il existe sur M un tenseur holomorphe non trivial qui s'annule en au moins un point. Ceci est interdit car, par la formule de Bochner-Kobayashi, le transport parallèle d'une métrique kählérienne Ricci plate devrait préserver ce tenseur [6]. Il vient que ϕ est localement homogène.

Par ailleurs, une variété kählérienne M de première classe de Chern nulle est biholomorphe (à revêtement fini près) à un produit entre un tore complexe T et une variété du même type simplement connexe N [6]. On induit sur le facteur simplement connexe une structure géométrique holomorphe rigide ϕ' de la manière suivante.

Comme la variété M est munie de la structure géométrique holomorphe rigide ϕ, le revêtement $\tilde{M} = T \times N$ hérite d'une structure rigide $\tilde{\phi}$. Nous remarquons d'abord que le fibré des r-repères $R^r(\tilde{M})$ admet $R^r(T) \times R^r(N)$ comme sous-fibré principal. Or $R^r(T)$ est le produit $T \times D^r(\mathbf{C}^t)$, où t désigne la dimension complexe du tore T. Ceci implique que le fibré $R^r(\tilde{M})$ contient $R^r(N) \times T$ comme sous-fibré principal (le groupe structural admet une reduction au groupe $D^r(\mathbf{C}^n)$, où n est la dimension complexe de N). L'espace but étant une variété affine, la restriction de l'application $\tilde{\phi}$ au produit $R^r(N) \times T$ se factorise en une application ψ définie sur $R^r(N)$. Il s'agit d'une structure géométrique holomorphe rigide de type algébrique affine ψ sur N.

Or, sur les variétés simplement connexes les champs de Killing locaux d'une structure géométrique holomorphe rigide se prolongent en des champs de Killing globaux [1, 70, 35]. Choisissons donc un point sur le facteur simplement connexe et des champs de Killing globaux $X_1, \ldots, X_n$ qui engendrent l'espace tangent holomorphe en ce point.

Par la formule de Bochner-Kobayashi, le champ de tenseurs holomorphe $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$ est invariant par le transport parallèle d'une métrique kählérienne Ricci plate et donc partout non nul. Le facteur simplement connexe est donc une variété parallélisable, quotient d'un groupe de Lie complexe simplement connexe G par un réseau cocompact Γ. Comme il n'existe pas de groupe de Lie complexe simplement connexe compact non trivial, il vient que le facteur simplement connexe est trivial.

De plus, le fibré des r-repères de T étant trivial (avec une trivialisation préservée par les translations), ϕ est invariante par translations sur T. $\boxdot$

Lemme 4.10 *Soit M une variété complexe qui a la propriété que tout champ de tenseurs holomorphe sur M qui s'annule en au moins un point est identiquement nul. Alors toute structure géométrique holomorphe de type algébrique affine sur M est localement homogène.*

Démonstration La preuve se fait par l'absurde. Considérons sur M une structure géométrique holomorphe d'odre r et de type algébrique affine ϕ qui ne soit pas localement homogène. Par définition, ϕ est une application holomorphe $D^r(\mathbf{C}^n)$-équivariante du fibré des r-repères $R^r(M)$ dans une $D^r(\mathbf{C}^n)$-variété affine Z, où n désigne la dimension complexe de M.

Il est montré dans [21] que ϕ est localement homogène si et seulement si Is^{s+r} agit transitivement quel que soit $s \in \mathbf{N}$. Par conséquent, il existe un entier s tel que l'action de Is^{s+r} n'est pas transitive sur M. Il est équivalent de dire que le s-jet $\phi^{(s)} : R^{s+r}(M) \to J^{s,n}(Z)$ de la structure ϕ est tel que l'image de $\phi^{(s)}$ dans $J^{s,n}(Z)$ contiennent au moins deux D^{s+r}-orbites.

Il est légitime de remplacer la variété affine $J^{s,n}(Z)$ par un espace vectoriel $V^{(s)}$ muni d'une action linéaire algébrique de $D^{s+r}(\mathbf{C}^n)$ (via un plongement algébrique équivariant [72]).

Choisissons une orbite X de dimension minimale parmi les orbites incluses dans l'image $Im\phi^s$. Désignons par $\overline{X}$ l'adhérence de X dans $V^{(s)}$ et par $\overline{Im\phi^{(s)}}$ l'adhérence de $Im\phi^{(s)}$ dans $V^{(s)}$. Il n'y a pas d'ambiguïté car dans ce cas l'adhérence dans la topologie de Zariski coïncide avec l'adhérence dans la topologie usuelle (voir [69], ch. 10).

L'ensemble $\overline{X}$ est un fermé D^{s+r}-invariant de $\overline{Im\phi^{(s)}}$ tel que $\overline{X} \cap Im\phi^{(s)} \neq \emptyset$, et $Im\phi^{(s)}$ n'est pas inclus dans $\overline{X}$. La seule affirmation non triviale est la dernière. Elle est assurée par le choix de X puisque, d'après un résultat fondamental de la théorie des actions algébriques ([40], 8.3), l'ensemble $\overline{X} \setminus X$ est une union d'orbites de dimension strictement inférieure à la dimension de X.

Soit I l'idéal des fonctions régulières sur $\overline{Im\phi^{(s)}}$ qui s'annulent sur le fermé $\overline{X}$. Il existe dans I un sous-espace vectoriel non trivial de dimension finie $D^{s+r}(\mathbf{C}^n)$-invariant [40]. Considérons $(F_1, \dots, F_l)$, une base de cet espace vectoriel et construisons le morphisme régulier $D^{s+r}(\mathbf{C}^n)$-invariant T, donné par

$$T : v \in \overline{Im\phi^{(s)}} \to (F_1(v), \dots, F_l(v)) \in \mathbf{C}^l.$$

L'application T s'annule sur $\overline{X}$. La composition $T \circ \phi^{(s)}$ fournit une application holomorphe non triviale $D^{s+r}(\mathbf{C}^n)$-équivariante, du fibré $R^{s+r}(M)$ dans $\mathbf{C}^l$ avec la propriété que $0 \in Im(T \circ \phi^{(s)})$.

Montrons à présent que, quitte à modifier légèrement l'application T, elle descend en une application non triviale définie sur le fibré des 1-repères.

Le groupe structural du fibré des $s+r$-repères est $D^{s+r}(\mathbf{C}^n)$. Il existe une projection canonique $D^{s+r}(\mathbf{C}^n) \to D^1(\mathbf{C}^n) = GL(n, \mathbf{C})$ qui associe à chaque $s+r$-jet de biholomorphisme son 1-jet sous-jacent. Le noyau de cette projection est un sous-groupe distingué unipotent H.

Un résultat classique de la théorie des représentations algébriques des groupes unipotents ([40], 17.5) assure que l'action de $H \subset D^{s+r}(\mathbf{C}^n)$ induit sur l'espace but $\mathbf{C}^l$ de l'application $T \circ \phi^{(s)} : R^{s+r}(M) \to \mathbf{C}^l$ une filtration

$$\mathbf{C}^l = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_p = \{0\},$$

avec la propriété que H agit trivialement sur les quotients V_i/V_{i+1}, pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}$.

Comme l'image $Im(T \circ \phi^{(s)})$ de l'application $T \circ \phi^{(s)}$ ne se réduit pas au point 0, il existe au moins un indice $i \in \{1, \dots, p-1\}$ pour lequel $Im(T \circ \phi^{(s)}) \subset V_i$ et l'image de l'ensemble $Im(T \circ \phi^{(s)})$ par la projection $p_i : V_i \to V_i/V_{i+1}$ n'est pas réduite au point 0. Alors l'application $p_i \circ T \circ \phi^{(s)} : R^{s+r}(M) \to V_i/V_{i+1}$ a une image non triviale qui contient 0. Comme cette application est $D^{s+r}(\mathbf{C}^n)$-équivariante et H agit par l'identité sur V_i/V_{i+1}, elle passe au quotient en une application

$$\overline{p_i \circ T \circ \phi^{(s)}} : R^1(M) \to V_i/V_{i+1},$$

$D^{s+r}(\mathbf{C}^n)/H = GL(n, \mathbf{C})$-équivariante. L'image de $\overline{p_i \circ T \circ \phi^{(s)}}$ est non triviale et contient 0.

Comme $GL(n, \mathbf{C})$ est réductif, la représentation V_i/V_{i+1} est une somme directe de représentations irréductibles. Parmi ces représentations irréductibles il existe au moins une dans laquelle l'image de l'application $\overline{p_i \circ T \circ \phi^{(s)}}$ est non triviale (et contient 0). Or, toute représentation irréductible de $GL(n, \mathbf{C})$ est facteur direct d'une représentation $(\mathbf{C}^n)^{\otimes p} \otimes ((\mathbf{C}^n)^*)^{\otimes q}$. Ceci résulte, par exemple, de la description des représentations irréductibles du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ [27].

L'application $GL(n, \mathbf{C})$-équivariante de $R^1(M)$ dans $(\mathbf{C}^n)^{\otimes p} \otimes ((\mathbf{C}^n)^*)^{\otimes q}$, est un champ holomorphe de tenseurs de type (p, q) sur M qui s'annule en au moins un point sans être identiquement nul. C'est la contradiction recherchée. $\boxdot$

Remarquons que le résultat précédent s'applique également aux structures conformes holomorphes ϕ. En effet, même si ϕ est une $\mathbf{C}^* \ltimes O(n, \mathbf{C})$-structure, de type *non affine*, l'annulation de la première classe de Chern de M implique l'existence sur un revêtement fini de M d'une forme volume holomorphe [6]. La présence d'une forme volume holomorphe permet de réduire le groupe structural de $R^1(M)$, à une extension finie de $O(n, \mathbf{C})$. Il vient que, sur un revêtement fini de M, la structure conforme admet un représentant (global) qui est une métrique riemannienne holomorphe, pour laquelle aussi bien le théorème 4.7, que le théorème 4.9 s'appliquent.

La même méthode fonctionne pour des connexions projectives holomorphes : la présence d'une forme volume implique l'existence d'un représentant global qui est une connexion affine holomorphe pour laquelle les théorèmes précédents s'appliquent.

Des résultats similaires au théorème précédent dans le contexte, plus général, des structures géométriques infinitésimalement modelées, dans le sens de Cartan, sur des espaces homogènes G/I, ont été obtenus dans [61, 11, 19].

Il convient de mentionner également les résultats de platitude obtenus dans [41] pour des G-structures holomorphes sur des variétés unirationnelles. Un théorème de [62] généralise ces résultats au cas des variétés algébriques admettant au moins une courbe rationnelle.

5 Quelques développements

5.1 Métriques Riemanniennes Holomorphes

L'existence d'une métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe compacte impose des conditions très restrictives à la variété. Une première obstruction évidente est la première classe de Chern. En effet, une métrique riemannienne holomorphe est une $O(n, \mathbf{C})$-structure sur le fibré tangent holomorphe à M. Ceci implique l'existence d'un revêtement double non ramifié de M sur lequel le groupe structural du fibré des repères (qui est, en général, un $GL(n, \mathbf{C})$-fibré) se réduit au groupe $SO(n, \mathbf{C})$ qui préserve un volume holomorphe. Le fibré canonique (des formes volumes holomorphes) de ce revêtement double de M est donc trivial, ce qui assure l'annulation de la première classe de Chern de M. On peut aussi remarquer que la présence d'une métrique riemannienne holomorphe fixe un isomorphisme entre le fibré tangent holomorphe TM et son dual T^*M. En particulier, le fibré canonique de M est isomorphe à son dual ce qui implique l'annulation de la première classe de Chern de M.

Un premier exemple de variétés *compactes* admettant des métriques riemanniennes holomorphes est donné par les tores complexes. Pour s'en assurer il suffit de constater que la métrique plate $g = dz_1^2 + dz_2^2 + \ldots + dz_n^2$ est invariante par translations et descend donc sur tout quotient de $\mathbf{C}^n$ par un réseau de translations.

Rappelons que, grâce au théorème 4.7, parmi les variétés kählériennes compactes, seuls les tores complexes et leurs quotients finis admettent des métriques riemanniennes holomorphes et ces métriques sont nécessairement plates. Un résultat similaire est démontré dans [20] pour les surfaces complexes compactes.

Nous nous intéressons dans cette partie à la classification des variétés complexes compactes non (nécessairement) kählériennes de dimension trois qui possèdent des métriques riemanniennes holomorphes.

Proposition 5.1 *i) Soit $M = \Gamma \backslash G$ une variété parallélisable quotient d'un groupe de Lie complexe connexe simplement connexe G par un réseau cocompact Γ. Alors toute métrique riemannienne holomorphe g sur M provient d'une métrique riemannienne holomorphe invariante à gauche sur G.*

ii) Toute variété parallélisable de dimension complexe trois, admet une métrique riemannienne holomorphe de courbure sectionnelle constante. La courbure est nulle exactement quand le groupe G est résoluble.

Démonstration i) Il s'agit d'un cas particulier de la proposition 4.1.

ii) À présent G est un groupe de Lie complexe connexe simplement connexe unimodulaire de dimension trois. Il vient que G est l'un des quatres groupes de Lie suivants : $\mathbf{C}^3$, $SL(2, \mathbf{C})$, le groupe de Heisenberg complexe ou le groupe SOL complexe.

La forme de Killing induit une métrique riemannienne holomorphe de courbure constante non nulle invariante sur $SL(2,\mathbf{C})$. Par ailleurs, nous avons vu au corollaire 4.3 que $SL(2,\mathbf{C})$ n'admet aucune connexion affine holomorphe plate sans torsion invariante (donc aucune métrique riemannienne holomorphe plate).

Les groupes Heisenberg et SOL possède des actions sur $\mathbf{C}^3$ qui préservent $dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2$ et qui admettent une orbite ouverte (voir la preuve du corollaire 4.4). Ils héritent donc d'une métrique plate invariante. Par ailleurs, il n'existe pas dans le groupe des isométries de $SL(2,\mathbf{C}) \times SL(2,\mathbf{C})$ de la forme de Killing aucune copie d'un groupe résoluble agissant avec une orbite ouverte. Par conséquent, $\mathbf{C}^3$, Heisenberg et SOL ne possèdent pas de métrique riemannienne holomorphe de courbure constante non nulle. $\boxdot$

Les exemples non standard de Ghys. Nous avons vu que ces variétés $M(u,\Gamma)$ s'obtiennent à partir des variétés parallélisables $\Gamma\backslash SL(2,\mathbf{C})$, par déformation de la structure complexe [29] et dépendent d'un morphisme u de Γ dans $SL(2,\mathbf{C})$. Elles héritent de la métrique riemannienne holomorphe donnée par la forme de Killing.

Pour un morphisme u générique *les variétés $M(u,\Gamma)$ ne possèdent pas de revêtement fini non ramifié qui soit une variété parallélisable.*

Néanmoins, dans tous les exemples connus, le revêtement universel de la variété est un groupe de Lie complexe sur lequel la préimage de la métrique riemannienne holomorphe par le revêtement est invariante par translations.

Le premier pas vers la classification nous l'avons obtenu dans [22] avec le résultat suivant :

Théorème 5.2 *: Soit M une variété complexe compacte connexe de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe. Alors toute structure géométrique holomorphe de type algébrique affine sur M est nécessairement localement homogène.*

En particulier, la métrique riemannienne holomorphe est localement homogène.

Corollaire 5.3 *Si, de plus, M possède un tenseur holomorphe de type général ϕ, alors M admet un revêtement fini qui est une variété parallélisable.*

Le corollaire découle simplement du théorème 5.2. En effet, le tenseur ϕ est localement homogène, en particulier, il fournit une G-structure holomorphe d'ordre un sur M, avec G un sous-groupe fini de $GL(n,\mathbf{C})$ (comme dans la preuve du théorème 4.8). Sur un revêtement fini de M on obtient alors un parallélisme holomorphe et le théorème de Wang conclut.

Revenons à présent au cas général. Grâce au théorème 5.2, M est localement modelée sur une $(G, G/I)$-géométrie, où I est un sous-groupe de Lie complexe du groupe de Lie complexe G tel que l'action canonique de G sur G/I préserve une métrique riemannienne holomorphe (dont l'algèbre de Lie des champs de Killing locaux est l'algèbre de Lie de G).

La deuxième étape est décrite dans le résultat de classification suivant [23] (obtenu en collaboration avec Zeghib). Il représente, en particulier, un théorème de complétude et de rigidité de Bieberbach, dans le cas où G est résoluble :

Théorème 5.4 *Soit M une variété complexe compacte et connexe de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe g.*

(i) Si l'algèbre de Lie des champs de Killing locaux de g admet une partie semi-simple non triviale, alors elle préserve une métrique riemannienne holomorphe de courbure sectionnelle constante sur M.

(ii) Si l'algèbre de Lie des champs de Killing locaux de g est résoluble, alors M admet un revêtement fini non ramifié qui est un quotient du groupe de Heisenberg complexe ou du groupe SOL complexe par un réseau cocompact.

Remarque 3 *Si g est plate, alors son algèbre de Lie de champs de Killing locaux est l'algèbre de Lie de $O(3,\mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^3$, qui possède une partie semi-simple non triviale. Par conséquent, les métriques plates sur les tores complexes se trouvent dans la partie (i) de la classification. Il est de même des exemples non standard de Ghys (munis de la métrique de courbure sectionnelle constante non nulle), pour lesquels il s'agit de l'algèbre de Lie de $SL(2,\mathbf{C}) \times SL(2,\mathbf{C})$.*

Comme les groupes Heisenberg et SOL possèdent des métriques riemanniennes holomorphes plates invariantes à gauche, le théorème 5.4 admet le corollaire suivant :

Corollaire 5.5 *Soit M une variété complexe compacte connexe de dimension 3, munie d'une métrique riemannienne holomorphe. Alors M admet un revêtement fini non ramifié qui possède une métrique riemannienne holomorphe de courbure sectionnelle constante.*

Le théorème 5.4 n'achève pas la classification des variétés complexes compactes de dimension 3 admettant des métriques riemanniennes holomorphes, mais *ramène le problème au cas des métriques à courbure sectionnelle constante.* Les deux cas qui restent à comprendre sont les suivants.

Cas plat. Dans ce cas M est localement modelée sur une $(O(3,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$-géométrie et on est dans le cadre des deux conjectures suivantes :

1) *Conjecture de Markus : M* est-elle complète ?

2) *Conjecture d'Auslander :* En supposant que M est complète, est-ce que Γ est nécessairement résoluble ?

Pour ce qui est du cadre réel, ces questions ont reçu une réponse positive dans le contexte lorentzien [16, 28], mais restent ouvertes pour les métriques pseudo-riemanniennes de plus haute signature. Précisons que la partie réelle d'une métrique riemannienne holomorphe est une métrique pseudo-riemannienne de signature $(3,3)$

pour laquelle les deux conjectures précédentes sont irrésolues.

Courbure constante non nulle. Dans ce cas $G = SL(2, \mathbf{C}) \times SL(2, \mathbf{C})$ et $I = SL(2, \mathbf{C})$ est plongé diagonalement dans le produit. La complétude des variétés compactes localement modelées sur cette géométrie constitue encore un problème ouvert, malgré le résultat local de [29] qui démontre la complétude, sous l'hypothèse que le morphisme d'holonomie est proche de celui de la réalisation standard $\Gamma \backslash SL(2, \mathbf{C})$.

Il importe de signaler que les géodésiques complexes d'une métrique riemannienne holomorphe induisent un feuilletage holomorphe en surfaces de Riemann sur le projectivisé $P(TM)$ du fibré tangent holomorphe. Chaque feuille de ce feuilletage hérite d'une structure affine holomorphe, ce qui exclut le cas des feuilles biholomorphes à $P^1(\mathbf{C})$. Il reste que les feuilles sont, en tant que surfaces de Riemann, de type parabolique ou de type hyperbolique. Un premier pas vers la complétude géodésique serait de montrer que, dans le cas d'une métrique de courbure sectionnelle constante sur une variété compacte, les feuilles du feuilletage précédent sont de type parabolique.

Flot géodésique des métriques invariantes à gauche. À la lumière de la question précédente, il serait intéressant de comprendre les courbes géodésiques des métriques riemanniennes holomorphes invariantes à gauche sur un groupe de Lie complexe G. Le flot géodésique d'une telle métrique est hamiltonien et entièrement déterminé par un champ de vecteurs quadratique homogène sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Le but serait ici de déterminer les métriques riemanniennes holomorphes (et les groupes de Lie) pour lesquelles ce champ de vecteurs quadratique est complet et, en particulier, semi-complet au sens de Ghys-Rebelo [30, 74]. Autrement dit, les solutions du champ de vecteurs sont des fonctions holomorphes uniformes (et non multiformes) dans tout leur domaine maximal de définition.

Le flot géodésique de la métrique de Killing sur $SL(2, \mathbf{C})$ permet de retrouver, en dimension trois, les champs semi-complets de type Halphen étudiés dans [36, 37].

Plus généralement, Haine étudie dans [39] le flot géodésique des métriques riemanniennes holomorphes invariantes à gauche qui sont *diagonales* par rapport à la métrique de Killing sur le groupe orthogonal $O(n, \mathbf{C})$ et détermine, parmi ces métriques, celles dont le flot est semi-complet.

Ce serait intéressant de construire avec cette méthode des nouveaux champs de vecteurs quadratiques homogènes semi-complets, qui seront des versions inédites, de dimension supérieure, des champs de vecteurs semi-complets connus en dimension deux et trois par les travaux [30, 74, 36, 37].

Courbure sectionnelle constante en dimension plus grande ? Une question classique de géométrie différentielle est de savoir si un espace homogène G/I admet des quotients compacts, ou plus généralement s'il existe des variétés compactes localement modelées sur la géométrie G/I (voir, par exemple, [8, 10, 54, 55]).

Pour $I = 1$, ou, plus généralement, pour I compact, cette question se résume à la recherche de réseaux cocompacts dans G. Pour des espaces homogènes avec I non compact, la question est, en général, beaucoup plus difficile.

Le cas de l'espace homogène $S_n = O(n+1, \mathbf{C})/O(n, \mathbf{C})$ (muni d'une métrique riemannienne holomorphe de coubure sectionnelle constante non nulle $O(n+1, \mathbf{C})$-invariante) fournit un cadre géométrique où ces questions peuvent être testées. Il s'avère que l'on connaît des quotients compacts de S_n, seulement pour $n = 1, 3$ ou 7. Le cas $n = 3$ a été présenté ci-dessus, tandis que des quotients compacts de S_7 ont été construits dans [54], où la conjecture suivante est formulée :

Conjecture 1 *[54] L'espace homogène S_n admet des quotients compacts seulement si $n \in \{1, 3, 7\}$.*

Pour $n = 4m + 1$, avec $m \in \mathbf{N}$, la preuve de la conjecture précédente découle d'un résultat plus général dû à Benoist [8].

Nous pensons que, plus généralement, on a la

Conjecture 2 *[23] Une variété complexe compacte connexe munie d'une métrique riemannienne de courbure sectionnelle constante non nulle est complète. En particulier, une telle variété est de dimension 3 ou 7.*

Le théorème 5.2 nous incite également à poser la question naturelle suivante :

Question 1 *Une métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe compacte connexe est-elle toujours localement homogène ?*

Rappelons que si le fibré canonique d'une variété complexe M est trivial, alors toute structure conforme holomorphe sur M admet un représentant *global* qui est une métrique riemannienne holomorphe.

Une conséquence directe du théorème 5.2 est alors le

Corollaire 5.6 *Soit ϕ une structure conforme holomorphe sur une variété complexe compacte de dimension trois dont le fibré canonique est trivial. Alors ϕ est localement homogène.*

Par ailleurs, en analogie avec la conjecture de Lichnerowicz (voir, par exemple, [60]) nous formulons la

Conjecture 3 *Soit ϕ une structure conforme holomorphe sur une variété complexe compacte dont le fibré canonique n'est pas trivial (à revêtement fini près). Alors ϕ est plate.*

En particulier, toute structure conforme holomorphe sur une variété complexe compacte de dimension 3 est localement homogène.

La conjecture 3 est vérifiée pour les variétés *algébriques* compactes de dimension 3. En effet, le résultat de classification obtenu dans [73] montre que, parmi ces variétés, celles qui admettent des structures conformes holomorphes et dont le fibré canonique n'est pas trivial sont $P^3(\mathbf{C})$ et les quotients finis non ramifiés de l'espace hyperbolique complexe de dimension 3. Or, ces variétés admettent une unique structure conforme holomorphe qui est leur structure plate standard [41, 53, 66] (voir également [47, 62]).

5.2 Connexions affines et projectives holomorphes

Suite à des nombreux travaux portant sur les surfaces complexes qui possèdent des connexions affines holomorphes [38, 81, 77, 59], Inoue, Kobayashi et Ochiai établissent dans [43] la liste des surfaces complexes (connexes) compactes qui admettent des connexions affines holomorphes (non nécessairement plates). Une telle surface est biholomorphe (à revêtement fini près) à un tore complexe, une surface de Kodaira primaire, une surface de Hopf affine, une surface d'Inoue ou à un fibré principal en courbes elliptiques sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair. Par ailleurs, il est montré dans [43] que toutes ces surfaces possèdent des connexions affines holomorphes sans torsion *plates*. Toutes ces surfaces possèdent donc au moins une structure affine complexe.

La classification des surfaces complexes compactes qui possèdent des connexions projectives holomorphes a été obtenue dans [51, 52]. Ces surfaces sont dans la liste suivante : $P^2(\mathbf{C})$, les quotients non ramifiés de l'espace hyperbolique complexe $H^2_{\mathbf{C}}$ ou les surfaces admettant une connexion affine holomorphe. Toutes ces surfaces possèdent des connexions projectives holomorphes normales (i.e. localement déterminées par une connexion affine sans torsion) *plates* (i.e. localement modelées sur $P^2(\mathbf{C})$), et donc des *structures projectives complexes*.

Dans [46] Klingler classifie les structures affines complexes et les structures projectives complexes sur les surfaces complexes compactes.

Dans [18] nous étudions la géométrie locale des connexions affines et projectives holomorphes sur les surfaces complexes compactes.

Précisons qu'une conséquence du théorème 3.10 est que l'algèbre des champs de Killing locaux d'une connexion affine holomorphe sur une surface complexe compacte est non triviale. En effet, l'algèbre des champs de Killing pourrait être triviale seulement dans le cas où la dimension algébrique de la surface est égale à deux. Or, ces surfaces sont algébriques [5] et d'après le théorème 4.7 la connexion est invariante par translation sur une variété abélienne (l'algèbre de Killing est de dimension au moins deux).

Le résultat principal de [18] précise la structure de l'algèbre de Killing :

Théorème 5.7 *Soit* (S, ∇) *une surface complexe compacte connexe munie d'une connexion affine holomorphe sans torsion.*

i) Si S n'est pas biholomorphe à un fibré principal elliptique au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair, alors ∇ est localement modelée sur une connexion affine invariante par translations sur $\mathbf{C}^2$. En particulier, ∇ est localement homogène.

ii) Supposons que S est un fibré principal holomorphe en courbes elliptiques au-dessus d'une surface Σ de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair. L'espace des connexions affines holomorphes sans torsion sur S est biholomorphe à

$$(H^0(\Sigma, K_\Sigma))^2 \times H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes 2}) \simeq \mathbf{C}^{5g-3},$$

où K_Σ désigne le fibré canonique de Σ.

Toutes ces connexions sont invariantes par la fibration principale (i.e. admettent le champ fondamental de la fibration principale comme champ de Killing). L'espace des connexions plates est de codimension complexe g. Les connexions affines holomorphes sans torsion non plates sont non localement homogènes : l'algèbre des champs de Killing locaux est de dimension un, engendrée par le champ fondamental de la fibration principale.

Les connexions construites au point (ii) du théorème précédent fournissent les premiers exemples de G-structures holomorphes rigides sur une variété compacte qui ne sont pas localement homogènes.

La classification des connexions affines obtenue dans le théorème précédent nous permet d'obtenir par un calcul direct le

Corollaire 5.8 *Soit (S, ∇) une surface complexe compacte munie d'une connexion affine holomorphe sans torsion. Alors ∇ est projectivement plate.*

En utilisant le corollaire 5.8, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 5.9 *Toute connexion projective holomorphe normale sur une surface complexe compacte est plate.*

La preuve du théorème précédent se fait en deux étapes. Nous démontrons d'abord la proposition suivante qui, ensemble avec le corollaire 5.8, donne la platitude des connexions projectives holomorphes sur les surfaces compactes possèdant au moins une connexion affine holomorphe.

Proposition 5.10 *Soit S une surface complexe qui possède une connexion affine holomorphe. Alors toute connexion projective holomorphe normale sur S est projectivement équivalente à une connexion affine holomorphe sans torsion sur S.*

Le cas restant s'obtient en rassemblant des arguments de [41, 62, 66] (voir également [53, 47]) :

Théorème 5.11 *Soit S une surface complexe compacte qui admet une connexion projective holomorphe normale, mais ne possède aucune connexion affine holomorphe. Alors S est projectivement équivalente à $P^2(\mathbf{C})$ muni de sa connexion projective plate standard ou bien à un quotient compact non ramifié de $H^2_{\mathbf{C}}$ muni de sa connexion projective plate standard.*

En utilisant les connexions construites au point (ii) du théorème 5.7, pour lesquelles l'algèbre des champs de Killing locaux est de dimension un, il n'est pas difficile de construire des connexions affines holomorphes sur des variétés complexes compactes (non kählériennes) de dimension n et pour lesquelles l'algèbre de Lie des champs de Killing locaux est de dimension $n-1$.

Question 2 *Soit M une variété complexe compacte de dimension n, munie d'une connexion affine holomorphe ∇. Quelle est la dimension minimale de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ des champs de Killing locaux de ∇ ?*

Remarquons que nous sommes très près de savoir démontrer que $\mathcal{G}$ est non triviale. En effet, le théorème 3.10 implique que seules les variétés de dimension algèbrique maximale, égale à n, sont susceptibles de posséder des structures géométriques holomorphes rigides (en particulier, des connexions affines holomorphes) avec une algèbre de Lie de champs de Killing locaux triviale. Par ailleurs, le théorème 4.7 implique que les seules variétés algébriques qui admettent des connexions affines holomorphes sont les variétés abéliennes et dans ce cas $\mathcal{G}$ contient les translations et est de dimension au moins n. Rappelons que les variétés de dimension algébrique maximale ont été étudiées par Moishezon qui a montré qu'elles s'obtiennent à partir d'une variété algébrique, par un nombre fini d'éclatements de centres lisses. Nous pensons que parmi ces variétés, seules les variétés abéliennes possèdent des connexions affines holomorphes.

Pour ce qui est des connexions projectives holomorphes, nous formulons une version holomorphe de la conjecture de Lichnerowicz projective :

Conjecture 4 *Si la variété complexe compacte M possède une connexion projective holomorphe (normale) ϕ, mais aucune connexion affine holomorphe (sans torsion), alors ϕ est plate.*

Le théorème 5.11 répond positivement à la conjecture précédente, dans le cas des surfaces.

Répondre à la question 2 serait un pas vers la classification des variétés complexes compactes admettant des connexions affines holomorphes. Dans un premier temps une hypothèse raisonnable serait de supposer que M est simplement connexe et d'obtenir, grâce à la propriété de prolongement des champs de Killing locaux, l'existence d'un groupe d'isométries de dimension strictement positive. Dans ce contexte nous pensons que le résultat suivant est vrai :

Conjecture 5 *(i) Une variété complexe compacte simplement connexe M n'admet aucune connexion affine holomorphe.*

(ii) Une variété complexe compacte connexe simplement connexe M possèdant une connexion projective holomorphe est projectivement équivalente à l'espace projectif de même dimension, muni de sa structure standard.

Mentionnons que le point (i) de la conjecture précédente est vérifié pour les connexions affines localement homogènes, localement modelées sur un espace homogène G/I. En effet, dans ce cas, la simple connexité implique que l'application développante est un biholomorphisme entre M et G/I. Il vient que M est le quotient du groupe de Lie G par un sous-groupe *parabolique* I. Or, aucun de ces quotients ne possèdent des connexions affines holomorphes (G-invariantes) (voir, par exemple, [62]).

Précisons également que le point (ii) de la conjecture 5 est un cas particulier de la conjecture 4. En effet, si la connexion projective est supposée plate, son application développante est un biholomorphisme (projectif) entre M et l'espace projectif standard de même dimension.

Références

[1] *A. Amores*, Vector fields of a finite type G-structure, J. Differential Geom., **14(1)**, 1979, 1-6.

[2] *G. D'Ambra*, Isometry groups of Lorentz manifolds, Invent. Math., **92**, (1988), 555-565.

[3] *G. D'Ambra, M. Gromov*, Lectures on transformations groups : geometry and dynamics, Surveys in Differential Geometry (Cambridge), (1990), 19-111.

[4] *M. Babillot, R. Feres, A. Zeghib*, Rigidité, Groupe fondamental et Dynamique, (P. Foulon Ed.), Panoramas et Synthèses, **13**, (2002).

[5] *W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van De Ven*, Compact complex surfaces, Ergebnisse der Mathematik, vol 4, Second Edition, Springer.

[6] *A. Beauville* , Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle, J. Differential Geom., **18**, (1983), 755-782.

[7] *Y. Benoist* , Orbites des structures rigides (d'après M. Gromov), Feuilletages et systèmes intégrables (Montpellier, 1995), Birkhäuser Boston, (1997), 1-17.

[8] *Y. Benoist*, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, Annals of Mathematics, **144**, (1996), 315-347.

[9] *Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie*, Flots d'Anosov à distributions stables et instables différentiables, Jour. Amer. Math. Soc., **5**, (1992), 33-74.

[10] *Y. Benoist, F. Labourie*, Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes, Publ. Math. I.H.E.S., **76**, (1992), 99-109.

[11] *I. Biswas, B. McKay*, Holomorphic Cartan geometries and Calabi-Yau manifolds, Arxiv.

[12] *F. Bogomolov*, Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties, Math. USSR Izvestija, **13(3)**, (1979), 499-555.

[13] *F. Bogomolov*, Classification of surfaces of class VII_0 with $b_2 = 0$, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math., **40(2)**, (1976), 273-288.

[14] *E. Calabi, L. Markus*, Relativistic space forms, Ann. of Math., **75**, (1962), 63-76.

[15] *A. Candel, R. Quiroga-Barranco*, Gromov's centralizer theorem, Geom. Dedicata **100**, (2003), 123-155.

[16] *Y. Carrière*, Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines, Invent. Math., **95**, (1989), 615-628.

[17] *S. Dumitrescu*, Meromorphic almost rigid geometric structures, à paraître dans les Actes du Colloque à l'honneur de R. Zimmer, Chicago Univ. Press.

[18] *S. Dumitrescu*, Connexions affines et projectives sur les surfaces complexes compactes, à paraître dans Mathematische Zeitschrift.

[19] *S. Dumitrescu*, Killing fields for holomorphic Cartan geometries, à paraître dans Monatshefte fur Mathematik.

[20] *S. Dumitrescu*, Métriques riemanniennes holomorphes en petite dimension, Ann. Instit. Fourier, Grenoble, **51(6)**, (2001), 1663-1690.

[21] *S. Dumitrescu* , Structures géométriques holomorphes sur les variétés complexes compactes, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **34(4)**, (2001), 557-571.

[22] *S. Dumitrescu*, Homogénéité locale pour les métriques riemanniennes holomorphes en dimension 3, Ann. Instit. Fourier, Grenoble, **57(3)**, (2007), 739-773.

[23] *S. Dumitrescu, A. Zeghib*, Global rigidity of holomorphic Riemannian metrics on compact complex 3-manifolds, Math. Ann., **345**, (2009), 53-81.

[24] *C. Ehresmann*, Sur les espaces localement homogènes, Enseignement Math., p. 317, (1936).

[25] *C. Ehresmann*, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950).

[26] *R. Feres*, Rigid geometric structures and actions of semisimple Lie groups, Rigidité, groupe fondamental et dynamique, Panorama et synthèses, **13**, Soc. Math. France, Paris, (2002).

[27] *W. Fulton, J. Harris*, Representation Theory, Springer-Verlag, (1991).

[28] *D. Fried, W. Goldman*, Three-dimensional affine crystallographic groups, Adv. Math., **47(1)**, (1983), 1-49.

[29] *E. Ghys*, Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbf{C})$, J. reine angew. Math., **468**, (1995), 113-138.

[30] *E. Ghys, J. Rebelo*, Singularités des flots holomorphes II, Ann. Inst. Fourier, **47**, (1997), 1117-1174.

[31] *W. Goldman*, Nonstandard Lorentz space forms, J. Differential Geom.,**21(2)**, (1985), 301-308.

[32] *W. Goldman, Y. Kamishima*, The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic, J. Differential Geom., **19(1)**, (1984), 233-240.

[33] *X. Gómez-Mont*, Universal families of foliationes by curves, Singularités d'équations différentielles, Astérisque, **150-151**, (1987), 109-129.

[34] *P. Griffiths, J. Harris*, Principles of Algebraic Geometry, Wiley Classics Library, (1994).

[35] *M. Gromov*, Rigid transformation groups, Géométrie Différentielle, (D. Bernard et Choquet-Bruhat Ed.), Travaux en cours, Hermann, Paris, **33**, (1988), 65-141.

[36] *A. Guillot*, Semicompleteness of homogeneous quadratic vector fields, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **56(5)**, (2006), 1583–1615.

[37] *A. Guillot*, Sur les équations d'Halphen et les actions de $SL(2, \mathbf{C})$, Publ. I.H.E.S., **105**, (2007), 221-294.

[38] *R. Gunning*, Lectures on Riemann surfaces, Princeton Mathematical Notes, (1966).

[39] *L. Haine*, The algebraic complete integrability of geodesic flow on $SO(N)$, Commun. Math. Phys., **94(2)**, 271-287

[40] *J. Humpreys*, Linear Algebraic Groups, Springer-Verlag.

[41] *J-M. Hwang, N. Mok*, Uniruled projective manifolds with irreducible reductive G-structure, J. Reine Angew. Math., **490**, (1997), 55-64.

[42] *M. Inoue*, On surfaces of class VII_0, Invent. Math., **24**, (1974), 269-310.

[43] *M. Inoue, S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic affine connections on compact complex surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **27(2)**, (1980), 247-264.

[44] *P. Jahnke, I. Radloff*, Threefolds with holomorphic normal projective connections, Math. Ann., **329(3)**, (2004), 379–400.

[45] *A. Kirilov*, Eléments de la théorie des représentations, M.I.R., (1974).

[46] *B. Klingler*, Structures affines et projectives sur les surfaces complexes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble,**48(2)**, (1998), 441-477.

[47] *B. Klingler*, Un théorème de rigidité non-métrique pour les variétés localement symétriques hermitiennes, Comm. Math. Helv., **76(2)**, (2001), 200-217.

[48] *S. Kobayashi*, Transformation groupes in differential geometry, Springer-Verlag, (1972).

[49] *S. Kobayashi, T. Nagano*, On projective connections, J. Math. and Mechanics, **13**, (1964), 215-236.

[50] *S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic structures modeled after hyperquadrics, Tôhoku Math. J., **34**, (1982), 587-629.

[51] *S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic projective structures on compact complex surfaces, Math. Ann., **249**, (1980), 75-94.

[52] *S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic projective structures on compact complex surfaces II, Math. Ann., **255**, (1981), 519-521.

[53] *S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic structures modeled after compact hermitian symmetric spaces, in Manifolds and Lie groups (J. Coates, S. Helgason), Progress in Math., **14**, Birkhauser, (1981), 207-222.

[54] *T. Kobayashi, T. Yoshino*, Compact Clifford-Klein form of symmetric spaces -revisited, Pure Appl. Math. Q., **1(3)**, (2005), 591-663.

[55] *F. Labourie*, Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts, Symposia Mathematica (en l'honneur d'Eugenio Calabi), (1996), 267-283.

[56] *C. Lebrun*, Spaces of complex null geodesics in complex-Riemannian geometry, Trans. Amer. Math. Soc., **278**, (1983), 209-231.

[57] *C. Lebrun*, $\mathcal{H}$-spaces with a cosmological constant, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **380(1778)**, (1982), 171-185.

[58] *S. Lojasiewicz*, Sur les ensembles semialgébriques, Sympos. Math. 3, Ist. Naz. Alta Matem., **233**, (1970).

[59] *K. Maehara*, On elliptic surfaces whose first Betti numbers are odd, Intl. Symp. on Alg. Geom., Kyoto, (1977), 565-574.

[60] *V. Matveev*, Proof of the projective Lichnerowicz-Obata conjecture, J. Diff. Geom., **75(3)**, (2007), 459-502.

[61] *B. McKay*, Characteristic forms of complex Cartan geometries, arXiv math. DG/0704.2555.

[62] *B. McKay*, Rational curves and parabolic geometries, arXiv math. DG/0603276.

[63] *B. McKay*, Complete projective connections, arXiv math. DG/0504082.

[64] *G. Mess*, Lorentz spacetimes of constant curvature, preprint IHES/M/90/28, (1990).

[65] *J. Milnor*, Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups, Adv. in Math., **21**, (1976), 293-329.

[66] *N. Mok, S. Yeung*, Geometric realizations of uniformization of conjugates of hermitian locally symmetric manifolds, Complex Analysis and Geometry, ed. V. Ancona, A. Silva, New York, Plenum Press, (1992), 253-270.

[67] *R. Molzon, K. Mortensen*, The Schwarzian derivative for maps between manifolds with complex projective connections, Trans. Amer.Math. Soc., **348(8)**, (1996), 3015-3036.

[68] *G. Mostow*, The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, Ann. of Math., **52(2)**, (1950), 606-636.

[69] *D. Mumford*, Introduction to Algebraic Geometry, Harvard University.

[70] *K. Nomizu*, On local and global existence of Killing vector fields, Ann. of Math. (2), **72**, (1960), 105-120.

[71] *P. Olver*, Equivalence, invariants and symmetry, Cambridge Univ. Press, (1995).

[72] *V. Popov, E. Vinberg*, Invariant theory, Algebraic Geometry 4, Ed. I. Shafarevich, A. Parshin, E.M.S., **55**, (1991), 123-280.

[73] *J. Priska, I. Radloff*, Projective threefolds with holomorphic conformal structure, Internat. J. Math., **16(6)**, (2005), 595-607.

[74] *J. Rebelo*, Singularités des flots holomorphes, Ann. Inst. Fourier, **46**, (1996), 411-428.

[75] *P. Scott*, The Geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc., **15**, (1983), 401-487.

[76] *R. Sharpe*, Differential Geometry, Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program, Springer, (1997).

[77] *T. Suwa*, Compact quotient spaces of $\mathbf{C}^2$ by affine transformation groups, J. Diff. Geom. **10**, (1975), 239-252.

[78] *W. Thurston*, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. of Amer. Math. Soc., **6(3)**, (1982), 357-381.

[79] *W. Thurston*, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton University Press, (1983).

[80] Le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann, Retour sur un théorème centenaire, Livre (en collaboration), à paraître chez ENS Editions.

[81] *A. Vitter*, Affine structures on compact complex manifolds, Invent. Math., **17**, (1972), 231-244.

[82] *H. Wang*, Complex parallelisable manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, (1954), 771-776.

[83] *J. Wolf*, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill Series in Higher Math., (1967).

[84] *A. Zeghib*, On Gromov's theory of rigid transformation groups : A dual approach, Ergod. Th. Dyn. Syst., **20(3)**, (2000), 935-946.

Mots-clés : structures géométriques rigides -variétés complexes-champs de Killing locaux.

Classification math. : 53B21, 53B30, 53C56, 53A55.

Sorin Dumitrescu

Département de Mathématiques d'Orsay, Bat. 425

Univ. Paris-Sud (11)

91405 Orsay Cedex

France

Sorin.Dumitrescu@math.u-psud.fr