Université de Nice **Option Maths**
L1 **1er semestre 2011/2012**

Autour de la diagonale de Cantor

1 Introduction

Le but de cette feuille est de voir comment notre intution peut être rapidement mise en défaut lorsque l'on manipule des ensembles infinis. Nous allons plus particulièrement nous intéresser à la notion de "taille" d'un ensemble. Pour un ensemble fini, la "taille" est parfaitement déterminée par un nombre entier : le nombre d'éléments de l'ensemble. On appelle ce nombre le cardinal de l'ensemble. On peut raisonnablement dire que deux ensembles sont de même taille si et seulement si ils ont même cardinal. En revanche, notre vocabulaire devient un peu flou lorsque l'on manipule des ensembles infinis, tels que $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ etc... Tous ces ensembles ont "une infinité d'éléments". Serait-ce donc que tous les ensembles infinis ont la même taille ? Sur ce point, deux arguments contradictoires, et qui paraissent pourtant " de bon sens", sont souvent avancés. Le premier est *"ben oui ! deux ensembles infinis ont le même nombre d'éléments : une infinité tous les deux."* Le second est *"ben non ! Tous les ensembles infinis n'ont pas la même taille. La preuve, il suffit d'en prendre un et de lui rajouter plein de nouveaux éléments pour obtenir un ensemble plus gros".* Nous allons essayer de voir qu'en fait, aucun de ces deux raisonnements n'est correct. Il faut préciser qu'il a fallu attendre la fin du 19ème siècle et les travaux du mathématicien Georg Cantor (1845-1918) pour clarifier toutes ces notions, et lorsque ces travaux ont vu le jour, ils ont sucité de vives polémiques (ce qui est plutôt rare en mathématiques). C'est dire si les conclusions de Cantor étaient, comme vous allez sans doute vous en apercevoir, révolutionaires et peu intuitives. Pour une biographie de Cantor, consultez par exemple le site http ://www.bibmath.net/bios/ (ce site recense les biographies de nombreux mathématiciens. Il vous suffit de cliquer "Cantor").

Jusq'ici, on a souvent utilisé des guillemets pour parler de "taille" d'un ensemble. Notre première tâche va donc être d'essayer de trouver une définition d'ensembles de même taille. On propose la définition suivante :

Définition : *deux ensembles E et E' sont de même taille si et seulement si il existe une bijection f entre E et E'.*

Question 1 *Expliquez en quoi cette définition est une bonne définition.*

De même expliquez pourquoi on a envie de donner la définition suivante :

Définition : *Un ensemble E est dit "plus gros" qu'un ensemble E' s'il existe une surjection de E sur E'.*

Remarquez que cette notion de "plus gros" est à prendre au sens large : le fait, pour E, d'être plus gros que E', n'exclue pas que E et E' soient de même taille (de même que sur les réels, $x \geq y$ n'exclue pas $x = y$). Par contre, si E est plus gros que E' et qu'il n'existe aucune bijection entre E et E', on dira que E est *strictement plus gros* que E'.

2 Prélude : les ensembles finis

On considère $E = \{a_1, a_2, , ..., a_n\}$ un ensemble fini.

Question 2 *On rajoute à E un élément a_{n+1} qui n'est pas dans E, afin d'obtenir un nouvel ensemble E'. Est-il possible que E' soit en bijection avec E ?*

Dans le même ordre d'idée, quelle vous semble être la réponse à la

Question 3 *Si F est un sous-ensemble strict de E, est-il possible que F et E soient en bijection ?*

3 L'hôtel de Hilbert

David Hilbert (1862-1943) est sans doute l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Vous pouvez trouver des détails sur sa biographie et son oeuvre mathématique sur le site http ://www.bibmath.net/bios/ (cliquer "Hilbert"). Il proposa la petite énigme suivante (que je vous rapporte légèrement modifiée...), faisant apparaître quelques propriétés surprenantes des ensembles infinis.

Mr Hilbert, bien que grand mathématicien, travaille dans l'hôtellerie à ses heures perdues. Son hôtel, sur la place principale de Göttingen, est toutefois d'un type très particulier : il possède une infinité de chambres, numérotées $1, 2, ..., n,$ .... (comme dans tout autre hôtel). De plus, la discipline y est extrêmement stricte. Les chambres sont simples, et il est hors de question que deux personnes occupent la même. Aujourd'hui, Mr Hilbert est particulièrement heureux : son hôtel affiche complet. Mais sa quiétude est de courte durée, car un nouveau client vient frapper à la porte, demandant une chambre. Mr Hilbert n'a pas le coeur de le laisser à la rue, pas plus que d'expulser l'un des actuels clients pour faire une place au nouveau venu. Ayant déjà résolu des problèmes bien plus difficiles (voir les références données plus haut !), Mr Hilbert se gratte la tête quelques secondes, puis saisit le téléphone et env oie un message simultané à tous les pensionnaires. L'effet ne se fait pas attendre ; quelques minutes plus tard, la chambre numéro 1 est vide, tous les anciens pensionaires ont une chambre, et le nouveau venu peut donc s'installer. Essayez de retrouver quelle consigne Mr Hilbert a bien pu donner aux pensionnaires pour réaliser ce tour de force.

Au vu de ces réflexions, trouver une réponse à la

Question 4 *L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est-il en bijection avec $\mathbb{N} \cup \{-1\}$?*

Comparer votre réponse avec celle de la question 2 !

Forts de ces enseignements, voici les

Question 5 *L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres pairs est-il en bijection avec $\mathbb{N}$?*

Comparer votre réponse avec celle que vous avez donnée à la question 3....

Question 6 *L'ensemble $\mathcal{I}$ des nombres impairs est-il en bijection avec $\mathbb{N}$?*

Quelques minutes après l'installation du nouveau venu, Mr Hilbert est confronté à un nouveau problème. Un car de touristes vient de stationner devant l'hôtel et une infinité de personnes en descend. Tous veulent une chambre pour la nuit, ils ont l'air très menaçants.... En utilisant (si vous le souhaitez) vos réponses aux deux questions précédentes, essayer de trouver une solution à cette nouvelle situation.

Conclusion : Le fait de rajouter une infinité d'éléments à $\mathbb{N}$ suffit-il pour obtenir un ensemble strictement plus gros que $\mathbb{N}$? À ce stade de la feuille, on vous demande un pronostic : pensez-vous qu'il est possible de construire un ensemble strictement plus gros que $\mathbb{N}$ ou bien est-ce impossible ?

4 Cantor à la rescousse

Revenons un instant aux ensembles finis. Soit $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble à n éléments. On va décrire un moyen de coder n'importe quelle partie A de E. À une partie A, on va associer le $n-$uplet $V_A = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$, où chaque ϵ_i peut prendre pour valeur 0 ou 1 : ϵ_i vaut 0 si $a_i \notin A$ et ϵ_i vaut 1 si $a_i \in A$.

Question 7 *Énumérez toutes les parties de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ et pour chacune d'elle, indiquez le triplet qui lui est associé par le procédé de codage précédent.*

Question 8 *On considère à nouveau un ensemble $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et on appelle $P(E)$ l'ensemble de ses parties. Montrer que l'application qui à $A \in P(E)$ associe V_A est une bijection de $P(E)$ sur l'ensemble des n-uplets à valeurs dans $\{0, 1\}$.*

On va maintenant généraliser ce procédé de codage à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On note $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$. Une telle suite est la donnée d'une famille $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$, chaque ϵ_i valant 0 ou 1.

Question 9 *En vous inspirant de ce qui a été fait ci-dessus, expliquer comment il est possible d'associer à toute partie $A \in P(\mathbb{N})$ une unique suite V_A de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Pouvez-vous expliciter la suite qui code la partie A constituée des nombres pairs ? Des nombres impairs ? Des multiples de 3 ?*

Question 10 *Soit n un entier naturel. Donner la suite qui code le singleton $\{n\}$. En déduire qu'il existe une surjection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$.*

Par la question précédente, on sait que l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est plus gros que $\mathbb{N}$. La question qui nous brûle les lèvres est de savoir s'il est strictement plus gros ! C'est ce qui nous amène au résultat de Cantor, qui s'énonce comme suit :

Théorème : *Il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{N}$ et $P(\mathbb{N})$*

On va faire la démonstration en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'une telle bijection existe ; on la note f.
$f(0)$ est une partie de $\mathbb{N}$. Elle peut être codée (de manière unique) comme ci-dessus en une suite $(\epsilon_i^{(0)})_{i\in\mathbb{N}}$. De même $f(1)$ est une partie de $\mathbb{N}$. On la code sous la forme $(\epsilon_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}$. Pour n quelconque la partie de $\mathbb{N}$ donnée par $f(n)$ est codée par $(\epsilon_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$.

Pour un ϵ de $\{0, 1\}$, on note $\overline{\epsilon}$ l'élément de $\{0, 1\}$ qui vaut 0 si $\epsilon = 1$ et 1 si $\epsilon = 0$. On appelle $\overline{V}$ la suite de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ donnée par $(\overline{\epsilon_i^{(i)}})$.

Question 11 *La suite $\overline{V}$ code-t-elle $f(0)$? Code-t-elle $f(1)$? Montrer qu'en fait $\overline{V}$ ne peut coder aucune des parties $f(n)$, et ce pour aucun n de $\mathbb{N}$. Expliquer pourquoi cela prouve que f ne peut pas être une bijection, et que l'on aboutit donc à une contradiction.*

Question 12 *On imagine un tableau (infini) où l'on met en i-ième ligne et j-ième colonne le nombre $\epsilon_i^{(j)}$. Vérifier que la "zéro-ième" ligne du tableau est exactement la suite qui code $f(0)$, la première ligne celle qui code $f(1)$ et ainsi de suite. Vérifier que la suite $\overline{V}$ s'obtient en prenant la diagonale du tableau, et en remplaçant les 0 par des 1 et les 1 par des 0. C'est ce qui explique le nom de* **diagonale de Cantor***, que l'on a attribué au procédé de construction de $\overline{V}$.*

Remarque : *En fait, il est possible de montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Nous venons donc de montrer que l'ensemble des nombres réels est strictement plus gros que l'ensemble des entiers naturels.*

5 Pour aller plus loin

En fait cantor a démontré un résultat plus général :

Théorème : *Soit E un ensemble quelconque. Il n'existe aucune surjection de E sur $P(E)$.*

Là encore, la démonstration se fait par l'absurde. Supposons qu'une telle surjection existe, et notons-là f. On définit alors une partie $\overline{A}$ de E de la manière suivante $\overline{A} = \{x \in E / x \notin f(x)\}$.

Question 13 *Montrer que pour aucun x de E on ne peut avoir $\overline{A} = f(x)$. On raisonnera par l'absurde : si on avait $\overline{A} = f(x)$, pourrait-on avoir $x \in \overline{A}$? $x \notin \overline{A}$? Conclure.*

Question 14 *Montrer qu'en revanche il existe toujours une surjection de $P(E)$ sur E. conclure que $P(E)$ est toujours strictement plus gros que E.*

Question 15 *(pour les motivés !) Montrer que le théorème de Cantor énoncé ci-dessus a la conséquence inattendue suivante : il ne peut pas exister un ensemble de tous les ensembles !*

6 Conclusion

Au vu de ce qui précède, essayez de dresser un bilan de ce que vous avez appris. Quelles sont les propriétés que vous pensiez vraies et qui se sont avérées fausses ? En particulier, pensez-vous que tous les ensembles infinis ont la même "taille", ou y en a-t-il de strictement plus gros que d'autres ? Existe-t-il un ensemble qui soit plus gros que tous les autres ?