Éléments de distorsion du groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité d'une variété compacte

E. Militon

16 mars 2012

Résumé

Dans cet article, on montre que, dans le groupe $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ des difféomorphismes isotopes à l'identité d'une variété compacte M, tout élément récurrent est de distorsion. Pour ce faire, on généralise une méthode de démonstration utilisée par Avila pour le cas de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{S}^1)$. La méthode nous permet de retrouver un résultat de Calegari et Freedman selon lequel tout homéomorphisme de la sphère isotope à l'identité est un élément de distorsion.

1 Énoncé des résultats

L'étude des éléments de distorsion des groupes de difféomorphismes ou d'homéomorphismes non-conservatifs d'une variété trouve son origine dans une question de Franks et Handel (voir [6] et [5]) : une rotation du cercle est-elle distordue dans le groupe des homéomorphismes du cercle ou des difféomorphismes du cercle ? Qu'en est-il si l'on remplace le cercle par la sphère de dimension 2 ?

La réponse à ces questions est fournie par Calegari et Freedman dans [4] : une rotation du cercle est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^1 du cercle. Cependant, les auteurs précisent ne pas savoir s'il en est de même en régularité C^∞. Dans le même article, ils prouvent qu'une rotation de la sphère S^2 est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de la sphère. Enfin, en ce qui concerne la régularité C^0, Calegari et Freedman ont prouvé un résultat très général : en toute dimension N, un homéomorphisme h de la sphère S^N est distordu.

Dans un article ultérieur, Avila a montré que, dans le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^∞, tout élément récurrent est distordu. Nous généralisons dans cet article le résultat d'Avila à toute variété.

2 Résultats

Avant toute chose, commençons par introduire des définitions et des notations qui nous seront utiles par la suite.

Définition 1 *Soit G un groupe. Pour une partie finie S de G, si un élément g de G est dans le groupe engendré par S, on note :*

$$l_S(g) = inf \left\{ n \in \mathbb{N},\ \exists (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{\pm 1\}^n, \exists (s_i)_{1 \leq i \leq n} \in S^n,\ g = \prod_{i=1}^{n} s_i^{\epsilon_i} \right\}.$$

Un élément g de G est dit distordu (ou de distorsion) s'il existe une partie finie S de G telle que g appartient au groupe engendré par S et :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0.$$

On remarque que, comme la suite $(l_S(g^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive, il suffit de montrer que :

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0$$

pour obtenir que l'élément g est distordu.

Etant donnée une variété différentiable M, on note :
- $\mathrm{Homeo}_0(M)$ l'ensemble des homéomorphismes à support compact dans M isotopes à l'identité par une isotopie à support compact ;
- pour un élément r de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathrm{Diff}_0^r(M)$ l'ensemble des difféomorphismes de M de classe C^r isotopes à l'identité par une isotopie à support compact (en particulier, $\mathrm{Homeo}_0(M) = \mathrm{Diff}_0^0(M)$).

Le support d'un homéomorphisme f de M est ici défini par :

$$supp(f) = \overline{\{x \in M,\ f(x) \neq x\}}.$$

Si f et g sont deux éléments de $\mathrm{Diff}_0^r(M)$, on note d_r une distance qui définit la topologie de $\mathrm{Diff}_0^r(M)$.

Définition 2 *On dit qu'un difféomorphisme f de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ est récurrent si et seulement si :*

$$\liminf_{n \to +\infty} d_\infty(f^n, Id_M) = 0.$$

L'objet de la présente note est de démontrer les théorèmes suivants. Ce premier théorème généralise le résultat d'Avila pour les difféomorphismes du cercle (voir [1]).

Théorème 1 *Si M est une variété compacte, tout élément récurrent de $\mathrm{Diff}_0^{\infty}(M)$ est distordu.*

Comme dans [1], la méthode employée permet de démontrer que toute suite d'éléments récurrents $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{Diff}_0^{\infty}(M)$ est simultanément distordue, au sens où l'on peut trouver un ensemble fini S tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \liminf_{p\rightarrow+\infty} \frac{l_S(f_n^p)}{p} = 0.$$

La méthode employée par [1] permet de donner une nouvelle démonstration du résultat de Calegari et Freedman (voir [4]).

Théorème 2 *(Calegari-Freedman) Tout élément de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ est distordu.*

Là encore, on pourrait montrer que toute suite d'éléments de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ est simultanément distordue.

3 Démonstration des théorèmes

La démonstration des théorèmes 1 et 2 repose sur une généralisation des résultats de [1] à toute variété. La démarche et les notations sont similaires à celles présentées dans [1] mais la généralisation de la méthode aux dimensions supérieures nécessite de manière cruciale des résultats de perfection locale qui proviennent de [8]. On ne démontrera le théorème 1 que dans le cas d'une variété M de dimension supérieure ou égale à 2. Le cas de la dimension 1 est traité dans [1].
Les théorèmes vont découler des lemmes suivants.

Lemme 1 *Soit M une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 2. Il existe des suites $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que, toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Diff}_0^{\infty}(M)$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_{\infty}(h_n, Id_M) < \epsilon_n,$$

vérifie la propriété suivante : il existe un ensemble fini $S \subset \mathrm{Diff}_0^{\infty}(M)$ tel que, pour tout entier n,

– *le difféomorphisme h_n appartient au sous-groupe engendré par S.*
– *on a l'inégalité : $l_S(h_n) \leq k_n$.*

Lemme 2 *Soit N un entier naturel.*
Il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que, pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{S}^N)$, il existe un ensemble fini $S \subset \mathrm{Homeo}_0(\mathbb{S}^N)$ tel que, pour tout entier n :
– *l'homéomorphisme h_n appartient au groupe engendré par S.*
– *on a l'inégalité : $l_S(h_n) \leq k_n$.*

Admettons pour l'instant ces lemmes, qui seront démontrés dans la section suivante, et démontrons les théorèmes.

Démonstration des théorèmes. Soit f un élément récurrent de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$. Considérons une application strictement croissante $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{p(n)} = 0 \\ d_\infty(f^{p(n)}, Id_M) \leq \epsilon_n \end{cases},$$

où les suites $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par le lemme 1. Ce même lemme appliqué à la suite $(f^{p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nous donne l'existence d'un ensemble fini S qui montre que f est distordu. Le théorème 2 se montre de la même manière, en utilisant le lemme 2. ∎

4 Démonstration des lemmes 1 et 2

Pour mener à bien la démonstration de ces lemmes, nous aurons besoin des lemmes suivants, qui seront démontrés dans la section suivante et portent sur les difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Les lemmes 3 et 4 sont des analogues des lemmes 1 et 2 dans le cas des commutateurs de difféomorphismes de $\mathbb{R}^N$. Notons $B(0,2)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2. Si f et g sont des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$, on note $[f,g]$ le difféomorphisme $fgf^{-1}g^{-1}$.

Lemme 3 *Soient N un entier naturel et r un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*
Il existe des suites $(\epsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(k'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant la propriété suivante. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans la boule $B(0,2)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_r([f_n, g_n], Id_{\mathbb{R}^N}) < \epsilon'_n.$$

Alors il existe un ensemble fini S' inclus dans $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbb{R}^N)$ tel que pour tout entier n, le difféomorphisme $[f_n, g_n]$ appartient au groupe engendré par S' et $l_S([f_n, g_n]) \leq k'_n$.

Dans le cas particulier où $r=0$, on a un lemme un peu plus fort.

Lemme 4 *Il existe une suite $(k'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que, pour toute suite $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$ à support dans $B(0,2)$, il existe un ensemble fini S' inclus dans $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$ tel que, pour tout entier n, l'homéomorphisme $\tilde{h}_n$ appartient au groupe engendré par S' et $l_S(\tilde{h}_n)\le k'_n$.*

Démonstration du lemme 1. On note N la dimension de M ($N\ge 2$). On considère un recouvrement ouvert $(U_i)_{0\le i\le p}$ de M constitué d'ouverts difféomorphes à $\mathbb{R}^N$ dont l'adhérence est incluse dans un ouvert de carte de M. Pour tout entier i entre 0 et p, on choisit φ_i une carte de M définie sur un voisinage de l'adhérence de U_i qui vérifie :

$$\varphi_i(U_i)\subset B(0,2).$$

Notons ψ une bijection de $\mathbb{N}\times\{1,...,p\}\times\{1,\dots,4N\}$ sur $\mathbb{N}$.

On va maintenant construire la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recherchée à l'aide de la suite $(\epsilon'_l)_{l\in\mathbb{N}}$ donnée par le lemme 3 dans le cas $r=+\infty$.
D'après le lemme de perfection lisse (voir appendice), pour tout entier naturel n, on peut choisir ϵ_n suffisamment petit de sorte que, si un difféomorphisme h de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ vérifie $d(h,Id_M)<\epsilon_n$, alors il existe deux familles $(f_{k,l})_{0\le k\le p,1\le l\le 3N}$ et $(g_{k,l})_{0\le k\le p,1\le l\le 3N}$ d'éléments de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$, où $g_{k,l}$ et $f_{k,l}$ sont supportés dans l'ouvert U_k telles que :

$$\left\{\begin{array}{l} h=\prod_{k=0}^{p}\prod_{l=1}^{3N}[f_{k,l},g_{k,l}] \\ \forall k,l\in[0,p]\times[1,3N],\ d_\infty(\varphi_k\circ f_{k,l}\circ\varphi_k^{-1},Id_{\mathbb{R}^N})<\epsilon'_{\psi(n,k,l)} \\ \forall k,l\in[0,p]\times[1,3N],\ d_\infty(\varphi_k\circ g_{k,l}\circ\varphi_k^{-1},Id_{\mathbb{R}^N})<\epsilon'_{\psi(n,k,l)} \end{array}\right. .$$

Donnons-nous une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ qui vérifie :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ d_\infty(h_n,Id_M)<\epsilon_n.$$

La définition des ϵ_n nous donne deux familles $(\tilde{f}_{n,k,l})$ et $(\tilde{g}_{n,k,l})$ associées à h_n. On pose alors :

$$f_{\psi(n,k,l)}=\varphi_k\circ\tilde{f}_{n,k,l}\circ\varphi_k^{-1}$$
$$g_{\psi(n,k,l)}=\varphi_k\circ\tilde{g}_{n,k,l}\circ\varphi_k^{-1}$$

et on applique le lemme 3 aux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenues, ce qui achève la démonstration du lemme 1 en posant :

$$k_n=\sum_{k,l}k'_{\psi(n,k,l)}.$$

■

Démonstration du lemme 2. On utilise le lemme suivant qui découle d'un résultat très profond dû à Kirby, Siebenmann et Quinn pour le cas de la dimension supérieure ou égale à 4 (voir [4] lemme 6.10, [10] et [11]) :

Lemme 5 *On considère deux disques fermés inclus dans S^n dont les intérieurs recouvrent S^n. Alors tout homéomorphisme h isotope à l'identité s'écrit comme produit de six éléments de* $\mathrm{Homeo}_0(S^n)$ *qui sont chacun à support inclus dans l'un de ces disques.*

En utilisant ce résultat, la même méthode que précédemment, conjuguée au lemme 4, donne le lemme 2. ■

5 Démonstration des lemmes 3 et 4

Là encore, elle suit la même méthode que celle présentée dans [1].

Démonstration du lemme 3.. On note F_1 un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui vérifie :

$$\forall x \in B(0,2),\ F_1(x) = \lambda x,$$

avec $0 < \lambda < 1$.
Soit F_2 un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans $B(0,2)$ qui vérifie :

$$\forall x \in B(0,1), F_2(x) = x + a,$$

où a appartient à $\mathbb{R}^N - \{0\}$ et est de norme strictement inférieure à 1.
Soit F_3 un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans $B(0,2)$ qui vérifie :
- la suite $(F_3^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.
- la suite $(F_3^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$.

Considérons une suite d'entiers $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissant suffisamment vite pour que :
- $n \neq n' \Rightarrow F_3^n F_1^{l_n}(B(0,2)) \cap F_3^{n'} F_1^{l_{n'}}(B(0,2)) = \emptyset$.
- le diamètre de $F_3^n F_1^{l_n}(B(0,2))$ converge vers 0.

On note $F_n = F_3^n F_1^{l_n}$, $U_n = F_3^n F_1^{l_n}(B(0,2))$ et $\hat{F}_n = F_n F_2 F_n^{-1}$.
On considère pour chaque entier n un ouvert V_n qui vérifie :
- $F_3^n(0) \in V_n \subset U_n$.
- $\hat{F}_n(V_n) \cap V_n = \emptyset$.

On considère aussi une suite d'entiers $(\tilde{l}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que :

$$F_3^n F_1^{\tilde{l}_n}(B(0,2)) \subset V_n$$

et on note $\tilde{F}_n = F_3^n F_1^{\tilde{l}_n}$.

Donnons-nous des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbb{R}^N)$ à support dans $B(0,2)$ et choisissons la suite $(\epsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant suffisamment vite vers 0 de sorte que, si $d_r(f_n, Id) < \epsilon'_n$ et $d_r(g_n, Id) < \epsilon'_n$ pour tout entier n, alors les applications $F_4, F_5 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ définies par :

$$\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N},\ F_{4|V_n} = \tilde{F}_n f_n \tilde{F}_n^{-1} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{5|V_n} = \tilde{F}_n g_n \tilde{F}_n^{-1} \\ F_{4|\mathbb{R}^N - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n} = F_{5|\mathbb{R}^N - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n} = Id_{\mathbb{R}^N - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n} \end{array}$$

sont de classe C^r en x_0 (et ce sont alors des C^r-difféomorphismes de M à support inclus dans $B(0,2)$ isotopes à l'identité).

Remarquons que

$$A_n = F_4 \hat{F}_n F_4^{-1} \hat{F}_n^{-1}$$

est à support dans $V_n \cup \hat{F}_n(V_n)$, vaut $\tilde{F}_n f_n \tilde{F}_n^{-1}$ sur V_n et $\hat{F}_n \tilde{F}_n f_n^{-1} \tilde{F}_n^{-1} \hat{F}_n^{-1}$ sur $\hat{F}_n(V_n)$. On peut faire une remarque analogue pour les applications $B_n = F_5 \hat{F}_n F_5^{-1} \hat{F}_n^{-1}$ et $C_n = F_4^{-1} F_5^{-1} \hat{F}_n F_5 F_4 \hat{F}_n^{-1}$. On a alors :

$$A_n B_n C_n = \tilde{F}_n [f_n, g_n] \tilde{F}_n^{-1}.$$

Ainsi :

$$[f_n, g_n] = \tilde{F}_n^{-1} A_n B_n C_n \tilde{F}_n.$$

En prenant $S = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$, on obtient le résultat escompté. ■

Démonstration du lemme 4. Remarquons que, dans la démonstration précédente, l'apparition de la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée à un défaut de régularité de F_4 et de F_5. En régularité C^0, ce problème n'apparait pas, ce qui démontre le lemme 4 dans le cas où la suite $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de commutateurs. Il suffit ensuite de démontrer le lemme suivant. ■

Lemme 6 *Tout homéomorphisme de $\mathbb{R}^N$ à support compact isotope à l'identité s'écrit comme un commutateur dans* $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration (tirée de [3], démonstration du théorème 1.1.3). On note φ un homéomorphisme de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^n)$ de restriction à $B(0,2)$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} B(0,2) & \to & \mathbb{R}^N \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} \end{array}$$

Pour tout entier naturel n, on note :

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, \frac{1}{2^{n+1}} \le \|x\| \le \frac{1}{2^n} \right\}.$$

Soit h, un élément de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$. Comme tout élément de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$ est conjugué à un élément à support inclus dans l'intérieur de A_0, on peut supposer h à support inclus dans l'intérieur de A_0. On définit alors $g \in \mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$ par :

- $g = Id$ en dehors de $B(0,1)$.
- pour tout entier naturel i, $g_{|A_i} = \varphi^i h_i \varphi^{-i}$.
- $g(0) = 0$.

Alors :

$$h = [g, \varphi].$$

■

A Appendice : perfection locale de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$

L'objet de cet appendice est de démontrer le résultat suivant qui a été utilisé au cours de la démonstration du lemme 1 :

Théorème 3 *Soit M, une variété compacte connexe de dimension n. Fixons un recouvrement ouvert $(U_k)_{0 \leq k \leq p}$ de M constitué d'ouverts d'adhérences difféomorphes à la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout voisinage Ω de l'identité dans $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$, il existe un voisinage Ω' de l'identité dans $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ tel que, pour tout difféomorphisme f de Ω', il existe des familles de difféomorphismes $(f_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3n}$ et $(g_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3n}$ dans Ω tels que :*

$$f = \prod_{k=0}^{p} \prod_{l=1}^{3n} [f_{k,l}, g_{k,l}]$$

et les difféomorphismes $f_{k,l}$ et $g_{k,l}$ sont à support dans U_k.

Cette démonstration est une réalisation élémentaire de l'idée de Stefan Haller et Josef Teichmann de décomposer un difféomorphisme en produit de difféomorphismes préservant certains feuilletages (voir [8]). Elle repose de manière essentielle sur le théorème KAM d'Herman sur les difféomorphismes du cercle. On remarque que cette propriété démontre la perfection de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ et donc la simplicité de ce groupe. C'est donc une alternative à la preuve de Thurston et Mather (voir [3] ou [2]). La démonstration donne aussi la perfection locale (et donc la perfection) de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour n supérieur ou égal à 2 mais ne permet pas de conclure dans le cas $n = 1$.

D'après le lemme de fragmentation (voir [8] proposition 1 ou [3] théorème 2.2.1 pour une démonstration), pour tout réel $\eta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout élément h de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$, si $d(h, Id_M) < \alpha$, alors il existe une famille $(h_i)_{0 \leq i \leq p}$ d'éléments de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ telle que :

$$\begin{cases} supp(h_i) \subset U_i \\ h = \prod_{i=0}^{p} h_i \\ \forall i \in [0,p] \cap \mathbb{N},\ d(h_i, Id_M) < \eta \end{cases}.$$

Il reste à effectuer la construction suivante. On se donne U, V, deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, où U est un cube d'adhérence incluse dans V, et un voisinage Ω de l'identité dans $\mathrm{Diff}_0^\infty(V)$. Nous allons montrer l'existence d'un voisinage Ω' de l'identité dans $\mathrm{Diff}_0^\infty(U)$ tel que, pour tout difféomorphisme f de Ω', il existe des difféomorphismes $f_1, f_2, \ldots, f_{3n}$ dans Ω tels que :

$$f = [f_1, f_2] \circ [f_3, f_4] \circ \ldots \circ [f_{3n-1}, f_{3n}].$$

Pour montrer cette dernière propriété, la stratégie sera la suivante : on va commencer par décomposer un difféomorphisme f proche de l'identité en tant que produit de n difféomorphismes qui préservent chacun les feuilles d'un feuilletage en droites. Chacun de ces feuilletages en droites de U va être considéré comme une partie d'un feuilletage en cercles d'un anneau inclus dans V. Il suffira ensuite d'appliquer (soigneusement) le théorème d'Herman sur les difféomorphismes du cercle pour conclure que chacun des difféomorphismes apparaissant dans la décomposition de f s'écrit comme produit de deux commutateurs constitués d'éléments qui peuvent être choisis aussi proche que l'on veut de l'identité tant que f est suffisamment proche de l'identité.

Détaillons maintenant les arguments ci-dessus. Pour un entier k entre 1 et n, on note F_k le feuilletage constitué de l'ensemble des droites parallèles au k-ième axe de coordonnées. On note $\mathrm{Diff}_0^\infty(U, F_k)$ l'ensemble des difféomorphismes de U à support compact et compactement isotopes à l'identité qui préservent les feuilles du feuilletage F_k. Construisons par récurrence sur k une application définie et continue sur un voisinage de l'identité $\phi_k : \mathrm{Diff}_0^\infty(U) \to \mathrm{Diff}_0^\infty(U, F_k)$ telle que $\phi_k(Id_U) = Id_U$ et telle que, pour un difféomorphisme f suffisamment proche de l'identité :

$$p_k \circ f \circ \phi_1(f)^{-1} \circ \phi_2(f)^{-1} \circ \ldots \circ \phi_k(f)^{-1} = p_k,$$

où p_k désigne la projection sur les k premières coordonnées. Supposons $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ construites. Posons, pour un difféomorphisme f de $\mathrm{Diff}_0^\infty(U)$ proche de l'identité et pour x dans u :

$$f \circ \phi_1(f)^{-1} \circ \phi_2(f)^{-1} \circ \ldots \circ \phi_k(f)^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_k, f_{k+1}(x), f_{k+2}(x), \ldots, f_n(x)).$$

On définit alors ϕ_{k+1} par :

$$\forall x \in U, \phi_{k+1}(f)(x) = (x_1, \ldots, x_k, f_{k+1}(x), x_{k+2}, \ldots, x_n)$$

pour f suffisamment proche de l'identité, ce qui conclut la récurrence. Les applications ϕ_k ainsi construites sont C^∞, valent l'identité en l'identité et vérifient :

$$f = \phi_n(f) \circ \phi_{n-1}(f) \circ \ldots \circ \phi_1(f).$$

Fixons un entier k. On considère comme prévu un plongement :

$$\psi_k : \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k} \to V$$

qui envoie $(-1,1)^{k-1} \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \times (-1,1)^{n-k}$ sur U et le feuilletage constitué des droites parallèles au k-ième axe de coordonnées de $(-1,1)^{k-1} \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \times (-1,1)^{n-k}$ sur le feuilletage constitué des droites parallèles au k-ième axe de coordonnées de U. Le difféomorphisme $\psi_k^{-1} \circ \phi_k(f) \circ \psi_k$ est alors identifiable à une famille (à $n-1$ paramètres) de difféomorphismes du cercle. On écrit pour des éléments (x,t,y) de $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\psi_k^{-1} \circ \phi_k(f) \circ \psi_k(x,t,y) = (x, g(x,y)(t), y),$$

où $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est une application continue qui vérifie :

$$g(x,y) = Id$$

lorsque $(x,y) \notin [-1,1]^{n-1}$.

Il reste à écrire $g(x,y)$ en tant que produit de commutateurs d'éléments de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ proches de l'identité qui dépendent de manière C^∞ de x et de y, dont les dérivées par rapport à x et à y sont petites et qui valent l'identité lorsque $(x,y) \notin (-2,2)^{n-1}$.

Le lemme suivant est dû à Haller et Teichmann (voir [9], exemple 3) :

Lemme 7 *Pour tout voisinage W' l'identité dans* $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$*, il existe un voisinage* W *de l'identité dans* $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$*, des difféomorphismes* A*,* B *et* C *de* W' *et des applications*

$$a, b, c : W \to \mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

de classe C^∞*, qui valent l'identité en l'identité, et vérifient, pour tout* h *de* W *:*

$$h = [a(h), A][b(h), B][c(h), C].$$

Remarque. La démonstration de ce résultat repose sur le théorème d'Hermann pour les difféomorphismes du cercle. De plus, on peut supposer que A, B, C sont des éléments de $PSL_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Fin de la démonstration du théorème. Notons $\lambda : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ à support dans $(-2,2)^{n-1}$ qui vaut 1 sur un voisinage de $[-1,1]^{n-1}$. On choisit alors un voisinage W' de l'identité dans $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ de sorte que, pour tout difféomorphisme D de W', si l'on note $\tilde{D}$ l'application définie par :

$$\forall (x,t,y) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k},\ \tilde{D}(x,t,y) = (x, \lambda(x,y)D(t) + (1-\lambda(x,y))t, y),$$

alors $\tilde{D}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k}$ à support compact et $\psi_k \circ \tilde{D} \circ \psi_k^{-1}$ appartient au voisinage Ω de l'identité dans $Diff_0^\infty(V)$.

Lorsque f est suffisamment proche de l'identité, $g(x,y)$ appartient, pour tous x et y, au voisinage W de l'identité donné par le lemme précédent. On obtient alors que, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$g(x,y) = [a(g(x,y)), A][b(g(x,y)), B] \circ [c(g(x,y)), C]$$

puis que

$$g(x,y) = [a(g(x,y)), \tilde{A}(x,y)][b(g(x,y)), \tilde{B}(x,y)] \circ [c(g(x,y)), \tilde{C}(x,y)]$$

En effet, sur $[-1,1]^{n-1}$, on a $\tilde{A}(x,y) = A$, $\tilde{B}(x,y) = B$ et $\tilde{C}(x,y) = C$, et, hors de $[-1,1]^{n-1}$, les deux membres de l'égalité valent l'identité. Ainsi, le difféomorphisme $\psi_k^{-1} \circ \phi_k(f) \circ \psi_k$ s'écrit comme produit de 3 commutateurs d'éléments de Ω, lorsque f est suffisamment proche de l'identité. Un difféomorphisme f proche de l'identité s'écrit alors comme produit de $3n$ commutateurs d'éléments de Ω, ce qui démontre le théorème.

Références

[1] A. Avila. Distortion elements in $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.
Disponible sur arXiv :0808.2334.

[2] A. Banyaga. The structure of classical diffeomorphism groups. Mathematic and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1997).

[3] A. Bounemoura. Simplicité des groupes de transformations de surface. Ensaios Matematicos vol. 14 (2008). 1-143.

[4] D. Calegari ; M.H. Freedman. Distortion in transformation groups. With an appendix by Yves Du Cornulier. Geom. Top. 16 (2006). pp.267-293.

[5] J. Franks. Distortion in groups of circle and surface diffeomorphisms. Dynamique des difféomorphismes conservatifs des surfaces : un point de vue topologique. Panor. Synthèses, 21, SMF, Paris, 2006. pp. 35-52.

[6] J. Franks ; M. Handel. Distortion elements in group actions on surfaces. Duke Math. J. 131 (2006), no 3, pp. 441-468.

[7] E. Ghys. Groups acting on the circle. L'Enseignement Mathématique vol.47 (2001). pp. 329-407.

[8] S. Haller ; J. Teichmann. Smooth perfectness for the group of diffeomorphisms. Disponible sur arXiv :math/0409605.

[9] S. Haller ; J. Teichmann. Smooth perfectness through decomposition of diffeomorphisms into fiber preserving ones. Ann. Global Anal. Geom. 23(2003), pp. 53-63.

[10] R.C. Kirby. Stable homeomorphisms and the annulus conjecture. Ann. of Math., 2nd Ser., 89 (3) (1969), pp.575-582.

[11] F. Quinn. Ends of maps III : Dimensions 4 and 5. J. Differential Geom. 17 (1982). pp. 503-521.