Université de Nice-Sophia Antipolis
Mémoire de Master 1 de Mathématiques
Année 2006-2007

Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Equations Différentielles

Auteurs : Clémence MINAZZO - Kelsey RIDER
Responsable : Erwann AUBRY

Table des matières

Notations

- $B(x_0, r)$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r
- $B_f(x_0, r)$ est la boule fermée centrée en x_0 et de rayon r
- $\mathring{K}$ est l'intérieur de K
- $\overline{A}$ est l'adhérence de A
- $S(x_0, r)$ est la sphère de centre x_0 et de rayon r
- $\mathcal{C}^0(E, F)$ est l'ensemble des fonctions continues de E dans F
- $\mathcal{C}_b^0(E, F)$ est l'ensemble des fonctions continues et bornées de E dans F

1 Introduction

Dans ce rapport, on étudie les théorèmes du point fixe de Picard et de Schauder, et quelques unes de leurs applications (aux équations différentielles et au problème d'inversion locale). Etant donnés un ensemble E et une application $f : E \to E$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles f admet un point fixe dans E. Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car il y a plusieurs applications, par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles.

Le Théorème du Point Fixe de Picard dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le Théorème du Point Fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est pas donc nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le Théorème de Picard (par exemple, l'identité). Par contre, ce théorème ne donne aucun des avantages du théorème précédent.

On applique dans ce rapport ces théorèmes au Problème de Cauchy : étant données une condition initiale (x_0, t_0) et une équation différentielle $\frac{d}{dt}x = f(x,t)$, existe-il une solution, et est-elle unique ? Les réponses à ces questions sont données par le théorème de Cauchy-Lipschitz (si f est localement Lipschitzienne) et de Cauchy-Arzela (si f est seulement continue). On retrouve que ces comportements différents résultent des différences entre les théorèmes du point fixe de Picard et de Schauder.

Une autre application du Théorème de Picard dans ce rapport est la démonstration du Théorème d'Inversion Locale. En effet, on montre qu'une certaine fonction est une bijection en utilisant le Théorème de Picard pour montrer l'existence (surjectivité) et l'unicité (injectivitié) d'un point fixe. Dans ce cas, il était possible de construire une contraction ; par contre, on ne pourrait pas appliquer le Théorème de Schauder car on a besoin de l'unicité.

2 Le premier théorème du point fixe

2.1 Un Théorème du Point Fixe Métrique

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 1 (Picard)**.** *Soient (E,d) un espace métrique complet et $\varphi : E \to E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$.*
Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pout tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} := \varphi(x_p)$ converge vers a. [1]

Démonstration. On montre d'abord l'unicité d'un point fixe, puis son existence.

1. Unicité : Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$, tels qu'on ait $\varphi(a) = a$ et $\varphi(b) = b$.
   Alors on a $d(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a,b)$ et donc $\frac{d(\varphi(a),\varphi(b))}{d(a,b)} = 1 > k$ ce qui contredit le fait que f soit k-Lipschitzienne.

2. Existence : Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a $d(x_p, x_{p+1}) = d(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p)$. On va montrer par récurrence sur p que $d(x_p, x_{p+1}) \leqslant k^p d(x_0, x_1)$ (P) :
   – Initialisation : Evident pour $p = 0$.
   – Généralisation : supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait la propriété (P). Alors
   $$\begin{aligned} d(x_{p+1}, x_{p+2}) &= d(\varphi(x_p), \varphi(x_{p+1})) \\ &\leq kd(x_p, x_{p+1}) \\ &\leq k \cdot k^p d(x_0, x_1) \\ &\leq k^{p+1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$
   ce qui achève la récurrence.

   On a alors $\forall q > p$:
   $$d(x_p, x_q) \leq \sum_{l=p}^{q-1} d(x_l, x_{l-1}) \leq \left(\sum_{l=p}^{q-1} k^l \right) d(x_0, x_1)$$
   De plus, pour tout $p > q$, $\sum_{l=p}^{q-1} k^l \leq \sum_{l=p}^{\infty} k^l = \frac{k^p}{1-k}$, d'où $d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1)$. On en déduit alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$. De plus on a $\varphi(x_p) \to \varphi(a)$ quand $p \to +\infty$ car φ est continue et $\varphi(x_p) = x_{p+1}$. Or $x_{p+1} \to a$ quand $p \to +\infty$, d'où par unicité de la limite on a $\varphi(a) = a$.

$\square$

Contre-exemples. Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1. X n'est pas stable par f : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, 1]$.
   Or X est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x \in X} |f'(x)| < 1 \Rightarrow f$ est contractante. Mais f n'a pas de point fixe car $f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}]$, i.e. X n'est pas stable par f.
2. f n'est pas contractante : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, \infty[$.
   Or $f : X \to X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet. Mais $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.
3. X n'est pas complet : $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ sur $X =]0, \frac{\Pi}{4}]$.
   Or $f(]0, \frac{\Pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\Pi}{4}]$, et $\sup_{x \in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$; donc, f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc pas complet.

2.2 Le Théorème de Cauchy-Lipschitz

Ce théorème est une application du théorème 2.1. En effet, nous verrons qu'une façon de le démontrer est d'appliquer le théorème précédent avec E un ensemble de fonctions et φ une application bien choisie.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On introduit le problème de Cauchy (C) suivant :
Etant donné $(t_0, y_0) \in U$, trouver une solution $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle (E) $y' = f(t, y), (t, y) \in U$ telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

Définition 1. *Soient $T > 0$ et $r_0 > 0$. On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un **cylindre de sécurité** pour (C) si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $B_f(y_0, r_0)$.*

Définition 2. *f est **localement Lipschitzienne** par rapport à la variable y sur U si $\forall (r_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage V de (r_0, y_0) dans U et une constante $k = k(V)$ telle que $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in V$, on ait $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.*

Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz). *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport à y sur U, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$, le problème de Cauchy admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$.*
De plus, si on pose $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la suite itérée $\Phi^p(z)$ converge uniformément vers la solution exacte. [1]

Démonstration. On commence par construire un cylindre de sécurité pour (C).

Soit V un voisinage de (t_0, y_0) sur lequel f est k-Lipschitzienne par rapport à y, et soient $T_0 > 0$ et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_0, r_0) \subset V$ un cylindre. C_0 est un fermé borné de $\mathbb{R}^{m+1}$ donc compact, et on en déduit alors que f est bornée sur C_0.

Soit $M = sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y(t))\|$. On pose $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$. On va montrer que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (C).

Soit $y : I \subset [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \to \mathbb{R}^m$ avec $y(t_0) = y_0$ et $y' = f(t, y)$ $\forall t \in I$. Supposons qu'il existe $\tau \in [t_0, t_0 + T[$ tel que $y(\tau)$ n'appartient pas à $B_f(y_0, r_0)$. De plus, supposons que $J = \{t \in [t_0, t_o + T[\, : y(t) \notin B_f(y_0, r_0)\}$ soit non vide. On pose $\tau = \inf J$. Alors $\forall t \in [t_0, \tau[$ on a $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$, et de plus $d(y_0, y(\tau)) = r_0$. Comme $(t, y(t)) \in C_0$, $\forall t \in [t_0, \tau]$ et $y' = f(t, y)$ on a, par le Théorème des Accroisements Finis,

$$r_0 = \|y_0 - y(\tau)\| = \|y(t_0) - y(\tau)\| \leq |t_0 - \tau| \sup_{t \in [t_0, \tau]} |y'(t)| < M \cdot T \leq r_0.$$

Donc par passage à la limite ($B_f(y_0, r_0)$ étant fermé) on a $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$ $\forall t \in [t_0, t_0 + T] \cap I$. De même on montre que $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$ $\forall t \in [t_0 - T, t_0] \cap I$ et donc $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$ $\forall t \in I$.

Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. On remarque que par construction on a $\sup_C |f| = M$ et f est k-Lipschitzienne par rapport à y sur C. On note $F = \mathcal{C}^0([t_0 - T, t_0 + T], B(y_0, r_0))$ muni de la distance $d = \|.\|_\infty$.

$\forall y \in F$ on associe $\Phi(y)$ définie par :

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\mathrm{d}u$$

On montre d'abord l'équivalence suivante : *y est solution de (E) $\Leftrightarrow$ y est un point fixe de Φ* :

($\Leftarrow$) Supposons que y est un point fixe de Φ. Alors $\forall y \in F$ on a $\Phi(y) = y$ d'où $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\mathrm{d}u$. Or f est continue sur U donc y est continue sur U. De plus, y est dérivable sur $[T_0 - t, T_0 + t]$ et sa dérivée égale $f(t, y(t))$, i.e. $y'(t) = f(t, y(t))$. On a aussi $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(u, y(u))\mathrm{d}u = y_0$. Donc f est solution du problème de Cauchy (C).

($\Rightarrow$) Supposons maintenant que y est solution de (E). On a alors $y'(t) = f(t, y(t))$ et $y(t_0) = y_0$. On peut intégrer y' par rapport à u car $y'(u) = f(u, y(u))$ et $u \mapsto f(u, y(u))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce même segment. Alors on obtient :

$$\int_{t_0}^t y'(u)\mathrm{d}u = \int_{t_0}^t f(u, y(u))\mathrm{d}u = [y(u)]_{u=t_0}^{u=t} = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0$$

Donc, on a bien $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\mathrm{d}u = \Phi(y)(t)$ et donc y est point fixe de Φ.

On veut appliquer le théorème du point fixe à Φ^p (pour p bien choisi).

1. On montre d'abord que Φ est une application de F dans F. Pour cela on montre que $\Phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$ $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Soit $y \in F$. On remarque que si $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned}\|\Phi(y)(t) - y_0\| &= \| \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u \| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(u, y(u))\|\mathrm{d}u \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq M \cdot T \leq r_0\end{aligned}$$

   Donc $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\Phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$ d'où $\Phi(y) \in F$ et on a évidemment la stabilité de F par Φ^p.

2. On montre maintenant que Φ^p est contractante. Soient $y, z \in F$. On note $y_p = \Phi^p(y)$ et $z_p = \Phi^p(z)$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence sur p on montre qu'on a :

$$\|y_p(t) - z_p(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(y, z) \qquad \text{(HR)}$$

   – Initialisation : C'est évident dans le cas $p = 0$.
   – Généralisation : Supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait (HR). Alors

$$\begin{aligned}\|y_{p+1}(t) - z_{p+1}(t)\| &\leq | \int_{t_0}^{t} k\|y_p(u) - z_p(u)\|\mathrm{d}u | \\ &\leq | \int_{t_0}^{t} k.k^p \frac{|u - t_0|^p}{p!} d(y, z)\mathrm{d}u | \text{ (par (HR))} \\ &\leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) | \int_{t_0}^{t} |u - t_0|^p \mathrm{d}u | \\ &= \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) | \left[\frac{|u - t_0|^{p+1}}{p + 1} \right]_{u=t_0}^{u=t} | = k^{p+1} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p + 1)!} d(y, z)\end{aligned}$$

   ce qui achève la récurrence.

   Comme $|t - t_0| \leq T$, on a $d(y_p, z_p(t)) \leq k^p \frac{T^p}{p!} d(y, z)$, donc Φ est lipschitzienne de rapport $k^p \frac{T^p}{p!}$. Et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$ (car $\lim_{p \to +\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$). Donc, pour $q \geq p$, Φ^q est contractante.

3. Le théorème 12 nous donne la complétude de F.

On déduit du théorème 2.1 que Φ^q admet un unique point fixe y. De plus $\Phi^q(\Phi(y)) = \Phi(\Phi^q(y)) = \Phi(y)$ donc $\Phi(y)$ est un point fixe de Φ^q, et par unicité du point fixe de Φ^q on a $\Phi(y) = y$. Comme les points fixes de Φ sont des points fixes de Φ^q on en déduit que y est l'unique point fixe de Φ. Finalement, y est l'unique solution de (E). □

2.3 Exemple

$y' = 3|y|^{2/3}$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On veut déterminer l'ensemble des solutions maximales. On a $f(t,y) = 3|y|^{2/3}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et différentiable sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. De plus on a $\frac{\partial f}{\partial y} = signe(y) \times 2|y|^{-1/3}$, pour $y \neq 0$. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est donc continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. La fonction f est localement Lipschitzienne en y sur $\{y > 0\}$ et $\{y < 0\}$, mais elle ne l'est pas au voisinage des points $(t_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Soit $(y,]A, B[)$ une solution dans $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $y' \geq 0$, donc y est croissante. On note

$$a := \inf\{t \in]A, B[: \ y(t) = 0\}, \quad b = \sup\{t \in]A, B[: \ y(t) = 0\}.$$

Si $a \neq A$, on a $y(a) = 0$ et $y(t) < 0$ pour $t < a$. Donc, sur l'intervalle $]A, a[$, l'équation différentielle est équivalente à $\frac{1}{3}y'(+y)^{-2/3} = 1$, d'où $y^{1/3}(t) - y^{1/3}(a) = t - a$, et alors $y(t) = (t-a)^3$. De même $y(t) = (t-b)^3$ pour $t > b$ si $b \neq B$.
On en déduit que si $y_0 < 0$ alors pour tout $b \in [t_0 - y_0^{1/3}, +infty[$, la fonction

$$\begin{aligned} y_b : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} (t - t_0 + y_0^{1/3})^3 & \text{si} \quad t \leq t_0 - y_0^{1/3} \\ 0 & \text{si} \quad t_0 - y_0^{1/3} \leq t \leq b \\ (t-b)^3 & \text{si} \quad t \geq b \end{cases} \end{aligned}$$

est une solution (nécessairement maximale) de l'équation $y' = 3|y|^{2/3}$ et on obtient ainsi toutes les solutions maximales du problème de Cauchy associées à (t_0, y_0) (pour $y_0 < 0$).
De même, si $y_0 > 0$ alors les solutions maximales du problème de Cauchy associées à (t_0, y_0) sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} y_b : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} (t-a)^3 & \text{si} \quad t \leq a \\ 0 & \text{si} \quad a \leq t \leq t_0 - y_0^{1/3} \\ (t - t_0 + y_0^{1/3})^3 & \text{si} \quad t \geq t_0 - y_0^{1/3} \end{cases} \end{aligned}$$

pour tout $a \in]-\infty, t_0 - y_0^{1/3}]$.

Si $y_0 = 0$ alors les solutions maximales associées à $(t_0, 0)$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} y_b : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} (t-a)^3 & \text{si} \quad t \leq a \\ 0 & \text{si} \quad a \leq t \leq b \\ (t-b)^3 & \text{si} \quad t \geq b \end{cases} \end{aligned}$$

pour tout $a \in]-\infty, t_0]$ et tout $b \in [t_0, +\infty[$.

On constate sur cet exemple que la condition Lipschitzienne suf f est nécessaire pour avoir l'unicité locale dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans cet exemple on a pas l'unicité globale des solutions du problème de Cauchy. Ceci est dû au fait qu'en $y \leq 0$, f n'est plus Lipschitzienne mais seulement continue. On verra en section 3.3 que si f est $\mathcal{C}^0$, alors on peut toujours démontrer l'existence locale de solutions au problème de Cauchy.

2.4 Le Théorème d'Inversion Locale

Ici encore ce théorème est une application du théorème 2.1 qu'on appliquera à une certaine fonction dans une partie de la démonstration.

Définition 3. *Soient E, F deux espaces de Banach, $U \subset E$ ouvert, $a \in U$, $f : U \to F$ une application. On dit que f est **différentiable en** a s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(E, F)$ (i.e. φ est linéaire et continue) telle que*

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|) \ \textit{lorsque} \ h \to 0$$

Si φ existe, elle est unique et est appellée la ***différentielle de*** f ***en*** a *et est notée* df_a.
Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est ***différentiable sur*** U. *Alors l'application* $df : U \to \mathcal{L}_c(E, F) : a \mapsto df_a$ *est appellée l'****application différentielle de*** f. *Si df est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1(U)$.*

Théorème 3 (Inversion Locale)**.** *Soient :*
- *E, F deux espaces de Banach*
- *$U \subset E$ ouvert*
- *$f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$*
- *$a \in U$ tel que df_a soit continu et inversible (et donc df_a^{-1} est continue)*

Alors, il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que :

1. *la restriction $f_{|V}$ de f à V est une bijection de V sur W*
2. *l'application inverse $g : W \to V$ est continue*
3. *g est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in W$, $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$ [3]*

Démonstration. On munit $\mathcal{L}_c(E, F)$ de la norme $\|u\| = sup_{\|x\|=1}\|u(x)\|$. Quitte à remplacer f par la fonction $x \mapsto df_x^{-1}[f(a + x) - f(a)]$, on peut se ramener au cas où $a = 0$, $f(a) = 0$, et $df_0 = df_a = Id_E$ (et donc $E = F$).

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset U$ et $\|df_x - df_0\| = \|df_x - Id_E\| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in B(0, r)$. On désigne $u := Id_E - df_x$, donc $df_x = Id_E - u$ avec $\|u\| \leq \frac{1}{2}$. Alors, df_x est un isomorphisme bicontinu qui, d'après la proposition 1 (en Annexes), vérifie $df_x^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$, et donc

$$\|df_x^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u\|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = 2$$

1. On va montrer que la restriction de f à un voisinage ouvert de 0 dans $B(0, r)$ est une bijection sur $B(0, \frac{r}{2})$. Soit $y \in B(0, \frac{r}{2})$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} h\ &: B_f(0, r) \to E \\ &x \mapsto y + x - f(x) \end{aligned}$$

Il est clair que h est de classe $\mathcal{C}^1$; de plus, $\forall x \in B(0, r)$, $\|dh_x\| = \|Id_E - df_x\| \leq \frac{1}{2}$. Donc, d'après le Théorème des Accroisements Finis,

$$\forall x, x' \in B_f(0, r), \quad \|h(x) - h(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| \tag{1}$$

En particulier, pour $x' = 0$, on a $\|x - f(x)\| = \|h(x) - h(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$, donc

$$\forall x \in B(0, r), \quad \|h(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Ainsi, h est une fonction de $B_f(0, r)$ dans $B(0, r) \subset B(0, 1)$. Comme de plus h est $\frac{1}{2}$-Lipschitzienne d'après (1), d'après le théorème 2.1, $\exists! x \in B_f(0, r)$ tel que $h(x) = x$, c'est-à-dire tel que $f(x) = y$. Comme $x = h(x)$ et que h est à valeurs dans $B(0, r)$, on en déduit que $x \in B(0, r)$.
Alors, pour tout $y \in B(0, \frac{r}{2})$, $\exists!\, x \in B(0, r)$ tel que $f(x) = y$. On définit $V := f^{-1}(B(0, \frac{r}{2})) \cap B(0, r)$. V est un voisinage de 0 car $f(0) = 0$ et f est continue sur $B(0, r)$. En notant $W := B(0, \frac{r}{2})$, on a alors $f_{|V} : V \to W$ est une bijection.

2. On note $g : W \to V$ l'application inverse. On utilise de nouveau h, cette fois-ci avec $y = 0$, et donc $\forall x \in U$, $x = h(x) + f(x)$. Alors, $\forall x, x' \in B(0, r)$,

$$\|x - x'\| \leq \|h(x) - h(x')\| + \|f(x) - f(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\|$$

Donc, $\|x-x'\| \leq 2\|f(x)-f(x')\|$. On en déduit que $\forall y, y' \in W$,

$$\|g(y)-g(y')\| \leq 2 \; \|f(g(y))-f(g(y'))\| = 2\|y-y'\| \tag{2}$$

g est donc Lipschitzienne et par conséquent continue.

3. On fixe $x \in V$ et on pose $y = f(x) \in W$. Il existe $r' > 0$ tel que $B(y, r') \subset W$, et pour tout $w \in B(0, r')$, on pose $v = g(y+w) - g(y)$. Donc, d'après (2), $\|v\| \leq 2\|w\|$, et

$$\begin{aligned}\Delta(w) &= g(y+w) - g(y) - df_x^{-1}(w)\\ &= v - df_x^{-1}\big[f(x+v) - f(x)\big]\\ &= -df_x^{-1}\big[f(x+v) - f(x) - df_x(v)\big].\end{aligned}$$

Comme $\|df_x^{-1}\| \leq 2$, on obtient $\|\Delta(w)\| \leq 2\|f(x+v)-f(x)-df_x(v)\| = 2\|v\|\varepsilon(v)$ avec $\lim_{v\to 0}\varepsilon(v) = 0$. Donc,$\|\Delta(w)\| \leq 4\|w\|\varepsilon\,(g(y+w)-g(y)) = 4\|w\|\varepsilon'(w)$.
Comme g est continue, $\lim_{w\to 0}\varepsilon'(w) = 0$. Alors, $\|\Delta(w)\| = o(\|w\|)$. Donc, g est différentiable en y et $dg_y = df_x^{-1}$. Enfin, comme df_x^{-1} est continue (car f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $L \in GL(E) \mapsto L^{-1} \in GL(E)$ est continue), la fonction $dg : y \mapsto dg_y$ est continue. Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$.

□

3 Le Deuxième Théorème du Point Fixe

3.1 Un Théorème du Point Fixe Topologique

Les résultats de cette section sont issus du livre [4].

Ce théorème donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie.

Théorème 4. *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

Remarque Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 5. *Si $f : [a,b] \to [a,b]$ est continue, alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$.*

Démonstration. Si f est continue de $[a,b]$ dans lui-même, la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. □

Afin de démontrer le théorème 4, on va d'abord le réduire dans le cas où $K = B_f(0,1)$.

3.1.1 Rétractions

Définition 4. *On appelle **rétraction** de l'espace topologique E sur un fermé F de E toute fonction continue de E dans F qui est l'identité sur F.*

Théorème 6. *Soit K un compact convexe dans un espace de Hilbert E. Alors, il existe une retraction 1-Lipschitzienne $\pi_K : E \to K$.*

Démonstration. Soit $x \in E$. Par compacité de K, il existe $a \in K$ tel que $\|x-a\| = \inf_{k\in K} \|x-k\|$. Si $b \in K$ est tel que $\|x-b\| = \inf_{k\in K} \|x-k\| = \|x-a\|$, alors $\langle a-b, x-\frac{a+b}{2}\rangle = 0$ et donc $-\|x-\frac{a+b}{2}\|^2 + \|x-a\|^2 = \|\frac{a-b}{2}\|^2$. Or $\frac{a-b}{2} \in K$ par convexité de K et donc $\|\frac{a-b}{2}\|^2 \leq \|x-a\|^2 - \|x-\frac{a+b}{2}\|^2 \leq 0$. Donc, $a = b$. Comme pour tout $x \in E$, il existe un unique $a_x \in K$ tel que $\|x-a_x\| = \inf_{k\in K} \|x-k\|$, alors $\pi_K(x) = a_x$ définit une application $\pi_K : E \to K$ qui est l'identité sur K.

Pour montrer que π_K est continue, remarquons d'abord que pour tout $k \in K$ et tout $t \in [0,1]$, on a $(1-t)\pi_K(x) + tk \in K$ et donc $\|x-\pi_K(x)\|^2 + 2t\langle x-\pi_K(x), k-\pi_K(x)\rangle + t^2\|k-\pi_K(x)\|^2 = \|x-\pi_K(x)-t(k-\pi_K(x))\|^2 \geq \|\pi_K(x)-x\|^2$. Donc, $\langle x-\pi_K(x), -b+\pi_K(x)\rangle \geq 0$ pout tout $k \in K$. Donc $\forall (u_1, u_2) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\|u_1-u_2\|^2 &= \|(u_1-\pi_K(u_1)) + (\pi_K(u_1)-\pi_K(u_2)) + (\pi_K(u_2)-u_2)\|^2 \\
&= \|\pi_K(u_1)-\pi_K(u_2)\|^2 + 2\langle \pi_K(u_1)-\pi_K(u_2), u_1-\pi_K(u_1)+\pi_K(u_2)-u_2\rangle \\
&\quad + \|u_1-\pi_K(u_1)+\pi_K(u_2)-u_2\|^2 \\
&\geq \|\pi_K(u_1)-\pi_K(u_2)\|^2
\end{aligned}$$

□

Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Quitte à remplacer K par λK et f par $x \in \lambda K \mapsto \lambda f(\frac{x}{\lambda}) \in \lambda K$ on peut supposer que $K \subset B_f(0,1)$. Donc, π_K est une rétraction de $B_f(0,1)$ sur K. Soit $F : K \to K$ une fonction continue. Alors $\overline{F} := F \circ \pi_K : B_f(0,1) \to B_f(0,1)$ est continue. Si le théorème de Brouwer (voir ci-dessous) est démontré pour $B_f(0,1)$, alors il existe $x \in B_f(0,1)$ tel que $x = \overline{F}(x) = F(\pi_K(x))$. Comme F est à valeurs dans K, on a $x \in K$ et donc $\pi_K(x) = x$, ce qui implique que x est un point fixe de F sur K.

On peut donc se ramener au cas où $K = B_f(0,1)$. Dans ce cas le théorème de Brouwer est équivalent au théorème suivant :

Théorème 7. *Il n'existe pas de rétraction $B_f(0,1)$ sur $S(0,1)$.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Si une telle rétraction F existe alors $-F : B_f(0,1) \to B_f(0,1)$ n'a pas de point fixe. En effet, s'il existe $x \in B_f(0,1)$ tel que $F(x) = -x$, alors $x \in S(0,1)$ et donc $x = -F(x) = -x$, ce qui est impossible.

$(\Leftarrow)$ Si $f : B_f(0,1) \to B_f(0,1)$ est continue et n' a pas de point fixe, alors

$$\begin{aligned}
F :\ & B_f(0,1) \to S(0,1) \\
& x \mapsto x + t_x(x-f(x))
\end{aligned}$$

où t_x est le seul $t > 0$ tel que $\|x-t(x-f(x))\|^2 = 1 = \|x\|^2 + 2t\langle x, x-f(x)\rangle + t^2\|x-f(x)\|^2$. On trouve $t_x = \frac{-\langle x,x-f(x)\rangle + \sqrt{\langle x,x-f(x)\rangle^2 + \|x-f(x)\|^2(1-\|x\|^2)}}{\|x-f(x)\|^2}$, donc F est continue. De plus, si $x \in S(0,1)$, alors $\|x\| = 1$, donc $t_x = \frac{-\langle x,x-f(x)\rangle + |\langle x,x-f(x)\rangle|}{\|x-f(x)\|^2}$. Or $\langle x, x-f(x)\rangle = \|x\|^2 - \langle x, f(x)\rangle \geq 1 - \|x\| \cdot \|f(x)\| \geq 0$, d'où $t_x = 0$ et $\forall x \in S(0,1)$, $F(x) = x$. □

Contre-exemples. De la même façon que pour le théorème 2.1 nous allons voir que chaque hypothèse du théorème a également son importance ici.

1. Partie K convexe et compacte de $\mathbb{R}$, $f : K \mapsto K$ sans point fixe :
   $K = [0,2]$; $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
2. Partie ε convexe non compacte de $\mathbb{R}$ et $f : \varepsilon \mapsto \varepsilon$ continue sans point fixe :
   $\varepsilon = [0,2[$; $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

3. Partie K compacte non convexe de $\mathbb{R}$ et $f : K \mapsto K$ continue sans point fixe :
$K = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2]$; $f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$

3.1.2 Le cas $K = B_f(0,1)$

On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute fonction continue $f : E \to E$ possède un point fixe. Nous allons prouver que la boule $B_f(0,1)$ a la propriété du point fixe en toute dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note ici B_n (resp. S_n) la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ (resp. la sphère unité de $\mathbb{R}^n$). Notre preuve est basée sur l'études des champs de vecteurs sur S_n :

Définition 5. *On appelle **champ de vecteurs** sur la sphère S_{n-1} toute fonction continue $V : S_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout x, $V(x)$ soit tangent en x à S_{n-1}, c'est-à-dire orthogonal à x.*

Lemme 1. *S'il existe une rétraction de B_{2n} sur S_{2n-1}, il existe un champ de vecteurs partout non nul sur S_{2n}.*

Démonstration. On suppose que ρ est la rétraction de B_{2n} sur S_{2n-1} et on note

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{2n+1} &\to \mathbb{R}^{2n} \\ (x_1, x_2, ..., x_{2n+1}) &\mapsto (x_1, x_2, ..., x_{2n}) \end{aligned}$$

qui envoie S_{2n} sur B_{2n}. Il existe un champ de vecteurs $V : S_{2n-1} \to S_{2n-1}$ (partout non nul). En effet, si on pose :

$$V(x_1, x_2, ..., x_{2n}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, ..., x_{2n}, -x_{2n-1})$$

on a que V est continue, $\|V(x)\|^2 = \|x\|^2 = 1$ et $\langle V(x), x \rangle = 0$.
La fonction $f : y \mapsto V \circ \rho \circ \pi(y)$ est alors continue sur S_{2n} à valeurs dans $S_{2n-1} \subset S_{2n}$. Si, pour un $y \in S_{2n}$, $f(y) = \pm y$, alors $y \in S_{2n-1}$ donc $\pi(y) = y$, et $\rho \circ \pi(y) = \rho(y) = y$, d'où $f(y) = V(y) = \pm y$, ce qui contredit le fait que $\langle V(y), y \rangle = 0$, et on en déduit alors que $\forall y \in S_{2n}$, $f(y) \notin \{y, -y\}$. f étant une fonction continue de S_{2n} dans S_{2n}, la foncion V' définie par

$$V'(y) = f(y) - \langle f(y), y \rangle \cdot y$$

est continue et vérifie, $\forall y \in S_{2n}$,

$$\langle V'(y), y \rangle = \langle f(y), y \rangle - \langle f(y), y \rangle \|y\|^2 = 0$$

Donc V' est bien un champ de vecteurs sur S_{2n}. Et il est partout non nul car si on avait $V'(x) = 0$, $f(x)$ serait colinéaire à x et appartiendrait à S_{2n}, i.e. $f(x) = \pm x$, ce qui est impossible. □

Le théorème suivant, dont la preuve se trouve en annexe, achève la preuve du théorème de Brouwer en dimension paire d'après les théorèmes 1 et 7.

Théorème 8. *Sur la sphère S_{2n} tout champ de vecteurs s'annule en au moins un point.*

Théorème 9 (Brouwer)**.** *La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Comme ce théorème est déjà démontré pour n pair, il ne reste plus qu'à montrer que si B_{n+1} a la propriété du point fixe, alors B_n l'a aussi.
Soient la fonction $f : B_n \to B_n$ continue et π la projection définie par $\pi : (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_2, ..., x_n)$. On a alors $\pi(B_{n+1}) = B_n$, et de plus $f \circ \pi$ est continue de B_{n+1} dans $B_n \subset B_{n+1}$. Donc, il existe $y \in B_{n+1}$ tel que $(f \circ \pi)(y) = y$. Alors $y \in B_n$ donc $\pi(y) = y$. On en déduit que y est un point fixe de f sur B_n.

□

3.2 Le Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 10 (Schauder)**.** *Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.*

Démonstration. Soit $f : K \mapsto K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$, dès que $\|x - y\| \leq \delta$. De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K ; i.e. $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$. Si on désigne $L := Vect(f(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)}$$

pour lesquelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$, $g(x) := \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j)$. g est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$). Donc, si on prend la restriction $g_{|K^*} : K^* \to K^*$, par le théorème 9, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y = f(y) - g(y) &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et donc $\|f(y) - f(x_j)\| < \varepsilon$. Donc, on a, pour tout j, $\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\| \leq \varepsilon \varphi_j(y)$, et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^{p} \|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\| \leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|f(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors f étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$, et on conclut que $f(y^*) = y^*$, i.e. y^* est un point fixe de f sur K. □

3.3 Le Théorème de Cauchy-Arzela

On reprend maintenant le problème de Cauchy pour l'équation $y' = F(t, y(t))$, mais ici on ne sait pas si F est Lipschitzienne. Le théorème de Schauder nous donnera l'existence d'une solution, mais pas nécessairement l'unicité qu'on avait en section 2.2.

Théorème 11 (Cauchy-Arzela)**.** *Soient :*

- *E un espace normé de dimension finie,*
- *U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$,*
- *F une fonction continue de U dans E, et*
- *(t_0, x_0) un point de U*

Alors l'équation différentielle $x' = F(t,x)$ a une solution au voisinage de (t_0, x_0), i.e. il existe un nombre $\rho > 0$ et une fonction $f : [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(t_0) = x_0$, telle que pour tout $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$,

1. *$(t, f(t)) \in U$*
2. *$f'(t) = F(t, f(t))$*

Démonstration. Soit $M > \|F(t_0, x_0)\|$. Quitte à remplacer U par l'ensemble ouvert $\{(t,x) \in U : \|F(t,x)\| < M\}$, on peut supposer que F est majorée en norme par M sur U. Il existe donc $r > 0$ et $h > 0$ tels que $U \supset [t_0 - h, t_0 + h] \times B_f(x_0, r)$, et on choisit $\rho = \min(h, \frac{r}{M}) > 0$.

On considère l'ensemble K des fonctions M-Lipschitziennes de l'intervalle $J = [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ dans E qui valent x_0 en t_0, que l'on munit de la norme uniforme. Si f et g sont dans K et $s \in [0,1]$, alors $sf + (1-s)g \in K$, donc K est convexe. Si $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de K pour la norme uniforme, alors d'après le théorème 12, il existe une fonction continue $f : J \to E$ telle que f_i converge uniformément vers f.
On a alors $f(t_0) = \lim_{i \to +\infty} f_i(t_0) = x_0$ et $\forall t, t' \in J$, $\|f(t) - f(t')\| = \lim_{i \to +\infty} \|f_i(t) - f_i(t')\| \leq M|t - t'|$, et donc $f \in K$. On en déduit que K est fermé pour la norme uniforme dans $\mathcal{C}^0(J, E)$. De plus, pour tout $t \in J$ et tout $f \in K$, on a

$$\|f(t) - x_0\| = \|f(t) - f(t_0)\| \leq M|t - t_0| \leq M\rho \leq r$$

ce qui montre que $K(t) = \{f(t) : f \in K\}$ est contenu dans la boule $B_f(x_0, r)$, et donc $K(t)$ est relativement compact. Et puisque K est uniformément équicontinu, il résulte du théorème 13 que K est compact.

On peut alors définir une application $\Phi : K \to \mathcal{C}^1(J, E)$, en posant

$$\Phi(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s)) \mathrm{d}s$$

En effet, si $f \in K$, alors $f(s) \in B_f(x_0, r)$ pour tout $s \in J$, ce qui montre que la fonction $s \mapsto F(s, f(s))$ est bien définie et continue sur J, à valeurs dans E, et possède une primitive $\Phi(f)$ de classe $\mathcal{C}^1$, valant x_0 en t_0. Puisque la fonction $g := \Phi(f)$ vérifie $g'(t) = F(t, f(t))$, on a que $\|g'(t)\| \leq M$, c'est-à-dire que g est M-Lipschitzienne sur J. De plus, $g(t_0) = x_0$. Donc, $\Phi(K) \subset K$. Enfin, comme F est uniformément continue sur le compact $J \times B_f(x_0, r)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout (s,x) et (s', x') appartenant à $J \times B_f(x_0, r)$, on ait $\max(|s - s'|, \|x - x'\|) < \delta \Rightarrow \|F(s,x) - F(s', x')\| < \frac{\varepsilon}{\rho}$.

Alors, si f et f_1 appartiennent à K et si $\|f - f_1\| < \delta$, on a $\forall s \in J$, $\|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| < \frac{\varepsilon}{\rho}$. Donc,

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)(t) - \Phi(f_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, f(s)) - F(s, f_1(s)) \mathrm{d}s \right\| \\ &\leq |t - t_0| \sup_{s \in J} \|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| \\ &\leq \rho \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Ceci montre que $\|\Phi(f) - \Phi(f_1)\| \leq \varepsilon$, i.e. $\Phi : K \to K$ est une application continue. Donc, d'après le Théorème 10, il existe un point fixe $f \in K$ de Φ, c'est-à-dire que f est une solution au problème de Cauchy. □

4 Annexes

4.1 Différents outils utilisés

Proposition 1. *Soient E un espace de Banach, $u \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| < 1$. Alors l'application $(Id_E - u)$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$, ce qui est dans $\mathcal{L}_c(E)$. [3]*

Démonstration. Comme $\|u\| < 1$ et $\|u^k\| \leq \|u\|^k$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ converge absolument dans $\mathcal{L}_c(E)$. Alors :

$$(Id_E - u)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k - \sum_{k=1}^{+\infty} u^k = u^0 = Id_E$$

d'où $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ est l'inverse de $(Id_E - u)$. □

Des démonstrations des deux théorèmes qui suivent se trouvent dans [5] (resp. p.82 et p.87).

Théorème 12. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques avec Y complet. Alors l'ensemble $\mathcal{C}_b^0(X, Y)$ est complet pour la distance uniforme $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X}\{d_Y(f(x), g(x))\}$.*

Théorème 13 (Ascoli)**.** *Soient (X, d_X) un espace métrique compact et (Y, d_Y) un espace métrique. On se donne un sous ensemble F de $\mathcal{C}^0(X, Y)$ tel que :*

1. *$\forall x \in X$, $\overline{\{f(x), f \in F\}}$ est compact dans Y*
2. *La famille F est équicontinue, i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x, x' \in X$, $\forall f \in F$ on a $d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$*

Alors $\overline{F}$ est compact dans $\mathcal{C}^0(X, Y)$ (muni de la distance uniforme).

4.2 Démonstration du Théorème 8

Supposons qu'il existe un champ de vecteurs V partout non nul sur S_{2n}. On va d'abord se ramener au cas où V est la restriction à S_{2n} d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de S_{2n} vérifiant $\|V(x)\| = 1$, $\forall x \in S_{2n}$.
La fonction continue strictement positive $x \mapsto \|V(x)\|$ atteint, sur le compact $S_{2n,}$, son minimum $\delta > 0$. Le compact

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^{2n+1} : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq \frac{3}{2}\right\}$$

est un voisinage de S_{2n} dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Toute fonction réelle continue de K peut être approchée uniformément sur K, à $\frac{\delta}{2n}$ près, par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de K. En particulier, si $(V_1, V_2, ..., V_{2n+1})$ sont les fonctions coordonnées de V, alors les fonctions $x \mapsto V_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, continues sur K, peuvent être approchées uniformément sur K, à $\frac{\delta}{2n}$ près, par des fonctions W_i qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{K}$. Alors la fonction $W : x \mapsto (W_1(x), W_2(x), ..., W_{2n+1}(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et vérifie

$$\|W(x) - V(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{2n+1} (W_j(x) - V_j(x))^2 \leq \frac{2n+1}{4n^2}\delta^2 < \delta^2,$$

ce qui montre que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle W(x) + \lambda x, V(x)\rangle &= \langle W(x), V(x)\rangle \\ &= \|V(x)\|^2 - \langle V(x) - W(x), V(x)\rangle \\ &\geq \delta^2 - \|W(x) - V(x)\| \cdot \|V(x)\| > 0,\end{aligned}$$

d'où $W(x) + \lambda x \neq 0$, donc $W^*(x) = W(x) - \langle W(x), x\rangle \cdot x \neq 0$. Alors $x \mapsto \frac{W^*(x)}{\|W^*(x)\|}$ est un champ de vecteurs à valeurs dans S_{2n} de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{K}$.

On suppose maintenant que V est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de S_{2n}, à valeurs dans S_{2n}, et on considère, pour $t \in \mathbb{R}$, les applications ϕ et Φ_t, définies sur $\mathring{K}$par

$$\phi(x) = \|x\| \cdot V\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$
$$\Phi_t(x) = x + t\phi(x),$$

qui sont de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque V' est continue sur le compact S_{2n}, elle y est bornée, et le calcul de $\phi'(x)$ montre que ϕ' est bornée par un nombre M sur $\mathring{K}$. Alors, si $M\|t\| < 1$, on a, pour un $x \in\mathring{K}$,

$$\|I - \Phi_t'(x)\| = |t| \cdot \|\phi'(x)\| \leq M|t| < 1,$$

donc $\Phi_t'(x)$ est inversible (d'après 1) et Φ_t est ouverte.
Donc $U = \Phi_t(\mathring{K})$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. De plus,

$$\langle V(x), x\rangle = 0 \Rightarrow \|\Phi_t(x)\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|x\|^2\|V\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|^2 = (1+t^2)\|x\|^2.$$

On en conclut que, si $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{2}$, l'image par Φ_t de la sphère $S(r)$ de rayon r est une partie compacte, donc fermée de la sphère $S(r\sqrt{1+t^2})$ de rayon $r\sqrt{1+t^2}$. Mais c'est aussi la trace sur $S(r\sqrt{1+t^2})$ de U, donc une partie ouverte de $S(r\sqrt{1+t^2})$. Par connexité de $S(r\sqrt{1+t^2})$ on a alors $\Phi_t(S(r)) = S(r\sqrt{1+t^2})$, donc Φ_t est surjective de K sur $U := \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} : \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2} < \|x\| < \frac{3}{2}\sqrt{1+t^2}\}$.

Si on a $\Phi_t(x) = \Phi_t(y)$, alors

$$\sqrt{1+t^2} \cdot \|x\| = \|\Phi_t(x)\| = \|\Phi_t(y)\| = \sqrt{1+t^2} \cdot \|y\|,$$

donc $\|x\| = \|y\|$, et

$$0 = \|x + t\phi(x) - y - t\phi(y)\| \geq \|x-y\| - \|t\| \cdot \|x\| \cdot \left\|V\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - V\left(\frac{y}{\|x\|}\right)\right\|.$$

Puisque (d'après le lemme 2) on a $\|V\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - V\left(\frac{y}{\|x\|}\right)\| \leq \frac{\pi}{2}M\frac{\|x-y\|}{\|x\|}$, on obtient $1 - \frac{\pi}{2}M|t| = \|x-y\| \leq 0$, ce qui entraine $x = y$ si $\frac{\pi}{2}M|t| < 1$.
Pour $|t|$ assez petit, la fonction Φ_t est donc injective et est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathring{K}$sur U. Par homotéthie, le volume de U est alors le produit du volume de $\mathring{K}$par $(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}$. C'est aussi l'intégrale sur $\mathring{K}$du déterminant jacobien D_t de Φ_t ; et puisque la matrice jacobienne de Φ_t en x est $I + tJ_\phi(x)$, $D_t(x)$ est alors un polynôme de degré au plus $2n+1$ en t : $D_t(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} t^j\alpha_j(x)$.

On en conclut que

$$vol(U) = (1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}} vol(\mathring{K}) = \int D_t(c)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{2n+1} t^j \int \alpha_j(x)\mathrm{d}x,$$

donc, au voisinage de 0, $(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}$ est égal à un polynôme $P(t)$ de degré au plus $2n+1$. Puisque $(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}$ est pair, on devrait avoir $P(t)$ pair donc de degré au plus $2n$. $P(t)^2$ serait alors un polynôme de degré au plus $4n$, égal à $(1+t^2)^{2n+1}$. C'est une contradiction donc le champ de vecteurs V s'annule en au moins un point. [4]

Lemme 2 (Accroissements finis). *Soit $m \geq 1$. Si ϕ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un voisinage de S_m dans $\mathbb{R}^{m+1}$, à valeurs dans un espace de Banach E, et si $\|\phi'(x)\| \leq M$, $\forall x \in S_m$, alors la fonction ϕ est $\frac{\pi}{2}$-Lipschitzienne sur S_m.*

Démonstration. Soient x et y deux points distincts de S_m. On peut trouver $z \in S_m$ qui forme avec x une base orthornormée d'un plan contenant y et tel que $\langle y, z\rangle \geq 0$. Il existe alors un $v \in [0, \pi]$ tel que $y = x\cos v + z \sin v$. Et la fonction $\gamma : s \mapsto x\cos s + z\sin s$ prend ses valeurs dans S_m. La fonction $\phi \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et on a

$$\|(\phi \circ \gamma)'(s)\|^2 \leq \|\phi'(\gamma(s))\|^2 \cdot \|\gamma'(s)\|^2 \leq M^2 \| - x\sin s + z\cos s\|^2 = M^2.$$

On a donc

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|\phi \circ \gamma(v) - \phi \circ \gamma(0)\| \leq v \sup \|(\phi \circ \gamma)'(s)\| \leq Mv,$$

et puisque $\|x-y\|^2 = (1-\cos v)^2 + \sin^2 v = 2 - 2\cos v = 4\sin^2 \frac{v}{2}$, on a $\|x-y\| = 2\sin\frac{v}{2} \geq 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{v}{2} = \frac{2}{\pi} v$.
On en conclut que $\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \frac{\pi}{2}\|x-y\|$. [4] □

4.3 Une autre démonstration du théorème de Brouwer en dimension 2

On donne ici une autre preuve du Théorème de Brouwer utilisant la notion de forme différentielle et la formule de Green-Riemann. On se restreint à la dimension 2, mais ça marche aussi pour les dimensions supérieures (mais nécessite une formule de Green-Riemann plus compliquée).

Définition 6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle* ***forme différentielle de degré 1*** *sur Ω toute application α de Ω sur le dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de $\mathbb{R}^n$.*

Soit $F : B_f(0,1) \mapsto S(0,1)$ tel que $F_{|S(0,1)} = id$. On commence par supposer que F est $\mathcal{C}^1$. On note $F(x,y) = (F_1(x,y); F_2(x,y))$ et on considère la forme différentielle

$$\begin{aligned} \alpha : & B_f(0,1) \mapsto (\mathbb{R}^2)^* \\ & (x,y) \mapsto \frac{F_1 \frac{\partial F_2}{\partial y} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial y}}{F_1^2 + F_2^2} \mathrm{d}y + \frac{F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} \mathrm{d}x = Q\mathrm{d}y + P\mathrm{d}x \end{aligned}$$

α est bien définie sur $B_f(0,1)$ car $F_1^2 + F_2^2 = 1 \neq 0$. On va appliquer le théorème 14 à α :

Théorème 14 (Green-Riemann)**.** *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord $\mathcal{C}^1$ et $\alpha = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ une forme différentielle de degré 1, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant K. Alors K est mesurable et*

$$\int_{\partial K^+} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int \int_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(Ref. [2])

On cherche donc à calculer $\int_{B_f(0,1)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Après de laborieux calculs on trouve $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, d'où $\int_{S(0,1)} \alpha = 0$. En revanche si on fait le changement de variable suivant : $x' = F_1(x,y)$ et $y' = F_2(x,y)$, on a,

$$\mathrm{d}x' = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}y' = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Et donc,

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{F_1^2 + F_2^2}\left[F_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - F_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\right] = \frac{1}{x'^2 + y'^2}[x'\mathrm{d}y' - y'\mathrm{d}x']$$

$$\int_{S(0,1)} \alpha = \int_0^1 \frac{1}{x'^2+y'^2}[x'\mathrm{d}y' - y'\mathrm{d}x'] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}[\cos^2\theta d\theta + \sin^2\theta d\theta] = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

(par le changement de variable $x' = \cos\theta$ et $y' = \sin\theta$). On a alors une contradiction car $0 \neq 2\pi$ donc une telle fonction F n'existe pas.

On en déduit donc que si $f : B_f(0,1) \mapsto B_f(0,1)$ est $\mathcal{C}^1$ alors elle admet un point fixe. Si f est seulement continue, alors il existe une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$, $f_n : B_f(0,1) \mapsto B_f(0,1)$ qui converge uniformément vers f. On en déduit qu'il existe $x_n \in B_f(0,1)$ tel que $f_n(x_n) = x_n$, d'où $\|f(x_n) - x_n\| = \|f(x_n) - f_n(x_n)\| \leq \|f - f_n\|_\infty$. Comme $B_f(0,1)$ est compact, quitte à extraire un sous-suite, on peut supposer que x_n tend vers un point $x_\infty \in B_f(0,1)$ et on a

$$\|f(x_\infty) - x_\infty\| \leq \|f(x_\infty) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - x_n\| + \|x_\infty - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où $f(x_\infty) = x_\infty$.

Références

[1] J-P. Demailly *Analyse numérique et équations différentielles ;* collection Grenoble Sciences, presses universitaires de Grenoble, Grenoble (1996)

[2] Berger et Gostiaux *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces ;* presses universitaires de France, Paris (1987)

[3] X. Gourdon *Les maths en tête (analyse) ;* ellipses, Paris (1994)

[4] J. Saint Raymond *Topologie, calcul différentiel et variable complexe ;* Calvage et Mounet, Paris (2007)

[5] J. Dixmier *Topologie générale* collection Puf, presses universitaires de France, Paris (1981)