Fondements mathématiques 1 : l'essentiel de la partie analyse du cours

Emmanuel Militon

Table des matières

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

1.1 Premières définitions

Une *application* f est la donnée

1. d'un ensemble de départ E ;
2. d'un ensemble d'arrivée F ;
3. d'une règle qui, à tout élément x de E, associe un unique élément de F, noté $f(x)$.

Une telle application est notée

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Si, pour un élément x de E et un élément y de F, on a $y = f(x)$, l'élément y est appelé l'*image* par f de x et l'élément x est appelé un *antécédent* de y par f.

Exemple 1.1. — L'application f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

associe, à 0, le nombre $0^2 = 0$, à 2 le nombre $2^2 = 4$, etc...

— L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est une autre application : son ensemble de départ n'est pas le même. De même, l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est distincte de f puisque son ensemble d'arrivée est distinct de celui de f.

Les passages en petit sont des passages facultatifs destinés aux lecteurs curieux. Formellement, une application est la donnée d'un triplet (E, F, G), où E et F sont des ensembles et G est une partie de l'ensemble $E \times F$ des couples (e, f) avec $e \in E$ et $f \in F$ telle que, pour tout élément e de E, il existe un unique élément f de F tel que (e, f) appartient à G.

La notion de *fonction* d'un ensemble E vers un ensemble F est un peu différente de celle d'application en ce que les éléments de E n'ont pas forcément d'image bien définie. Pour une fonction f, on appelle ensemble de définition de f l'ensemble des points x de E pour lesquels $f(x)$ est bien définie. Ainsi, une fonction définit une application de son ensemble de définition vers F. On dira que f est définie sur A si l'ensemble de définition de f est A.

Dans ce cours, on ne va considérer que des fonctions ou applications d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ vers un autre sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Dans des exercices, une fonction f sera parfois définie par une expression faisant intervenir des nombres réels. Dans ce cas, on conviendra que l'ensemble de définition de f est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où l'expression a un sens.

Exemple 1.2.

— La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque l'on peut prendre le carré de tout nombre réel.
— Par contre, la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ puisque l'on ne peut pas diviser par 0.
— Enfin, la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ (on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif).

Notation : Dans le cadre de ce cours, étant donnés deux ensembles A et B, on notera $f : A \to B$ une fonction dont l'ensemble de définition est A et est à valeurs dans B. Elle définit donc une application $A \to B$.

Définition 1.3 (Graphe d'une fonction)**.** *Soit $f : A \to B$ une fonction définie sur A et à valeurs dans B. On appelle* graphe *de f l'ensemble*

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

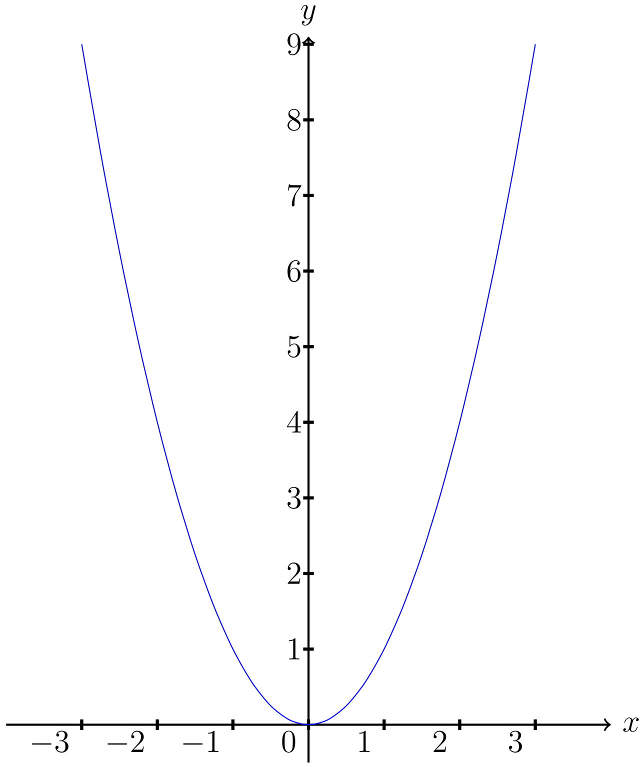
Si $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, lorsque le plan est muni d'un repère orthonormé direct, cet ensemble s'identifie à l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in A$ dans ce repère.

Dans la suite de ce cours, le plan sera muni d'un repère orthonormé direct.

Exemple 1.4.

— On représente ci-dessous le graphe de la fonction

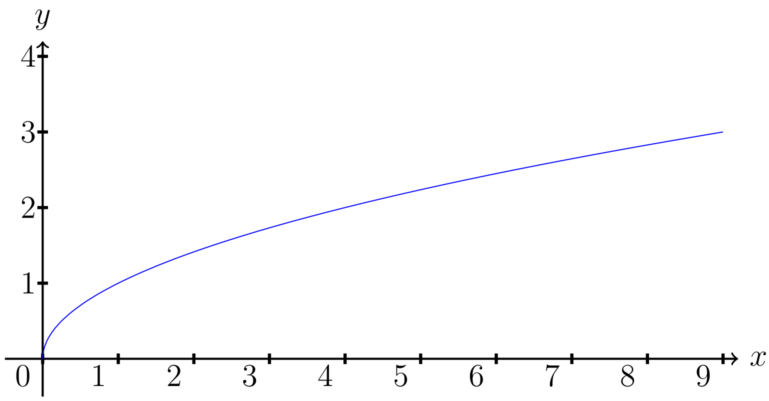
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$



Par exemple les points de coordonnées $(2, 2^2) = (2, 4)$ et $(-1, (-1)^2) = (-1, 1)$ appartiennent à ce graphe.

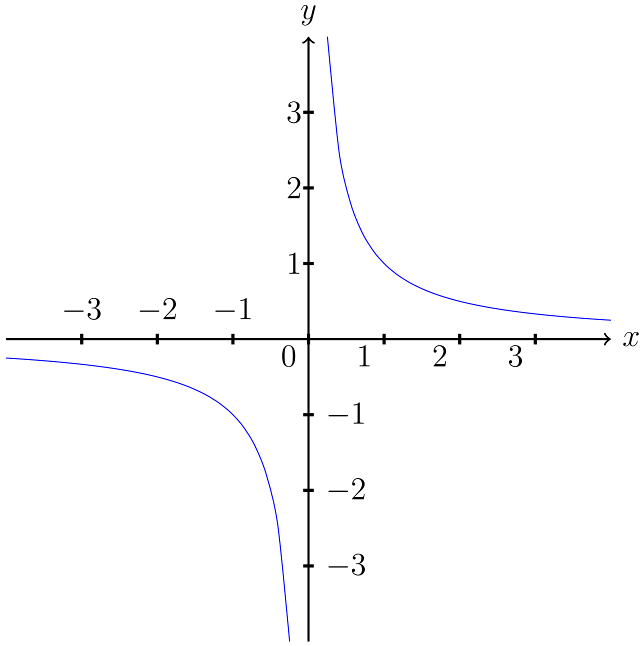
— Voici maintenant une représentation du graphe de

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$



— Enfin, voici le graphe de

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}.$$



Définition 1.5. *Soit $f : A \to B$ une application d'un ensemble A vers un ensemble B. Soit $A' \subset A$ et $B' \subset B$. On appelle* image *de A' par f le sous-ensemble de B*

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}.$$

On appelle image réciproque *de B' par f le sous-ensemble de A*

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}.$$

Exemple 1.6. Considérons la fonction

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+1 \end{array}.$$

Déterminons $f([-1,1])$. Pour tout nombre réel y, on a

$$\begin{array}{rcl} y \in f([-1,1]) & \Leftrightarrow & \exists x \in [-1,1],\ y = f(x) \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in [-1,1],\ y = 2x+1 \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in [-1,1],\ y - 1 = 2x \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in [-1,1],\ \frac{y-1}{2} = x \\ & \Leftrightarrow & -1 \leq \frac{y-1}{2} \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & -2 \leq y - 1 \leq 2 \\ & \Leftrightarrow & -1 \leq y \leq 3. \end{array}$$

Ainsi

$$f([-1,1]) = [-1,3].$$

Déterminons maintenant $f^{-1}([-1,1])$. Pour tout nombre réel x, on a

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}([-1,1]) & \Leftrightarrow & f(x) \in [-1,1] \\ & \Leftrightarrow & -1 \leq f(x) \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & -1 \leq 2x+1 \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & -2 \leq 2x \leq 0 \\ & \Leftrightarrow & -1 \leq x \leq 0. \end{array}$$

Ainsi $f^{-1}([-1,1]) = [-1,0]$.

Définition 1.7 (Restriction d'une application)**.** *Soit $f : A \to B$ une application entre deux ensembles A et B. Soit $A' \subset A$. On appelle* restriction *de f à A' l'application*

$$\begin{array}{rcl} A' & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Exemple 1.8. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est la restriction de l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

à $\mathbb{R}_+$.

Définition 1.9 (Composée de deux applications)**.** *Soient $f : A \to A'$ et $g : B \to B'$ des applications.* ***On suppose que*** *$f(A) \subset B$. On peut alors définir la* composée de g par f, *qui est l'application $A \to B'$ notée $g \circ f$ définie par*

$$\forall x \in A, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple 1.10. On note

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rrcl} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \exp(x) \end{array}.$$

On a bien $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ donc l'application $g \circ f$ est bien définie et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \exp(x^2).$$

De même $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ donc $f \circ g$ est bien définie et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\exp(x)) = (\exp(x))^2 (= \exp(2x)).$$

1.2 Monotonie

Soit I une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 1.11. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que*

— *f est* croissante *si, pour tous points x_1 et x_2 de I,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

— *f est* strictement croissante *si, pour tous points x_1 et x_2 de I,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

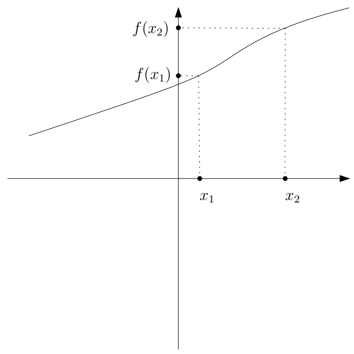


Figure 1.1 – La fonction f représentée ci-dessus est strictement croissante.

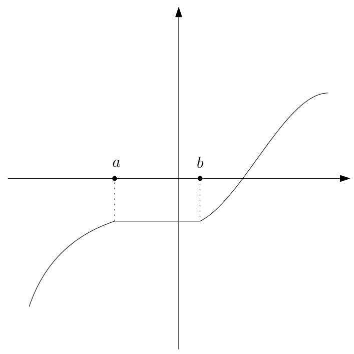


Figure 1.2 – La fonction f représentée ci-dessus est croissante mais pas strictement croissante : elle est constante sur $[a, b]$.

— *f est* décroissante *si, pour tous points x_1 et x_2 de I,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

— *f est* strictement décroissante *si, pour tous points x_1 et x_2 de I,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

— *f est* monotone *si elle est croissante ou décroissante ;*
— *f est* strictement monotone *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application définie sur I et si $J \subset I$, on dit que f est (strictement) croissante/décroissante/monotone sur J si sa restriction $f_{|J}$ est (strictement) croissante/décroissante/monotone.

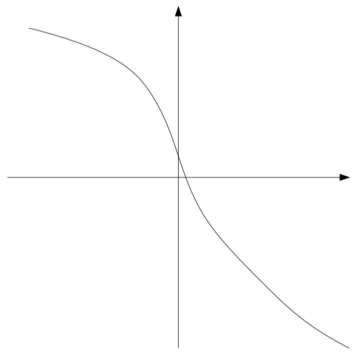


Figure 1.3 – La fonction f représentée ci-dessus est strictement décroissante.

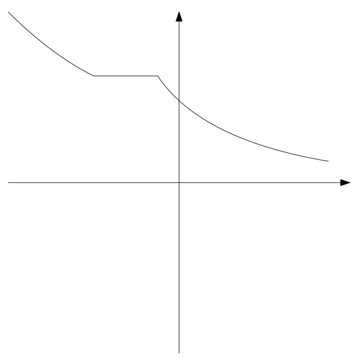


Figure 1.4 – La fonction f représentée ci-dessus est décroissante mais n'est pas strictement décroissante.

1.3 Parité/périodicité

Soit $I \subset \mathbb{R}$ une partie symétrique de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que, si un point x appartient à I alors son opposé $-x$ appartient aussi à I.

Définition 1.12. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On dit que*
- *f est paire si, pour tout point x de I, $f(-x) = f(x)$.*
- *f est impaire si, pour tout point x de I, $f(-x) = -f(x)$.*

Géométriquement, une fonction est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées puisque le point de coordonnées $(-x, f(x))$ est le symétrique du point de coordonnées $(x, f(x))$ par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, il suffit de tracer son graphe sur $I \cap [0, +\infty[$ et de déduire le reste du graphe par symétrie.

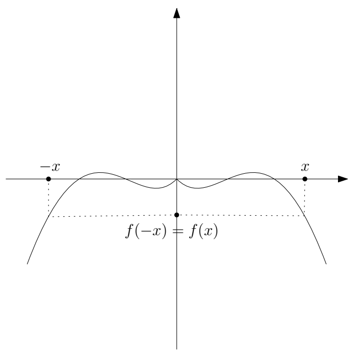


FIGURE 1.5 – La fonction représentée ci-dessus est paire.

Exemple 1.13. La fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est paire. En effet, pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. D'ailleurs, son graphe, que l'on a déjà rappelé dans ce cours, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Passons maintenant à l'interprétation géométrique de l'imparité. Comme le point de coordonnées $(-x, -f(x))$ est le symétrique du point de coordonnée $(x, f(x))$ par rapport à l'origine, une fonction est impaire si et seulement si son graphe est invariant par la symétrie de centre l'origine. Là encore, il suffit de tracer le graphe de cette fonction sur $I \cap [0, +\infty[$ et d'en déduire le reste du graphe en prenant l'image de cette portion de graphe par rapport à cette symétrie centrale.

Exemple 1.14. La fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

est impaire. En effet, en vertu de la règle des signes, pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

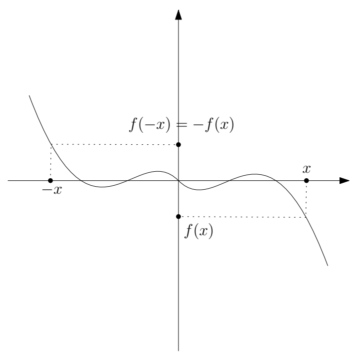


FIGURE 1.6 – La fonction représentée ci-dessus est impaire.

Maintenant, fixons un réel $T > 0$ et $I \subset \mathbb{R}$ tel que, pour tout point x de I, les points $x + T$ et $x - T$ appartiennent aussi à I.

Définition 1.15. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur I est dite périodique de période T si, pour tout point x de I,*

$$f(x + T) = f(x).$$

Le réel T est alors appelé une période de la fonction f.

Comme le point de coordonnées $(x + T, f(x))$ est l'image du point de coordonnées $(x, f(x))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(T, 0)$, une fonction est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. On verra des exemples explicites de fonctions périodiques dans le chapitre suivant.

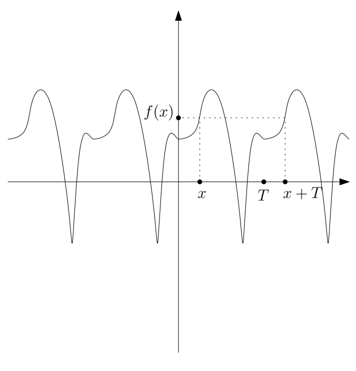


FIGURE 1.7 – La fonction représentée ci-dessus est périodique de période T.

1.4 Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $I \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.16. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite*

— minorée *s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout réel x de I,*

$$f(x) \geq m.$$

Un tel réel m est alors appelé un minorant *de f.*

— majorée *s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout réel x de I,*

$$f(x) \leq M.$$

Un tel réel M est alors appelé un majorant *de f.*

— bornée *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Un réel M est le *maximum* de f si M est un majorant de f et s'il existe un point $x \in I$ tel que $f(x) = M$. Attention : une fonction majorée n'a pas toujours un maximum. Par exemple, la restriction de la fonction inverse à $\mathbb{R}_-^*$ est majorée par 0 mais n'a pas de maximum, puisque 0 n'est l'inverse d'aucun réel.

Un réel m est le *minimum* de f si m est un minorant de f et s'il existe un point $x \in I$ tel que $f(x) = m$. Là encore, une fonction peut être minorée sans admettre de minimum.

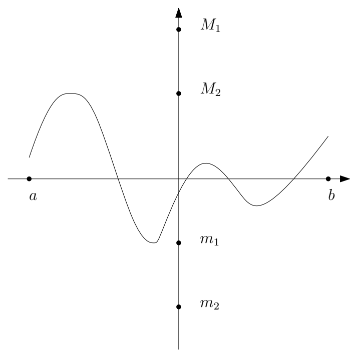


FIGURE 1.8 – La fonction représentée ci-dessus est bornée.

La fonction représentée sur la figure suivante, qui est définie sur $[a, b]$, est bornée. Les nombres réels M_1 et M_2 sont des majorants de cette fonction et les nombres réels m_1 et m_2 sont des minorants de cette fonction. Le réel M_2 est le maximum de f mais le réel M_1 est un majorant de cette fonction qui n'est pas le maximum. Le réel m_1 est le minimum de f mais le réel m_2 est un minorant de cette fonction qui n'est pas le maximum.

Chapitre 2

Fonctions usuelles

Dans cette partie, on s'appuie sur les connaissances de terminale sur les limites et les dérivées. Ces connaissances seront revues plus en profondeur dans des chapitres ultérieurs du cours.

2.1 Les fonctions sinus et cosinus

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Pour tout réel x, on note M_x l'unique point du cercle unité (le cercle de centre O et de rayon 1) tel que l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM_x}$ est égal à x radians (cf figure 2.1). Par définition, $(\cos(x), \sin(x))$ sont les coordonnées du point M_x dans le repère $\mathcal{R}$.

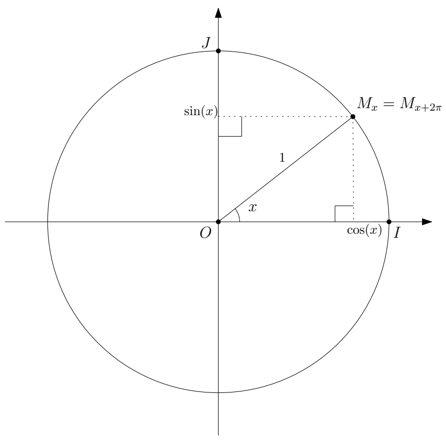


FIGURE 2.1 – Définition des fonctions cosinus et sinus

Un angle de 2π correspond à un tour complet. Par conséquent, pour tout angle x, le point M_x est le même point que le point $M_{x+2\pi}$. En particulier, en regardant les coordonnées de ces deux points dans le repère $\mathcal{R}$, on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \cos(x+2\pi) & = & \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) & = & \sin(x) \end{array} \right. .$$

Ainsi, les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques. Il suffit donc d'étudier ces fonctions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

De plus, pour tout nombre réel x, le point M_{-x} est le symétrique de M_x par rapport à l'axe des abscisses (cf figure 2.1). On en déduit que, pour tout nombre réel x,

$$\begin{cases} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \end{cases}.$$

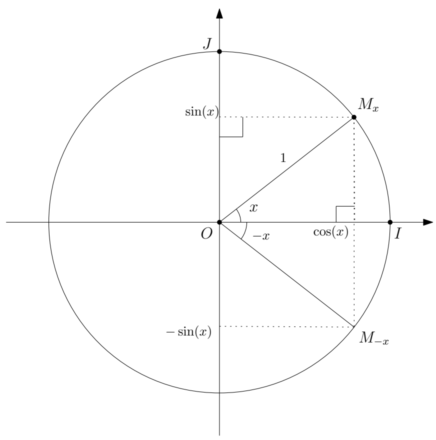


FIGURE 2.2 – Parité des fonctions cosinus et sinus

Autrement dit, la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire. Il suffit donc d'étudier chacune de ces deux fonctions sur l'intervalle $[0, \pi]$ et de déduire le reste des variations des fonctions cosinus et sinus à l'aide de la parité et de la périodicité.

Par définition du cercle de centre O et de rayon 1, pour tout angle x, le point M_x est à une distance 1 de l'origine O. Par conséquent, pour tout réel x

$$1 = OM_x^2 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2.$$

On peut notamment déduire de cette relation que, pour tout réel x,

$$\begin{cases} -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{cases}$$

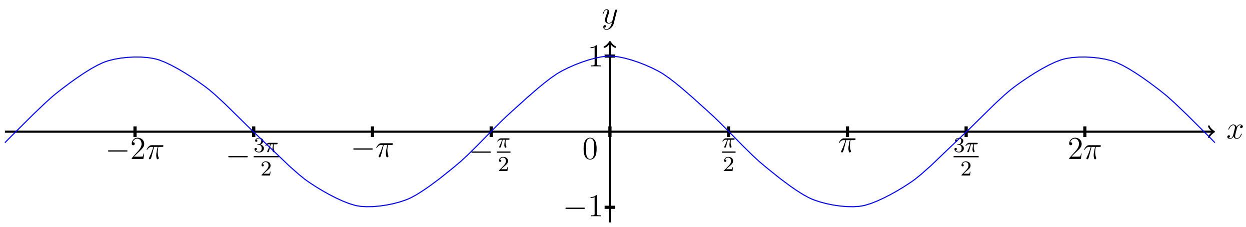
En particulier 1 est un majorant des fonctions cosinus et sinus, -1 est un minorant des fonctions cosinus et sinus. Ainsi, ces fonctions sont bornées. Remarquons que 1 est même un maximum pour ces deux fonctions (atteint en 0 pour la fonction cosinus et en $\frac{\pi}{2}$ pour la fonction sinus) et -1 est un minimum pour chacune de ces deux fonctions (atteint en π pour la fonction cosinus et en $\frac{-\pi}{2}$ pour la fonction sinus)

En utilisant la définition du cosinus, on voit que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$: l'abscisse du point M_x diminue lorsque l'on fait varier x de 0 vers π. En utilisant la définition du sinus, on voit que la fonction sinus est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

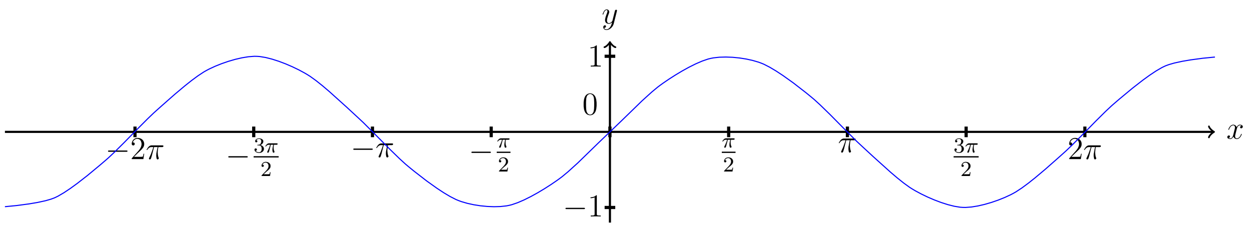
	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Variations de cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
Variations de sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Rappelons que, dans un tableau de variations, la flèche vers le bas correspond à la stricte décroissance de la fonction et la flèche vers le haut à sa stricte croissance.

De ces tableaux de variation et des propriétés de parité et de périodicité de ces fonctions, on peut en déduire l'allure des graphes des fonctions cosinus et sinus. Voici tout d'abord la représentation du graphe de la fonction cosinus.



Et voici maintenant la représentation du graphe de la fonction sinus.



Théorème 2.1 (Dérivabilité et dérivée des fonctions sinus et cosinus)**.** *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \cos' & = & -\sin \\ \sin' & = & \cos \end{array} \right. .$$

Comment se souvenir de ces formules (sans se tromper de signe !) ? On peut utiliser la formule suivante vue en terminale S valable pour tout réel x

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Si l'on dérive formellement cette expression (il est possible de justifier une telle dérivation mais on ne le fera pas dans ce cours), on obtient, pour tout réel x,

$$ie^{ix} = \cos'(x) + i\sin'(x).$$

Or, $ie^{ix} = -\sin(x) + i\cos(x)$. Ainsi, l'égalité des parties réelles nous donne $\cos'(x) = -\sin(x)$ et l'égalité des parties imaginaires nous donne $\sin'(x) = \cos(x)$.

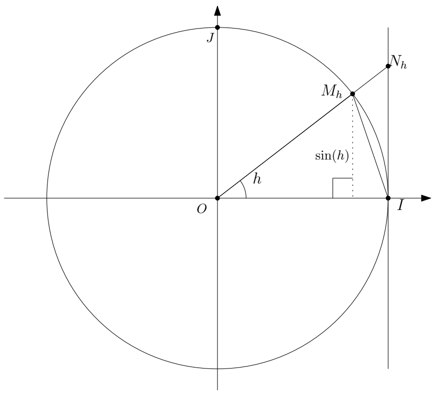
Démonstration géométrique de la dérivabilité des fonctions cosinus et sinus. On donne ici une démonstration qui utilise la notion d'aire vue dans les classes antérieures et utilise la continuité des fonctions sinus et cosinus, que l'on admettra. Cette propriété de continuité peut également se démontrer de manière géométrique mais une telle démonstration nous emmènerait trop loin par rapport au but du cours. On utilisera également les formules d'addition pour le sinus et le cosinus, formules qui ont été vues en filière S.

Le point clé et la partie la plus difficile de cette démonstration consiste à démontrer que la fonction sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1 (= \cos(0))$. Il s'agit ensuite d'utiliser les formules d'addition pour montrer que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

On veut donc montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

On fixe donc un nombre réel h dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. On reprend les notations du début de la section (notamment le point M_h est bien défini). On note N_h le point d'intersection de la droite (OM_h) avec la droite d'équation $x = 1$ (voir la figure ci-dessous).



Le triangle OM_hI a une base OI qui a pour longueur 1 et une hauteur correspondante de longueur $\sin(h)$ puisque $\sin(h)$ est la deuxième coordonnée de M_h dans le repère $\mathcal{R}$. Donc l'aire de ce triangle est $\frac{\sin(h)}{2}$.

Regardons maintenant le secteur S du disque de rayon 1 délimité par les segments $[OI]$ et $[O, M_h]$ qui contient l'arc de cercle qui va de I vers M_h en parcourant le cercle dans le sens direct. Comme le secteur a un angle de h radian, son aire va être égale à $\frac{h}{2\pi}$ multiplié pa rl'aire du disque unité, qui vaut π. L'aire de S vaut donc $\frac{h}{2}$.

Comme le triangle OM_hI est inclus dans le secteur S, on en déduit que l'aire du triangle OM_hI est plus petite que l'aire du secteur S et $\frac{\sin(h)}{2} \leq \frac{h}{2}$ d'où

$$\sin(h) \leq h.$$

Par ailleurs, comme on l'a vu en TD, le point N_h a pour coordonnées $(1, \tan(h) = \frac{\sin(h)}{\cos(h)})$ dans le repère $\mathcal{R}$. Ainsi, comme $OI = 1$ et $IN_h = \tan(h)$, l'aire du triangle OIN_h rectangle en I vaut $\frac{\tan(h)\times 1}{2}$. Comme le secteur D' est inclus dans ce triangle rectangle OIN_h, on obtient que $\frac{h}{2} \leq \frac{\tan(h)}{2}$, ce qui implique, en multipliant par $2\cos(h)$, que

$$h\cos(h) \leq \sin(h).$$

Pour résumer, on a démontré que pour tout nombre réel h dans $]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$h\cos(h) \leq \sin(h) \leq h.$$

En divisant par h, on obtient

$$\cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1.$$

On a aussi

$$\cos(-h) = \cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} = \frac{\sin(-h)}{-h} \leq 1.$$

Ainsi, pour tout nombre réel h dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$,

$$\cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1.$$

Or $\lim_{h\to 0} \cos(h) = \cos(0) = 1$ (on utilise ici la continuité de la fonction cosinus que l'on a admise) d'où, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

On a obtenu que la fonction sinus est dérivable en 0 et que $\sin'(0) = 1$.

Étudions maintenant la dérivabilité de la fonction cosinus en 0. Pour tout nombre réel h différent de 0, on a

$$\begin{array}{rcl}\frac{\cos(h)-\cos(0)}{h} & = & \frac{\cos(\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-\cos(0)}{h} \\ & = & \frac{\cos(\frac{h}{2})^2-\sin(\frac{h}{2})^2-1}{h} \\ & = & \frac{1-2\sin(\frac{h}{2})^2-1}{h} \\ & = & \frac{2h}{4}\frac{\sin(\frac{h}{2})^2}{(\frac{h}{2})^2}\end{array}$$

où on a utilisé que $\cos(\frac{h}{2})^2+\sin(\frac{h}{2})^2=1$. Maintenant, le facteur de gauche $\frac{2h}{4}$ a pour limite 0 lorsque h tend vers 0 et le facteur de droite $\frac{\sin(\frac{h}{2})^2}{(\frac{h}{2})^2}$ a pour limite 1 par composition des limites et comme $\lim_{h\to 0}(\frac{h}{2})^2=0$. Ainsi, cos est dérivable en 0 de dérivée $0=\sin(0)$.

Maintenant, fixons un nombre réel a. On va démontrer que la fonction sin est dérivable en a de dérivée $\cos(a)$. Pour $h\neq 0$,

$$\begin{array}{rcl}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} & = & \frac{\cos(a)\sin(h)+\sin(a)\cos(h)-\sin(a)}{h} \\ & = & \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}+\sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h}\end{array}$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\cos(a)\times 1+\sin(a)\times 0=\cos(a).$$

On a démontré que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée la fonction cosinus.

De même, montrons que la fonction cos est dérivable en $a\in\mathbb{R}$ de nombre dérivé $-\sin(a)$. Pour $h\neq 0$, on a

$$\begin{array}{rcl}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} & = & \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h} \\ & = & \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(a)\frac{\sin(h)}{h}\end{array}$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}=\cos(a)\times 0-\sin(a)\times 1=-\sin(a).$$

Ainsi, la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $-\sin$. □

Maintenant que l'on a introduit les fonctions cosinus et sinus, on peut définir d'autres fonctions qui vérifient des propriétés de symétrie (parité et périodicité).

Exemple 2.2. Étudions la parité et la périodicité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(\sin(3x))^3.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl}f(-x) & = & (\sin(3(-x)))^3 \\ & = & (-\sin(3x))^3 \\ & = & -(\sin(3x))^3 \\ & = & -f(x),\end{array}$$

où on a utilisé l'imparité de la fonction sinus pour passer de la première à la deuxième ligne. Ainsi, la fonction f est impaire. De plus, pour tout nombre réel x,

$$\begin{array}{rcl}f(x+\frac{2\pi}{3}) & = & \left(\sin(3(x+\frac{2\pi}{3}))\right)^3 \\ & = & (\sin(3x+2\pi))^3 \\ & = & (\sin(3x))^3 \\ & = & f(x),\end{array}$$

où on a utilisé la 2π-périodicité de la fonction sinus pour passer de la deuxième à la troisième ligne. Ainsi, la fonction f est $\frac{2\pi}{3}$-périodique. Il suffit donc de l'étudier sur $[0,\frac{\pi}{3}]$. En effet, on peut déduire le graphe de $f_{|[-\frac{\pi}{3},0]}$ du graphe de $f_{|[0,\frac{\pi}{3}]}$ par symétrie centrale par rapport à l'origine, comme f est impaire. Ensuite, on déduit le graphe de f sur $\mathbb{R}$ tout entier à partir du graphe de $f_{|[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]}$ à l'aide de translations de vecteurs $(\frac{2k\pi}{3},0)$ avec $k\in\mathbb{Z}$, par $\frac{2\pi}{3}$-périodicité de f.

Exemple 2.3. Étudions la parité et la périodicité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (\cos(2x))^2.$$

Pour tout nombre réel x,

$$g(-x) = (\cos(-2x))^2 = (\cos(2x))^2 = g(x),$$

par parité du cosinus. Ainsi, la fonction g est paire. De plus, pour tout nombre réel x,

$$g(x + \frac{\pi}{2}) = (\cos(2x + \pi))^2 = (-\cos(2x))^2 = (\cos(2x))^2 = g(x).$$

La fonction g est donc $\frac{\pi}{2}$-périodique.

Il suffit donc d'étudier la fonction g sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$. En effet, on peut déduire le graphe de $g_{|[-\frac{\pi}{4},0]}$ du graphe de $g_{|[0,\frac{\pi}{4}]}$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, comme g est paire. Ensuite, on déduit le graphe de g sur $\mathbb{R}$ tout entier à partir du graphe de $g_{|[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]}$ à l'aide de translations de vecteurs $(\frac{k\pi}{2}, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, par $\frac{\pi}{2}$-périodicité de g.

2.2 La fonction logarithme népérien

On admettra le théorème suivant, qui est un cas particulier d'un théorème vu en terminale sur les primitives d'une fonction continue. Ces connaissances sur les primitives seront revues en cours de Fondements 2.

Théorème 2.4 (Définition du logarithme népérien)**.** *Il existe une unique fonction* $f : \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *telle que*

$$\begin{cases} \forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est appelée le logarithme népérien *et est notée* ln.

Ainsi, par définition, $\ln(1) = 0$, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

On en déduit immédiatement que le logarithme népérien est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$.

De cette formule pour la dérivée, on verra dans le chapitre 4 de ce cours que l'on peut déduire le théorème suivant qui a déjà été vu en Terminale.

Théorème 2.5. *Soit* $u : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Supposons que* u *est dérivable sur* I *et que, pour tout nombre réel* x *de* I, $u(x) > 0$.
Alors $\ln \circ u$ *est dérivable sur* I *de fonction dérivée définie par*

$$\forall x \in I, (\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Historiquement, le logarithme était utilisé comme un outil de calcul : il transforme les produits (parfois longs à calculer) en des sommes (beaucoup plus rapides à calculer). Cette propriété est résumée ci-dessous.

Théorème 2.6. *Pour tous nombres réels $x > 0$ et $y > 0$,*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

De cette propriété, on peut déduire sans trop de difficulté les propriétés suivantes.

Corollaire 2.7. *Pour tout nombre réel $x > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\ln(x^n) = n \ln(x).$$

Pour tous nombres réels $x > 0$ et $y > 0$,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

La démonstration de ces deux propriétés est l'objet de l'exercice suivant.

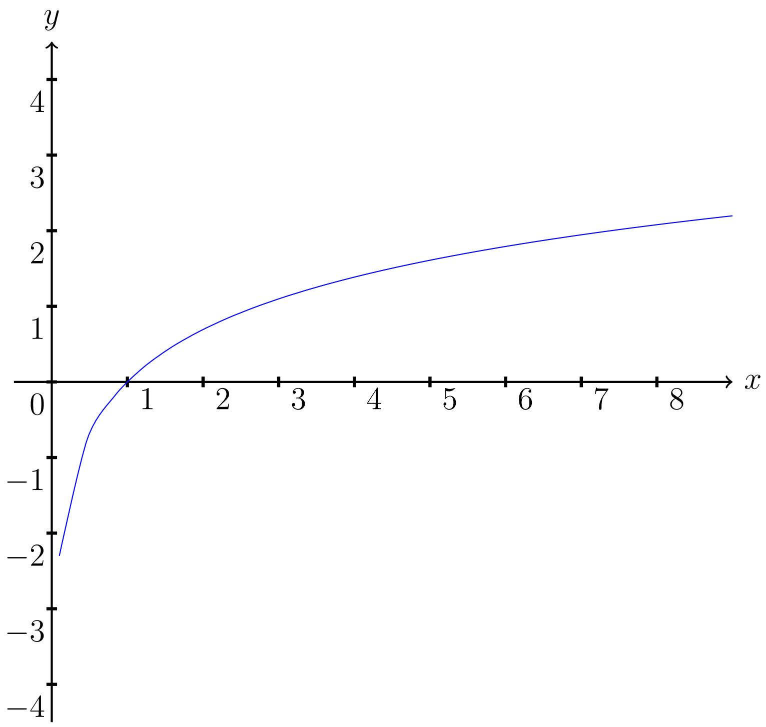
Exercice 2.8.

1. On fixe un nombre réel $y > 0$. On note f_y la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x > 0,\ f_y(x) = \ln(xy) - \ln(x).$$
Montrer que la fonction f_y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
2. En déduire que, pour tous nombres réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. En déduire que, pour tout nombre réel $x > 0$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
4. En déduire que, pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

On démontrera dans le chapitre suivant que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty. \end{cases}.$$

On représente ci-dessous l'allure du graphe de la fonction logarithme népérien.



2.3 La fonction exponentielle

Le théorème suivant est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, qui sera revu plus tard, et de la stricte croissance du logarithme népérien.

Théorème 2.9. *Pour tout nombre réel x, il existe un unique nombre réel strictement positif* $\exp(x) > 0$ *tel que*

$$\ln(\exp(x)) = x.$$

Le nombre $\exp(x)$ *est appelé* l'exponentielle de x *et la fonction* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est appelé la* fonction exponentielle*.*

Autrement dit, le nombre $\exp(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $y > 0$

$$\ln(y) = x.$$

Cette définition implique en particulier que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0.$$

La théorème suivant sera démontré lors du chapitre 5 de ce cours.

Théorème 2.10. *La fonction* $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de fonction dérivée* $\exp' = \exp$*.*

En particulier, pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De cette formule pour la dérivée, on verra dans le chapitre 4 de ce cours que l'on peut déduire le théorème suivant qui a déjà été vu en Terminale.

Théorème 2.11. *Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
On suppose que la fonction u est dérivable sur I. Alors la fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I de fonction dérivée définie par

$$\forall x \in I,\ (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \exp(u(x)).$$

La fonction logarithme népérien transforme les produits en somme. Du fait de sa définition, il semble alors naturel que l'exponentielle transforme les sommes en produit.

Théorème 2.12.
— $\exp(0) = 1$.
— *Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.*
— *Pour tout nombre réel x et tout entier relatif n, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.*
— *Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x - y) = \exp(x) \exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.*

Ce théorème justifie que l'on adopte la notation $\exp(x) = e^x$. En effet, si n et m désigne deux entiers relatifs et a désigne un nombre réel non-nul, $a^{n+m} = a^n a^m$ et la propriété de l'exponentielle est une extension de cette propriété des entiers relatifs à des nombres réels quelconques. En particulier, on note $e = \exp(1)$.

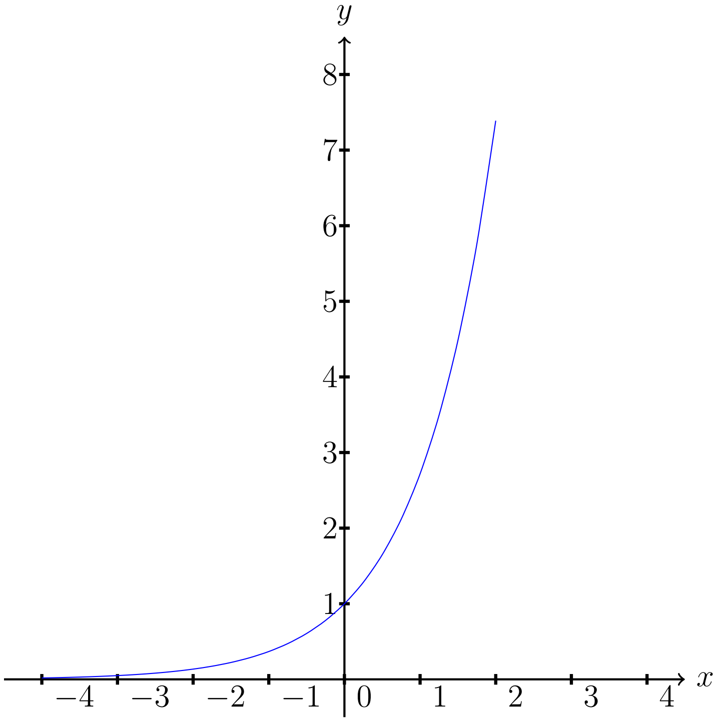
Le théorème 2.12 est démontré à l'occasion de l'exercice suivant.

Exercice 2.13.
1. Démontrer que $\exp(0) = 1$.
2. En utilisant les propriétés du logarithme népérien, démontrer que, pour tous nombres réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
4. Montrer que, pour tout entier relatif n, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

On démontrera dans le chapitre suivant que

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0. \end{cases}.$$

Enfin, on représente ci-dessous l'allure du graphe de la fonction exponentielle.



2.4 Les fonctions puissance, exponentielle en base $a > 0$ et logarithme en base $a > 0$

Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif n, on a

$$\exp(n \ln(a)) = \exp(\ln(a))^n = a^n.$$

Par extension, pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, on *définit*

$$a^b = \exp(b \ln(a)) = e^{b \ln(a)}.$$

Les propriétés suivantes seront démontrées en TD et généralisent les propriétés des puissances entières.

Proposition 2.14. *Pour tous réels a, b, $s > 0$ et $t > 0$, on a les relations suivantes.*

$$\begin{array}{ccc} s^a t^a = (st)^a & s^a s^b = s^{a+b} & (s^a)^b = s^{ab} \\ \ln(s^a) = a \ln(s) & 1^a = 1 & s^0 = 1 \end{array}$$

Cette extension de la notion de puissance nous permet de définir de nouvelles fonctions qui seront étudiées en TD.

Définition 2.15 (Les fonctions puissances réelles)**.** *On appelle fonction puissance une fonction de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a \end{array},$$

où $a \in \mathbb{R}$.

En particulier, pour un entier naturel $n > 0$ et un nombre réel $x > 0$, rappelons que $\sqrt[n]{x}$ désigne l'unique solution positive de l'équation, d'inconnue y, $y^n = x$. Comme $(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$ et comme $x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)} > 0$, on obtient que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Définition 2.16 (exponentielle en base $a > 0$)**.** *On fixe $a > 0$. On appelle* exponentielle en base a *la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \exp_a : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a^x \end{array}.$$

On a toujours la propriété selon laquelle, pour tous nombres réels x et y, $\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$. En réalité, on peut démontrer (mais on manque d'outils dans ce cours pour le faire) que, outre la fonction nulle, ces fonctions exponentielles sont les seuls exemples de fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui transforment les sommes en produits.

Enfin, voici une dernière définition pour clore ce chapitre.

Définition 2.17 (logarithme en base $a > 0$)**.** *Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. On appelle* logarithme en base a *la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \log_a : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}.$$

On a alors, pour tout réel x,

$$\log_a(a^x) = \frac{\ln(e^{x\ln(a)})}{\ln(a)} = \frac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x.$$

Ainsi, on a le même lien entre le logarithme en base $a > 0$ et l'exponentielle en base $a > 0$ qu'entre l'exponentielle et le logarithme népérien. Ce lien sera précisé plus formellement dans le chapitre 5 de ce cours.

Par ailleurs, on a toujours, pour tous nombres réels $x > 0$ et $y > 0$,

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

On peut montrer (mais on ne le fera pas pour les mêmes raisons que pour l'exponentielle en base a) que les fonctions logarithmes en base a sont les seules fonctions continues non-constantes $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui transforment les produits en sommes.

Chapitre 3

Limites, continuité

Dans cette partie consacrée à la notion de limite et à la continuité, la plupart des résultats seront admis. Pour des démonstrations de ces résultats et une revue plus en profondeur des notions de limite et de continuité, on renvoie le lecteur au cours de Approfondissements mathématiques 1.

3.1 Définitions

Dans toute la suite, on note $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.1 (Limite finie en un point réel). *Soient a et ℓ des nombres réels. On dit que la fonction f a pour limite ℓ en a si tout intervalle ouvert qui contient ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.*

Cette définition peut être formalisée par la phrase logique suivante

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Cela signifie que pour $\epsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, on peut trouver un petit intervalle autour de a, de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$ tel que, pour tout x dans $I\cap]a-\alpha, a+\alpha[$ (*i.e.* pour x suffisamment proche de a) $f(x)$ appartient à l'intervalle $]\ell-\epsilon, \ell+\epsilon[$.

Maintenant, pour comprendre l'équivalence de cette phrase logique avec la définition ci-dessus, il s'agit de remarquer que tout intervalle ouvert qui contient ℓ contient un intervalle de la forme $]\ell-\epsilon, \ell+\epsilon[$.

Définition 3.2 (Continuité en un point). *Si $a \in I$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, on dit que f est continue en a.*

En réalité, lorsque $a \in I$, il suffit que $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et soit un nombre réel pour que f soit continue en a. En effet, dans ce cas, on a nécessairement $\ell = f(a)$.

En effet, si l'on avait $\ell \neq f(a)$ et si l'on prend un intervalle ouvert J qui contient ℓ et ne contient pas $f(a)$: il ne contient pas $f(a)$ alors que a est aussi proche que l'on souhaite de a, en contradiction avec la définition de limite en un point d'une fonction.

Définition 3.3 (Continuité sur un ensemble). *On dit que f est continue sur I si f est continue en tous les points de I.*

Exemple 3.4 (admis)**.** Les fonctions exponentielle, logarithme népérien, $x \to x^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $x \to |x|$ sont continues sur leur ensemble de définition.

Définition 3.5 (Limite infinie en un point réel)**.** *La fonction f a pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. La fonction f a pour limite $-\infty$ en a si tout intervalle de la forme $]-\infty, A]$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Là encore, on peut formaliser la définition de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ par la phrase logique

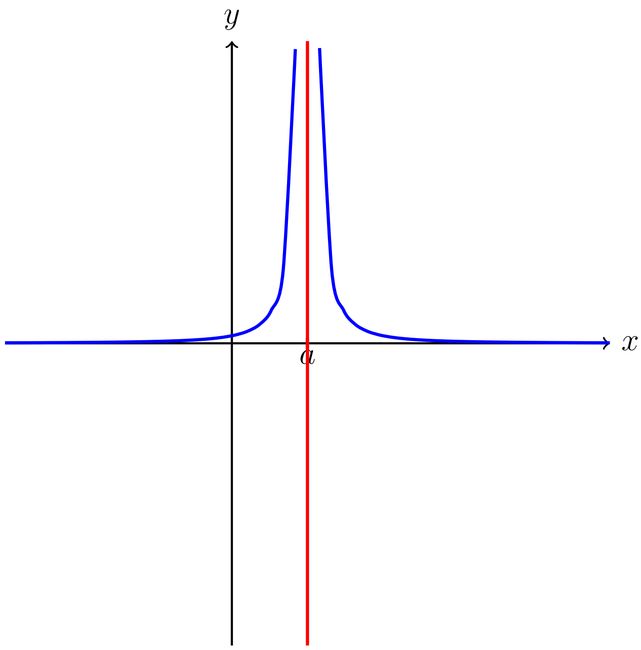
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A.$$

De même, on peut formaliser la définition de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ par la phrase logique

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) < A.$$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors le graphe de f admet pour *asymptote* la droite d'équation $x = a$. Les points du graphe d'abscisse proche de a seront proches de cette droite en partant vers le haut (cas où $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$) ou vers le bas (cas où $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$).

On a représenté ci-dessous une fonction f telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. On a aussi représenté l'asymptote d'équation $x = a$ de ce graphe.



Définition 3.6 (Limite à droite/à gauche)**.** *Soient $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ et a un nombre réel.*
On dit que f a pour limite à droite ℓ en a si la restriction $f_{|]a,+\infty[\cap I}$ a pour limite ℓ en a. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$.
On dit que f a pour limite à gauche ℓ en a si la restriction $f_{|]-\infty,a[\cap I}$ a pour limite ℓ en a. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$.

Exemple 3.7. Par exemple, on peut démontrer en utilisant la définition que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

et que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Définition 3.8 (Continuité à droite/à gauche)**.** *Soit $a \in I$. On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.*
On dit que f est continue à gauche en a si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Proposition 3.9. *Soit $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La fonction f est continue en a.*
2. *La fonction f est continue à droite et à gauche en a.*
3. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Définition 3.10 (Limite finie en l'infini)**.** *Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*
On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ si $\lim_{x\to+\infty} f(-x) = \ell$. Dans ce cas, on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

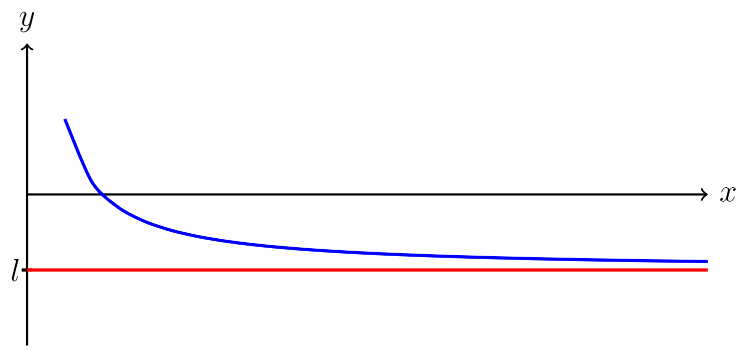
Le lecteur curieux qui a vu la formalisation logique des définitions précédentes est invité à réfléchir à une formalisation logique de la définition ci-dessus avant de lire la réponse ci-dessous. La phrase mathématique $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ se traduit par

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

La phrase mathématique $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ se traduit par

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x < A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote au graphe de f. On a représenté ci-dessous le graphe d'une fonction f telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ainsi que son asymptote d'équation $y = \ell$.



Définition 3.11 (Limite infinie en l'infini)**.** *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.*
On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty, A]$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = +\infty$. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = -\infty$. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Là encore, le lecteur curieux est normalement capable de donner lui-même la formalisation logique de cette définition.

3.2 Opérations sur les limites

Soient f et g des fonctions définies sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note alors $f + g$ la fonction

$$f + g : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

et $f.g$ la fonction

$$f.g : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \times g(x) = f(x).g(x) \end{array}.$$

On fixe un élément a de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et des nombres réels ℓ et ℓ'.

Dans cette section, nous rappelons sans démonstration les différents théorèmes d'opérations sur les limites. Pour une démonstration et une compréhension plus en profondeur de ces résultats, on renvoie au cours de Approfondissements mathématiques 1.

3.2.1 Limite d'une somme

Le tableau suivant rappelle ce que l'on sait de la limite de la somme de deux fonctions en fonction de la limite de chacune de ces deux fonctions.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Le point d'interrogation dans le tableau marque le fait que, si l'on sait que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, on ne peut pas conclure a priori sur la limite de $f + g$ en a. On parle alors de forme indéterminée.

3.2.2 Limite d'un produit

Passons maintenant à la limite d'un produit de fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) =$	$\ell.\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Retenons que dans le cas où l'une des limites est infinie et l'autre existe et est non-nulle, la limite du produit est infinie et le signe de cette limite est donnée par la règle des signes (si les signes sont opposés, on a un résultat négatif et, s'ils sont identiques, on a un résultat positif).

Là encore, on a mis un point d'interrogation dans le tableau lorsque l'on ne peut pas conclure quant à la limite de $f(x).g(x)$ en a.

En résumé, les formes indéterminées sont « $-\infty + +\infty$ » et « $\infty \times 0$ ». On verra dans les sections suivantes des techniques pour lever ces indéterminations et déterminer la limite de $f+g$ ou $f.g$ malgré tout.

3.2.3 Opérations sur les fonctions continues

De ces théorèmes sur les opérations sur les limites, on déduit immédiatement des théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.

Théorème 3.12. *On suppose que a est un point de I. Soient λ et μ des nombres réels.*
Si les fonctions f et g sont continues en a, alors $\lambda.f + \mu.g$ est continue en a et $f.g$ est continue en a.
Si les fonctions f et g sont continues sur I, alors $\lambda.f + \mu.g$ est continue sur I et $f.g$ est continue sur I.

Exemple 3.13. En utilisant le fait que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

et les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$ (ce qui peut se démontrer à l'aide de la définition de la continuité), montrons que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.
La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq 0$. Comme les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

sont continues sur $\mathbb{R}$ (par hypothèse de récurrence pour la première) alors leur produit

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n.x = x^{n+1} \end{array}$$

est continu sur $\mathbb{R}$, d'où la propriété au rang $n+1$.
Ceci achève la récurrence.

— On appelle *fonction polynômiale* toute fonction de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots + a_n.x^n \end{array}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, et où les a_i, pour $0 \leq i \leq n$, sont des nombres réels. À l'aide d'une récurrence et de la propriété relative à la somme de deux fonctions continues, on démontre que toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.

3.2.4 Limites et composition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions définies respectivement sur des parties I et J de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(I) \subset J$ de sorte que la composée $g \circ f$ est bien définie sur I.

Théorème 3.14 (Limite d'une composée). *Soient a, ℓ et ℓ' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Supposons que*

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = \ell \\ \lim_{y\to \ell} g(y) = \ell' \end{cases}.$$

Alors

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = \ell'.$$

Ce théorème s'étend naturellement au cas des limites à gauche ou à droite.

Exemple 3.15. Calculons $\lim_{x\to 1} \sqrt{e^x + x + 1}$. D'après les théorèmes de sommes de limites et par continuité des fonctions polynômiales et de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x\to 1} e^x + x + 1 = e^1 + 1 + 1 = 2 + e.$$

Or

$$\lim_{Y\to 2+e} = \sqrt{2+e}$$

par continuité de la fonction $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}_+$. D'où

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{e^x + x + 1} = \sqrt{2+e}.$$

Comme précédemment, le théorème de composition des limites a une conséquence sur les fonctions continues.

Théorème 3.16 (Composition de fonctions continues)**.** *Soit a un point de I.*
Si la fonction f est continue en a et la fonction g est continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.
Si la fonction f est continue sur I et la fonction g est continue sur J, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

En particulier, en composant une fonction f quelconque avec la fonction inverse, on en déduit des limites pour l'inverse de f.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\ell \neq 0$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} =$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Si f et g sont deux fonctions définies sur I, en écrivant $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x).\frac{1}{g(x)}$ et en utilisant les théorèmes relatifs à la limite d'un produit, on peut en déduire la limite d'un quotient.

3.3 Croissances comparées

Pour lever les indéterminations en pratique, en général, il s'agit de factoriser par le terme dominant. Par exemple, calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x + 1$. On tombe ici sur une forme indéterminée $(+\infty + (-\infty))$. On factorise donc par le terme dominant en $+\infty$, qui est x^2. Pour $x > 0$, on a

$$x^2 - x + 1 = x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}).$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 - 0 + 0 = 1 \end{cases},$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty.$$

Quand on veut étudier des fonctions faisant intervenir les fonctions exponentielles, logarithme népérien, et les fonctions puissances, on a besoin de connaître les vitesses de croissance respectives de ces fonctions. L'idée générale est que, en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances qui l'emportent sur le logarithme népérien. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 3.17 (Croissances comparées)**.** *Soit $a > 0$. On a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mid x \mid^a e^x = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^a \ln(x) = 0$$

Ce théorème sera démontré dans la section suivante de ce chapitre.

En passant à l'inverse, on déduit de ce théorème que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

et que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln(x)} = +\infty.$$

De plus, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}.\frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

et que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}.\frac{x}{e^x} = 0.$$

3.4 Limites et inégalités

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$.

<u>Notation :</u> On note $\overline{I}$ l'intervalle I auquel on a rajouté ses extrémités, éventuellement infinies. Ainsi, si I est l'intervalle $]0,1[$ ou $[0,1[$ ou $]0,1]$ ou $[0,1]$, alors $\overline{I} = [0,1]$. Si $I =]0,+\infty[$, alors $\overline{I} = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$. Si $I =]-\infty,1]$, alors $\overline{I} =]-\infty,1]\cup\{-\infty\}$.

En particulier, on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. On étend la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en décrétant que

$$\forall a \in \mathbb{R}, -\infty < a < +\infty$$

et

$$-\infty < +\infty.$$

Théorème 3.18 (Passage à la limite dans les inégalités)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit a un point de $\overline{I}$.*

Supposons que

1. *$\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$;*
2. *Pour tout point x de I, $f(x) \leq g(x)$.*

Alors $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Noter que l'on ne peut obtenir qu'une inégalité large en conclusion dans ce théorème. En effet, pour tout $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$, mais, lorsque l'on passe à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, les membres de gauche et de droite de l'inégalité ont la même limite : elle vaut 1.

Passons maintenant au théorème d'encadrement, appelé aussi théorème des gendarmes.

Théorème 3.19 (Théorème d'encadrement)**.** *On note $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On fixe un point a de $\overline{I}$.*

1. Supposons que

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \end{cases}.$$

Alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.

2. Supposons que

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \to a} h(x) = -\infty \end{cases}.$$

Alors $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$.

3. Supposons que

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Alors $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

Dans la figure ci-dessous, on a noté $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ les courbes représentatives respectives de f, g et h.

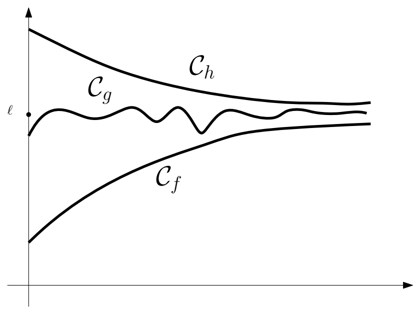


FIGURE 3.1 – Les fonctions f, g et h vérifient $f \leq g \leq h$.

Sous les hypothèses du troisième point du théorème ci-dessus, la courbe représentative de g est coincée entre les courbes représentatives de f et de h. On voit alors que, nécessairement, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$: la courbe représentative de g doit aussi avoir pour asymptote la droite d'équation $y = \ell$.

Les théorèmes de passage à la limite dans les inégalités et d'encadrement sont admis. Ils se démontrent à l'aide de la définition de la notion de limite. Pour une démonstration, on renvoie au cours de Approfondissements mathématiques 1.

Dans l'exercice suivant, on va appliquer les résultats précédents pour démontrer les théorèmes relatifs aux croissances comparées.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty & \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty & \lim_{x \to -\infty} \mid x \mid^a e^x = 0 \end{array}.$$

Exercice 3.20. 1. À l'aide d'une étude de fonction, montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$e^x - x \geq 1.$$

2. En déduire que
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}} = +\infty$.
   (d) pour tout nombre réel $a > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$.
   (e) pour tout nombre réel $a > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mid x \mid^a e^x = 0$.

En utilisant les mêmes idées que dans l'exercice ci-dessus, on va démontrer que, pour tout nombre réel $a > 0$,

$$\lim_{x\to 0} x^a \ln(x) = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0,$$

ce qui achèvera la démonstration du théorème 3.17.

Fin de la démonstration du théorème 3.17. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0,\ f(x) = x\ln(x).$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$) et

$$\forall x > 0,\ f'(x) = 1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour $x < e^{-1}$,

$$f'(x) < f'(e^{-1}) = \ln(e^{-1}) + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et, pour tout nombre réel x dans $]0, e^{-1}]$,

$$f(x) = x\ln(x) > f(e^{-1}) = -e^{-1}.$$

De plus, comme $x > 0$ et $\ln(x) < \ln(e^{-1}) < 0$, on a $x\ln(x) \leq 0$. On en déduit que

$$\forall x \in]0, e^{-1}],\ 0 \geq x^2\ln(x) \geq -xe^{-1}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} -xe^{-1} = 0$, alors, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0.$$

Par conséquent, pour $a > 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} x^a\ln(x) = \lim_{x\to 0} (x^{\frac{a}{2}})^2 \frac{2}{a} \ln(x^{\frac{a}{2}}) = 0$$

d'après le théorème de composition des limites car $\lim_{x \to 0} x^a = 0$ (voir TD pour une démonstration de ceci). Comme

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{X \to 0} -X^a \ln(X) = 0 \end{cases},$$

alors, par composition des limites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = \lim_{x \to +\infty} -\left(\frac{1}{x}\right)^a \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

□

3.5 Fonctions monotones et limites

On note a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. On note $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$. Le théorème suivant est l'analogue continu du théorème concernant les suites monotones.

Théorème 3.21 (Limites et monotonie)**.**

1. *Supposons que f est croissante. Alors f admet une limite ℓ en a et une limite ℓ' en b. De plus*

$$\forall y \in]a, b[, \ \ell \leq f(y) \leq \ell'.$$

2. *Supposons que f est décroissante. Alors f admet une limite ℓ en a et une limite ℓ' en b. De plus*

$$\forall y \in]a, b[, \ \ell \geq f(y) \geq \ell'.$$

ATTENTION : si l'on souhaite appliquer ce théorème à une fonction définie sur un intervalle $]a', b'[$ qui contient $[a, b]$, le théorème ne donne que l'existence d'une limite à droite de la fonction en a et une limite à gauche de la fonction en b.

Ainsi, une fonction monotone définie sur un intervalle a une limite à gauche et à droite en tout point de son ensemble de définition.

En application de ce théorème, on va démontrer que $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. Par définition de la fonction ln, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \ \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

Comme la fonction ln a une dérivée strictement positive sur son ensemble de définition, alors la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème ci-dessus, les limites $\ell = \lim_{x \to 0} \ln(x)$ et $\ell' = \lim_{x \to +\infty} \ln(x)$ existent. La première ℓ appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et la deuxième ℓ' appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Mais pour tout entier n relatif, d'après le théorème ci-dessus,

$$\ell \leq \ln(2^n) = n \ln(2) \leq \ell'.$$

Par conséquent, comme $\ln(2) > \ln(1) = 0$ donc $\ln(2) \neq 0$, on a nécessairement $\ell = -\infty$ et $\ell' = +\infty$. □

3.6 Continuité sur un intervalle

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ (l'hypothèse selon laquelle I est un intervalle et pas une partie quelconque de $\mathbb{R}$ est particulièrement importante dans cette section). On fixe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle I.

Le théorème suivant, qui est admis, est fondamental.

Théorème 3.22 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Supposons que la fonction f soit continue sur l'intervalle I. On fixe deux points $a < b$ de I. Soit ℓ un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ce qui signifie que $f(a) \leq \ell \leq f(b)$ ou $f(a) \geq \ell \geq f(b)$.*
Alors il existe un nombre réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \ell$.

Pour une démonstration de ce théorème, on renvoie au cours de Approfondissements mathématiques 1.

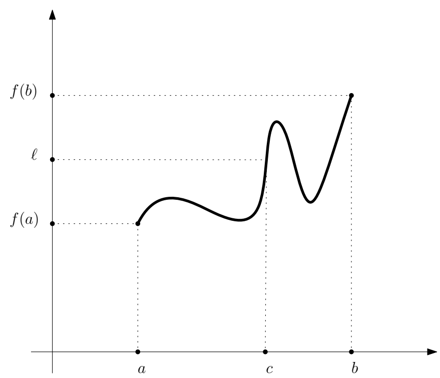


FIGURE 3.2 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires. La courbe représentée est le graphe de f.

Le corollaire suivant est en réalité une reformulation du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 3.23. *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J. Alors $g(J)$ est un intervalle.*

Démonstration. Dans cette démonstration, on utilise la caractérisation suivante des intervalles. Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, étant donnés deux points $y_1 < y_2$ de A, on a $[y_1, y_2] \subset A$.

Soient $y_1 < y_2$ des points de $g(J)$. Par définition, il existe des nombres réels x_1 et x_2 dans J tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout nombre réel l dans $[y_1, y_2]$, il existe un nombre réel c entre x_1 et x_2 tel que $f(c) = l$. Par conséquent l appartient à $f(I)$ et donc $[y_1, y_2] \subset f(I)$, ce qui implique que $f(I)$ est un intervalle. □

Le théorème suivant est également admis et sera vu plus en profondeur dans le cours de Approfondissements mathématiques 1.

Théorème 3.24 (Théorème des bornes)**.** *Soient $a < b$ des nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$. Autrement dit, il existe des points x_m et x_M dans $[a, b]$ tels que, pour tout point x de $[a, b]$, on a*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

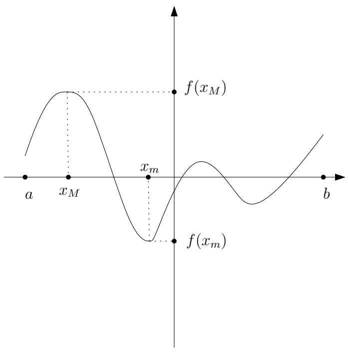


Figure 3.3 – Illustration du théorème des bornes. La courbe représentée est le graphe de f.

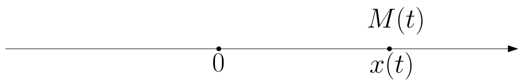
Chapitre 4

Dérivation

4.1 Définitions

4.1.1 Nombre dérivé

Aux origines de la notion de dérivée, il y a la notion de vitesse instantanée.



Considérons un mobile ponctuel qui se déplace sur la droite réelle au cours du temps. On note $M(t)$ la position du mobile à l'instant t et $x(t)$ l'abscisse du point $M(t)$. La vitesse (algébrique) moyenne du mobile entre deux instants t_0 et t_1 est

$$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Pour calculer sa vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0, on calcule sa vitesse moyenne entre un instant t et t_0

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

puis on prend la limite lorsque t tend vers t_0. Cette notion de vitesse instantanée se généralise en mathématiques via la notion de nombre dérivé.

On fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide (c'est-à-dire qu'il n'est ni vide, ni réduit à un point) et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur I. On fixe un nombre réel x_0 dans I.

Définition 4.1 (Nombre dérivé)**.** *On dit que f est* dérivable en x_0 *si la limite*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est un nombre réel. Dans ce cas, le nombre $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f en x_0. *On dit que f est* dérivable sur I *si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f la fonction*

$$f' : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}.$$

Exemple 4.2. 1. Soit $C \in \mathbb{R}$. On veut calculer la dérivée de la fonction

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C \end{array}.$$

en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On a, pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \frac{C - C}{x - x_0} = 0.$$

Ainsi, les fonctions constantes sont dérivables en tout point et le nombre dérivé d'une fonction constante en tout point vaut 0. Au final, **la fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle**.

2. Calculons maintenant la fonction dérivée de la fonction

$$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}.$$

Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On a, pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x - 2x_0}{x - x_0} = 2.\frac{x - x_0}{x - x_0} = 2.$$

Ainsi, la fonction f_2 est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ de nombre dérivé 2. La fonction dérivée de f_2 est la fonction constante égale à 2. De la même manière, on démontre que, pour tout nombre réel λ, la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée la fonction constante égale à λ.

3. Intéressons nous maintenant à la fonction

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

On fixe un nombre réel x_0. Pour tout $x \neq x_0$, on a

$$\begin{array}{rcl} \frac{f_3(x)-f_3(x_0)}{x-x_0} & = & \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} \\ & = & \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} \\ & = & x + x_0 \end{array}$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$

Ainsi, f_3 est dérivable en x_0 de nombre dérivé $2x_0$. Comme ceci est valable en tout point x_0, on en déduit que la fonction carré f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}.$$

De même, pour tout entier $n \geq 1$, en utilisant la formule de factorisation

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}),$$

on montre que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx^{n-1} \end{array}.$$

4. On a, pour $x > 0$,

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = +\infty$$

et la fonction $\sqrt{.}$ n'est pas dérivable en 0.

5. Intéressons-nous maintenant à la fonction inverse. Fixons un nombre réel $x_0 \neq 0$ et $x \neq x_0$, un autre nombre réel non-nul. On a

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{x_0 - x}{x_0 x (x - x_0)} = -\frac{1}{x_0 x}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

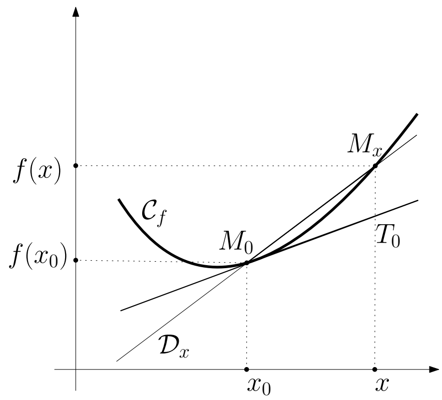
Ainsi, la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de fonction dérivée

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{x^2} \end{array}.$$

4.1.2 Interprétation géométrique et tangente

On fixe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et deux points $x \neq x_0$ de I. Les points M_0 et M_x de coordonnées respectives $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ appartiennent au graphe $\mathcal{C}_f$ de f. De plus, le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}_x = (M_0 M_x)$ est

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



Lorsque le point M_x se rapproche du point M_0, la droite $\mathcal{D}_x$ se rapproche d'une droite T_0 passant par M_0 de coefficient directeur
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Cette droite s'appelle la *tangente* à la courbe $\mathcal{C}_f$ en M_0.

Définition 4.3 (Tangente à une courbe représentative d'une fonction)**.** *La* tangente *à $\mathcal{C}_f$ au point M_0 est la droite passant par M_0 de coefficient directeur $f'(x_0)$.*

L'équation de cette tangente est donc de la forme
$$y = f'(x_0)x + b$$
où b est un coefficient réel à déterminer. Comme le point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ appartient à cette tangente, alors $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$ donc $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ d'où l'équation de la tangente
$$y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$$
ou encore
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$
Le lecteur est invité à ne se souvenir que de la définition ci-dessus (et à la comprendre !) et à retrouver l'équation de la tangente à partir de cette définition au lieu d'apprendre par coeur l'équation de la tangente à une courbe.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M_0 est la droite qui approxime le mieux $\mathcal{C}_f$ près du point M_0.

Dans le cas où
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ ou } -\infty$$
on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est la tangente au graphe de f au point M_0. Là encore, il s'agit de la droite qui approxime le mieux la courbe représentative de f au voisinage de M_0.

4.1.3 Dérivées à droite et à gauche

On note $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide.

Définition 4.4 (Dérivabilité à droite et à gauche)**.** *Soit x_0 un point de I qui n'est pas une borne de I.*
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est un nombre réel. Dans ce cas, le nombre $f'_g(x_0)$ est appelé nombre dérivé à gauche de f en x_0. De même, on dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est un nombre réel. Dans ce cas, le nombre $f'_d(x_0)$ est appelé nombre dérivé à droite de f en x_0.

Cette notion permet de définir des tangentes à droite et à gauche à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.

Un des intérêts de cette notion réside dans la proposition suivante, qui est une conséquence immédiate des propriétés des limites à droite et à gauche.

Proposition 4.5. *Soit x_0 un point de l'intervalle I qui n'est pas une borne de I.*
La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.
Dans ce cas, on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple 4.6. Étudions la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0. On a

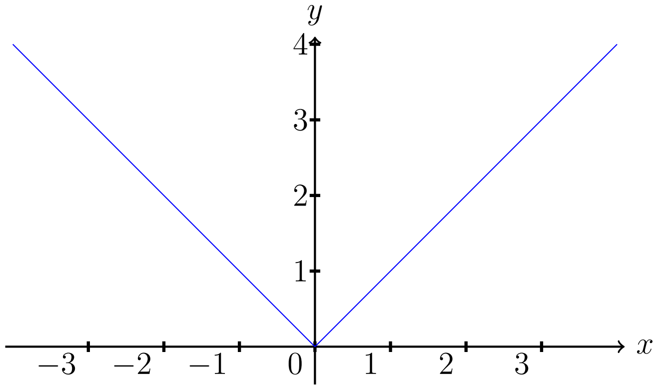
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\, x \,| - |\, 0 \,|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

donc la fonction valeur absolue est dérivable à droite en 0 de dérivée à droite égale à 1. De même

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\, x \,| - |\, 0 \,|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

donc la fonction valeur absolue est dérivable à gauche en 0 de dérivée à gauche égale à -1. Cependant $1 \neq -1$ donc cette fonction n'est pas dérivable en 0.

On a représenté le graphe de la fonction valeur absolue ci-dessous. La non-dérivabilité de cette fonction en 0 ce traduit par la présence d'un point anguleux à la courbe à l'origine : les tangentes à droite et à gauche à la courbe en ce point sont distinctes.



4.1.4 Lien avec la continuité

On note $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. On fixe un point x_0 de I.

Théorème 4.7 (dérivable $\Rightarrow$ continue)**.** *Si la fonction f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*
Si la fonction f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

ATTENTION : la réciproque de ce théorème est fausse puisque la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mid x \mid \end{array}$$

est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

On a un énoncé analogue au théorème qui relie dérivabilité à droite et continuité à droite, de même que dérivabilité à gauche et continuité à gauche.

Démontrons maintenant ce théorème.

Démonstration. Le deuxième point du théorème est une conséquence immédiate du premier point.

Supposons f dérivable en x_0 et notons τ_{x_0} la fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ si } x \neq x_0 \\ f'(x_0) \text{ si } x = x_0 \end{array} \right. \end{array}.$$

Comme la fonction f est dérivable en x_0 la fonction τ_{x_0} est continue en x_0. De plus, pour tout nombre réel x dans I,

$$f(x) = f(x_0) + \tau_{x_0}(x)(x - x_0).$$

En effet, cette égalité est vraie pour $x = x_0$ et, pour $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Ainsi, d'après les théorèmes d'opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + (\lim_{x\to x_0} \tau_{x_0}(x)).0 = f(x_0) + f'(x_0).0 = f(x_0)$$

et f est continue en x_0. $\square$

4.2 Opérations sur les dérivées

On note $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide. On fixe un point x_0 de I.

4.2.1 Combinaisons linéaires

Fixons deux nombres réels λ et μ.

Proposition 4.8 (Dérivation d'une combinaison linéaire)**.**

1. *Si les fonctions f et g sont dérivables en x_0, alors la fonction $\lambda f+\mu g$ est dérivable en x_0 et $(\lambda f+\mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0)+\mu g'(x_0)$.*
2. *Si les fonctions f et g sont dérivables sur I, alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.*

Le deuxième point de la proposition est une conséquence immédiate du premier point. Le premier point sera démontré dans un exercice à la fin de cette section consacrée aux opérations sur les dérivées.

Exemple 4.9. On a déjà vu que, pour tout entier $n \geq 0$ la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème ci-dessus et une récurrence, on en déduit que les fonctions polynômiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Rappelons qu'on appelle fonction polynômiale toute fonction de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \end{array}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, et où les a_i, pour $0 \leq i \leq n$, sont des nombres réels.

4.2.2 Produits

Proposition 4.10 (Dérivation d'un produit)**.**

1. *Si les fonctions f et g sont dérivables au point x_0, alors la fonction fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*
2. *Si les fonctions f et g sont dérivables sur I, alors fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g+fg'$.*

Le premier point de la proposition sera démontré à l'occasion d'un exercice en fin de section. Le deuxième point de la proposition est une conséquence immédiate du premier point.

4.2.3 Composition

On note $u : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. On suppose que $u(J) \subset I$ de sorte que la fonction composée $f \circ u$ est définie sur J. On fixe un point x_0 de J.

Théorème 4.11 (Dérivation d'une fonction composée)**.** *On suppose que*

1. *la fonction u est dérivable en x_0 ;*
2. *la fonction f est dérivable en $u(x_0)$.*

Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable en x_0 et $(f \circ u)'(x_0) = u'(x_0)f'(u(x_0))$.

Bien sûr, on a une version globale de ce théorème qui est exprimée dans le corollaire suivant. Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème ci-dessus.

Corollaire 4.12 (Dérivation d'une fonction composée, version globale)**.** *On suppose que la fonction u est dérivable sur J et que la fonction f est dérivable sur I. Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur J et $(f \circ u)' = u'f' \circ u$.*

Exemple 4.13.

1. Rappelons que la fonction
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$
est dérivable de fonction dérivée
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{x^2} \end{array}.$$
Prenons comme fonction f la fonction inverse et appliquons le résultat ci-dessus : si la fonction u est dérivable sur J et si, pour tout point x de J, $u(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{u}$, qui est la composée de la fonction u avec la fonction inverse, est dérivable sur J et
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = u'f' \circ u = u'\frac{-1}{u^2} = -\frac{u'}{u^2}.$$
2. En utilisant le résultat précédent, on peut en déduire une formule sur la dérivée d'un quotient. Soit $u : J \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur J. Supposons que, pour tout point x de J, $v(x) \neq 0$. Alors $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ est dérivable sur J de fonction dérivée
$$u'\frac{1}{v} + u(\frac{1}{v})' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$
3. Appliquons maintenant ce théorème à la fonction $f = \ln$. Si la fonction u est dérivable sur J et si, pour tout point x de J, on a $u(x) > 0$, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur J de fonction dérivée
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u'(x)f'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)} \end{array}.$$
4. De la même manière, on retrouve des formules pour la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ (qui a pour fonction dérivée $u'e^u$), $x \mapsto \cos(u(x))$ (qui a pour fonction dérivée $-u'\sin(u)$) et $x \mapsto \sin(u(x))$ (qui a pour fonction dérivée $u'\cos(u)$).

Le théorème 4.11 sera démontré dans l'exercice qui suit. Avant d'aborder cet exercice, donnons une idée de cette démonstration. Il s'agit d'utiliser la définition de nombre dérivé et d'écrire

$$\frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

En prenant la limite lorsque $x \to x_0$, par continuité de u en x_0 (car u est dérivable en x_0) et par les théorèmes d'opérations sur les limites, on obtient

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} = f'(u(x_0))u'(x_0).$$

Il y a néanmoins un problème dans cette courte démonstration : il se pourrait que $u(x) = u(x_0)$ pour $x \neq x_0$ arbitrairement proche de x_0, ce qui nous interdit d'écrire la première ligne de ce raisonnement. Néanmoins, cette démonstration erronée peut constituer un bon moyen de se souvenir (ou de retrouver rapidement) cette formule.

Exercice 4.14 (Opérations sur les dérivées)**.** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide. On suppose que f et g sont dérivables en x_0.

1. On fixe des nombres réels λ et μ. Montrer que la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et déterminer $(\lambda f + \mu g)'(x_0)$.
2. Montrer que la fonction fg est dérivable en x_0 et déterminer $(fg)'(x_0)$.
3. Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide. On suppose que $u(J) \subset I$. Soit t_0 un point de J. On suppose que la fonction u est dérivable en t_0 et que $u(t_0) = x_0$. Montrer que $f \circ u$ est dérivable en t_0 et déterminer $(f \circ u)'(t_0)$.

4.3 Théorème des accroissements finis

4.3.1 Extrema locaux

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide.

Définition 4.15 (Extrema locaux)**.** *Soit x_0 un point de I.*
On dit que f admet un maximum local *en x_0 si*

$$\exists h > 0,\ \forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[\cap I,\ f(x) \leq f(x_0).$$

Autrement dit, le nombre réel $f(x_0)$ est un maximum de la fonction $f_{|]x_0-h,x_0+h[\cap I}$. On dit alors que $f(x_0)$ est un maximum local *de f.*
On dit que f admet un minimum local *en x_0 si*

$$\exists h > 0,\ \forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[\cap I,\ f(x) \geq f(x_0).$$

Autrement dit, le nombre réel $f(x_0)$ est un minimum de la fonction $f_{|]x_0-h,x_0+h[\cap I}$. On dit alors que $f(x_0)$ est un minimum local *de f.*
On dit que f admet un extremum *local en x_0 s'il admet un maximum local ou un minimum local en x_0.*

La fonction dérivée est utile dans la recherche d'extrema locaux, comme en témoigne le théorème suivant.

Théorème 4.16 (Extrema locaux et dérivée)**.** *Soit x_0 un point de I qui n'est pas une extrémité de I. On suppose que la fonction f est dérivable en x_0.*
Si la fonction f a un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque 4.17.

1. La réciproque de ce théorème est fausse. En effet, la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc n'admet pas d'extremum local en 0. Pourtant, la fonction dérivée de cette fonction est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 \end{array}$$

et s'annule en 0.

2. L'hypothèse selon laquelle x_0 n'est pas une extrémité de I est essentielle. En effet, la fonction

$$\begin{array}{ccc} [0,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

a un extremum local en 2 mais la dérivée de cette fonction en 2 vaut $4 \neq 0$.

La démonstration du théorème 4.16 est contenue dans l'exercice suivant.

Exercice 4.18. Soient $a < b$ des nombres réels, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle $]a,b[$ et x_0 un point de l'intervalle $]a,b[$. On suppose que la fonction f est dérivable en x_0 et admet un maximum local en x_0. Montrer que $f'(x_0) = 0$.

4.3.2 Théorème de Rolle

On fixe deux nombres réels $a < b$.

Théorème 4.19 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Pour démontrer ce théorème, on démontre que la fonction f admet un extremum local (et même global) sur $]a,b[$, ce que l'on peut voir sur la figure suivante où l'on a tracé le graphe d'une fonction f vérifiant les hypothèses du théorème.

Démonstration. Comme la fonction f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors, d'après le théorème des bornes,la fonction f admet un minimum $m = f(x_m)$ et un maximum $M = f(x_M)$ sur $[a,b]$ (où x_m et x_M sont des points de l'intervalle $[a,b]$). On distingue les cas où $m = M$ et $m < M$.

Premier cas : $m = M$. Dans ce cas $M = m$ est à la fois un maximum et un minimum de la fonction f donc la fonction f est constante et f' s'annule en tout point de l'intervalle $]a,b[$.

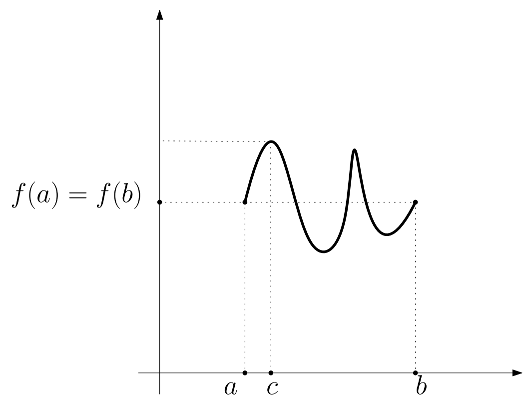


FIGURE 4.1 – La fonction f admet un extremum local en c donc $f'(c) = 0$.

Deuxième cas : $m < M$. Nécessairement, soit $m = f(x_m) \neq f(a)$, soit $M = f(x_M) \neq f(a)$. Si $m \neq f(a)$ alors $m \neq f(b) = f(a)$ et $x_m \in]a, b[$. Par conséquent, $f'(x_m) = 0$ et on pose $c = x_m$. Si $M \neq f(a)$ alors $M \neq f(b) = f(a)$ et $x_M \in]a, b[$. Par conséquent, $f'(x_M) = 0$ et $c = x_M$.

□

4.3.3 Théorème des accroissements finis

On fixe deux nombres réels $a < b$.

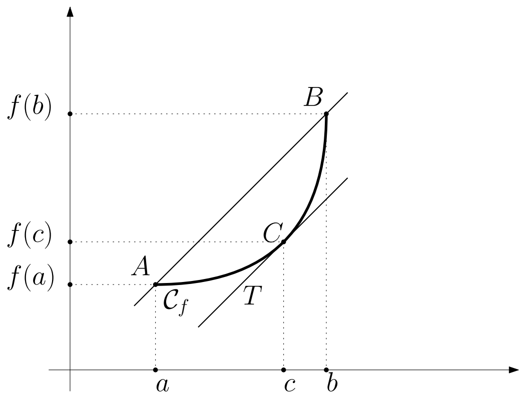
Théorème 4.20 (Théorème des accroissements finis). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un nombre réel c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interprétation cinématique : pour $t \in [a, b]$, supposons que $f(t)$ représente l'abscisse d'un mobile sur la droite réelle à l'instant t. La quantité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la vitesse moyenne du mobile entre les instants a et b. La nombre $f'(c)$ représente lui la vitesse instantanée de ce mobile à l'instant c. Le théorème des accroissements finis signifie que, à un instant c entre a et b, la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne. ceci est conforme à l'intuition puisque le mobile ne peut pas avancer à une vitesse toujours strictement inférieure à la vitesse moyenne ou toujours strictement supérieure à la vitesse moyenne. Cette remarque peut être formalisée en une démonstration . Cependant, cette démonstration formalisée est d'une part un peu technique pour un étudiant moyen de L1 et, d'autre part, utilise un théorème de Darboux selon lequel la fonction f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (cf exercice supplémentaire de TD).

Interprétation géométrique : Notons $\mathcal{C}_f$ la représentation du graphe de f dans un repère orthonormé. Notons A et B les points du plan de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Rappelons que le nombre réel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB). La théorème signifie qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ en la point C de coordonnées $(c, f(c))$ est parallèle à la droite (AB) (ce qui est équivalent à avoir le même coefficient directeur).

Le théorème des accroissements finis est démontré à l'occasion de l'exercice suivant.



Exercice 4.21. Soient $a < b$ deux nombres réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct et on note A et B les points du plan de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

1. Déterminer une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affine telle que la droite (AB) a pour équation $y = h(x)$.
2. On note g la fonction définie sur $[a, b]$ par
$$\forall x \in [a, b],\ \ g(x) = f(x) - h(x).$$
Appliquer le théorème de Rolle à g. Qu'en déduit-on ?

4.4 Applications du théorème des accroissements finis

Dans cette section, on fixe un intervalle I d'intérieur non-vide.

4.4.1 Variations d'une fonction

Pour commencer, notons la proposition suivante qui permet de caractériser les fonctions constantes parmi les fonctions dérivables.

Proposition 4.22 (Caractérisation des fonctions constantes)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*
La fonction f est une fonction constante si et seulement si, pour tout point x de I, $f'(x) = 0$.

Démonstration. On a déjà vu dans l'exemple 4.2 que les fonctions constantes avaient une dérivée nulle d'où l'implication directe.

Réciproquement, supposons que, pour tout point x de I, $f'(x) = 0$. Fixons un point a de l'intervalle I. Soit x un point de I distinct de a. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un nombre réel c entre a et x tel que
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c).$$
Mais, par hypothèse $f'(c) = 0$ d'où $f(x) = f(a)$: la fonction f est constante égale à $f(a)$. □

Une des principales utilités de la fonction dérivée est qu'elle donne des informations sur les variations de notre fonction, comme en témoigne le théorème suivant.

Théorème 4.23 (Dérivée et monotonie)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors*
la fonction f est croissante sur I si et seulement si, pour tout point x de I, $f'(x) \geq 0$.
la fonction f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout point x de I, $f'(x) \leq 0$.

La démonstration de ce théorème est essentiellement contenue dans l'exercice suivant qui utilise le théorème des accroissements finis.

Exercice 4.24. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Montrer que la fonction f est croissante sur I si et seulement si, pour tout point x de I, $f'(x) \geq 0$.

On peut aussi avoir des informations sur la stricte monotonie de f à l'aide de la fonction dérivée de f.

Théorème 4.25 (Dérivée et stricte monotonie 1)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*
Si, pour tout point x de I, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Si, pour tout point x de I, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Ce théorème se démontre avec les mêmes idées que la démonstration du théorème 4.23.

Enfin, en utilisant le fait qu'une fonction définie sur I monotone est strictement monotone si et seulement si elle n'est constante sur aucun intervalle d'intérieur non-vide, on obtient la caractérisation suivante des fonctions dérivables strictement monotones.

Théorème 4.26 (Dérivée et stricte monotonie)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*
La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si, pour tout point x de I, $f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule sur aucun intervalle d'intérieur non-vide.
La fonction f est strictement décroissante sur I si et seulement si, pour tout point x de I, $f'(x) \leq 0$ et f' ne s'annule sur aucun intervalle d'intérieur non-vide.

Comme le lecteur l'a déjà vu dans les classes antérieures, ces théorèmes sont très utiles pour étudier des fonctions et, notamment, pour déterminer des minima ou maxima de fonctions. On verra en TD plusieurs exemples d'application de ces théorèmes.

4.4.2 Prolongement de la dérivée

La théorème suivant peut être utile pour étudier des fonctions définies par morceaux. On fixe un point x_0 de l'intervalle I.

Théorème 4.27 (Prolongement de la dérivée 1)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. Supposons que $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$.*
Alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

Ce théorème admet une extension dans le cas des dérivées à droite ou à gauche.

Théorème 4.28 (Prolongement de la dérivée 2). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur I.*
Si $I \cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset$, $f_{|I\cap]x_0,+\infty[}$ est dérivable et $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction f est dérivable à droite au point x_0 de dérivée à droite ℓ.
Si $I \cap]-\infty, x_0[\neq \emptyset$, $f_{|I\cap]-\infty,x_0[}$ est dérivable et $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction f est dérivable à gauche au point x_0 de dérivée à gauche ℓ.

Le théorème 4.27 est démontré dans le cas où le point x_0 est un point intérieur à l'intervalle I (le cas général est analogue) à l'occasion de l'exercice suivant.

Exercice 4.29 (Prolongement de la dérivée). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide et x_0 un point de I qui n'est pas une borne de I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. En utilisant la définition du nombre dérivé et le théorème des accroissements finis, montrer que la fonction f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \ell$.

4.4.3 Inégalité des accroissements finis

On fixe deux nombres réels $a < b$.

Théorème 4.30 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe un nombre réel M tel que, pour tout point x de l'intervalle $]a, b[$,*

$$|f'(x)| \leq M.$$

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Démonstration. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un point c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= |f'(c)||b - a| \\ &\leq M|b - a|. \end{aligned}$$

□

4.5 Dérivées successives

Dans cette section, on note toujours I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide. On fixe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle I.

Définition 4.31. *On dit que f est 1 fois dérivable sur I si f est dérivable sur I. On note alors $f^{(1)} = f'$ la dérivée de f.*

Par récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, on dit que f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable sur I et $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. On note alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la dérivée n-ième de f.

Il y a d'autres manières naturelles de définir la dérivée n-ième de f. On aurait pu dire par exemple que f est n fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et f' est $n-1$ fois dérivable sur I et poser $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$. D'après la proposition suivante, toutes ces définitions naturelles sont en réalité équivalentes.

Proposition 4.32. *Soient $0 < i < n$ des entiers. La fonction f est n fois dérivable sur I si et seulement si f est i fois dérivable sur I et $f^{(i)}$ est $n-i$ fois dérivable sur I. Dans ce cas*

$$f^{(n)} = (f^{(i)})^{(n-i)}.$$

Démonstration. Notons $P(i,n)$ l'énoncé de la proposition avec $0 < i < n$. On commence par démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geq 2$, la propriété $P(1,n)$ est vraie.

La propriété $P(1,2)$ est vraie : c'est la définition de « f est deux fois dérivable sur I ». De plus, par définition de $f^{(2)}$, on a $f^{(2)} = (f')' = (f^{(1)})^{(1)}$.

Supposons $P(1,n)$ vraie pour un entier $n \geq 2$ et montrons $P(1,n+1)$.

Par définition, f est $n+1$ fois dérivable sur I si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées
1. f est n fois dérivable sur I.
2. $f^{(n)}$ est dérivable sur I.

Par hypothèse de récurrence, cela revient à dire que les trois conditions suivantes sont vérifiées :
1. f est dérivable sur I.
2. f' est $n-1$ fois dérivable sur I.
3. $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$ est dérivable sur I.

Les deux dernières lignes reviennent à dire que f' est n fois dérivable sur I. De plus, par définition et hypothèse de récurrence

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' = ((f')^{(n-1)})' = (f')^{(n)}$$

d'où $P(1,n+1)$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, la propriété $P(1,n)$ est vraie.

On montre alors par récurrence sur $i \geq 1$ que, pour tout entier $n > i$,la propriété $P(i,n)$ est vraie.

On a déjà démontré que, pour tout $n > 1$, la propriété $P(1,n)$ est vraie.

Supposons que, pour un entier $i \geq 1$, la propriété $P(i,n)$ est vraie pour tout entier $n > i$. Montrons que, pour tout entier $n > i+1$, la propriété $P(i+1,n)$ est vraie.

Soit $n > i+1$, un entier. Par hypothèse de récurrence, f est n fois dérivable sur I si et seulement si f est i fois dérivable sur I et $f^{(i)}$ est $n-i$ fois dérivable sur I. D'après le cas $i=1$ déjà traité (appliqué à la fonction $f^{(i)}$), ceci est revient à dire que les trois conditions suivantes sont vérifiées :
1. f est i fois dérivable sur I.
2. $f^{(i)}$ est dérivable sur I.
3. $f^{(i+1)} = (f^{(i)})'$ est $n-i-1$ fois dérivable sur I.

Comme les deux premières lignes signifient que f est $i+1$ fois dérivable sur I et comme, par hypothèse de récurrence,

$$f^{(n)} = (f^{(i)})^{(n-i)} = ((f^{(i)})')^{(n-i-1)} = (f^{(i+1)})^{(n-i-1)},$$

on a démontré la propriété $P(i+1,n)$. Ceci achève la récurrence. □

Définition 4.33. *On dit que la fonction f est de classe C^n sur I si elle est n fois dérivable sur I et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I. Enfin, on dit que la fonction f est de classe C^∞ sur I si, pour tout entier $n \geq 1$, elle est n fois dérivable sur I.*

Comme pour le cas des dérivées, on dispose de théorème pour la dérivée n-ième d'une combinaison linéaire et d'un produit.

Proposition 4.34 (Combinaison linéaire de fonctions n fois dérivable)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ des fonction, λ et μ des nombres réels et $n \geq 1$ un entier.*

Si f et g sont n fois dérivable sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

La proposition implique qu'une combinaison linéaire de fonctions de classe C^n sur I (respectivement de classe C^∞ sur I) est de classe C^n (respectivement C^∞) sur I.

Démonstration. On démontre la propriété par récurrence sur n.

Le cas $n = 1$ est le théorème de dérivation d'une combinaison linéaire de fonctions.

Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons-la pour l'entier $n + 1$.

Supposons f et g $n+1$ fois dérivable sur I. Alors f et g sont n fois dérivables sur I et $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont dérivables sur I. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ donc $(\lambda f + \mu g)^{(n)}$ est dérivable sur I. Ainsi, $\lambda f + \mu g$ est $n + 1$ fois dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n+1)} = ((\lambda f + \mu g)^{(n)})' = (\lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)})' = \lambda (f^{(n)})' + \mu (g^{(n)})' = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}$$

d'où la propriété au rang $n + 1$. □

Proposition 4.35 (Produit de fonctions n fois dérivable)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions.*

Si f et g sont n fois dérivable sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

La formule pour la dérivée n-ième du produit fg est appelée « formule de Leibniz ». Elle ressemble à la formule du binôme de Newton et sa démonstration est analogue. Là encore la proposition implique qu'un produit de fonctions de classe C^n (respectivement C^∞) sur I est de classe C^n (respectivement C^∞) sur I.

La démonstration de cette propriété est l'objet d'un exercice supplémentaire de la séance 10 de TD.

Pour terminer cette section, la proposition suivante nous donne des premiers exemples de fonctions C^∞.

Proposition 4.36.

1. *Les fonctions polynômiales sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Les fonctions* exp, ln, cos, sin *sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.*

Démonstration.

1. Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 1$, les fonctions polynômiales sont n fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Le cas $n = 1$ a déjà été démontré en début de chapitre.
   Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq 1$. Soit P une fonction polynômiale. Alors P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et P' est une fonction polynômiale. Par hypothèse de récurrence, P' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc P est $n + 1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui achève la récurrence.
2. On montre par récurrence sur $n \geq 1$ que exp, ln, cos et sin sont n fois dérivable et
   (a) $\exp^{(n)} = \exp$.

(b) $\forall x > 0,\ \ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

(c) $\cos^{(n)} = \cos(. + n\frac{\pi}{2})$.

(d) $\sin^{(n)} = \sin(. + n\frac{\pi}{2})$.

$\square$

Chapitre 5

Fonctions réciproques

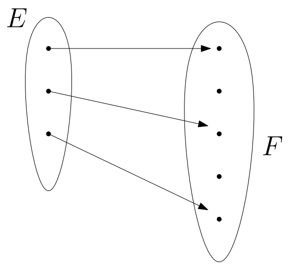
5.1 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 5.1 (Injectivité). *Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F. On dit que l'application f est* injective *si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite.*

1. *Pour tout point y de F, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution dans E.*
2. *Tout point de F a au plus un antécédent par f.*
3. $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Les deux premières conditions ci-dessus sont équivalentes par définition du mot antécédent. Regardons maintenant la troisième condition. Elle signifie que, si deux points x_1 et x_2 ont la même image par f, alors $x_1 = x_2$, ce qui revient à dire qu'un élément de F ne peut pas avoir deux antécédents distincts par f.

On a représenté ci-dessous une application injective. Les deux « patates » représentent les ensembles E et F, les points à l'intérieur des patates représentent les éléments de E et de F et les flèches représentent une application qui, à un point de E, associe un point de F. L'application représentée est injective puisque les éléments de E ont des images deux à deux distinctes par l'application.



Exemple 5.2. 1. L'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 1$: l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions (ou 1 a deux antécédents par f). La négation de la troisième condition définissant l'injectivité s'écrit

$$\exists x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2).$$

Cette négation est vérifiée en prenant $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$.

2. Par contre, l'application

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est injective. Démontrons le. Rappelons le tableau de variation de g.

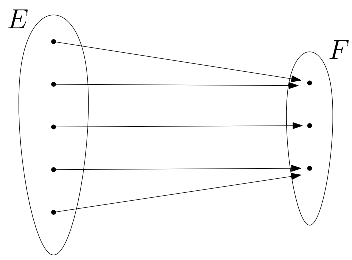
	0	$+\infty$
Variations		$+\infty$
de	$\nearrow$	
g	0	

D'après le tableau de variation de g, pour tout nombre réel y, l'équation $g(x) = y$ a au plus une solution (0 solution si $y < 0$ et une solution si $y \geq 0$).
Essayons d'utiliser la troisième définition de l'injectivité pour obtenir une autre démonstration de l'injectivité de l'application g.
Soient x_1 et x_2 des éléments de $\mathbb{R}_+$. Supposons que $g(x_1) = g(x_2)$ et montrons que $x_1 = x_2$. On a donc $x_1^2 = x_2^2$ ou encore $x_1^2 - x_2^2 = 0$, ce que l'on peut réécrire $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul donc $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. Comme les nombres réels x_1 et x_2 sont tous les deux positifs, alors on a nécessairement $x_1 = x_2$. On a redémontré que l'application g est injective.

Définition 5.3 (Surjectivité)**.** *Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F. On dit que l'application f est* surjective *si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée.*

1. *Pour tout point y de F, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution dans E.*
2. *Tout point de F a au moins un antécédent par f.*
3. $\forall y \in F, \ \exists x \in E, \ y = f(x)$.

On représente ci-dessous une application surjective : tous les points de F ont un antécédent.



Exemple 5.4. 1. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

n'est pas surjective car l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

2. Par contre, l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
est surjective car, pour tout nombre réel $y \geq 0$, l'équation $y = x^2$ a au moins une solution sur $\mathbb{R}$ (deux solutions $-\sqrt{y}$ et $\sqrt{y}$ si $y > 0$ et une solution si $y = 0$).

Définition 5.5 (Bijectivité)**.** *Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F. On dit que l'application f est bijective si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.*

1. *Pour tout point y de F, l'équation $y = f(x)$ a exactement une solution dans E.*
2. *Tout point y de F a exactement un antécédent par f.*

Dire que l'équation $y = f(x)$ a exactement une solution revient à dire qu'elle a au moins une solution et au plus une solution, d'où la proposition suivante.

Proposition 5.6. *Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.*

Exemple 5.7. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
est bijective car, pour tout $y \geq 0$, l'équation $y = x^2$ admet exactement une solution sur $\mathbb{R}_+$ qui est $\sqrt{y}$. De même, l'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective d'après son tableau de variation, de même que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Par contre, l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$
n'est pas bijective puisque l'équation $\exp(x) = -1$ n'a pas de solution réelle.

5.2 Application réciproque

Définition 5.8 (Application réciproque d'une application bijective)**.** *Soit $f : E \to F$ une application bijective entre deux ensembles E et F. On note $f^{-1} : F \to E$ l'application qui, à un point y de F, associe l'unique solution $f^{-1}(y)$ dans E de l'équation $f(x) = y$. L'application f^{-1} est appelée l'*application réciproque *de f.*

Exemple 5.9. On a vu que l'application
$$\begin{array}{rrcl} f_1 : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
était bijective. Pour $y \geq 0$, l'unique solution dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $y = x^2$ est $x = \sqrt{y}$ donc l'application réciproque de f_1 est l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

est bijective d'application réciproque

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^{\frac{1}{n}} \end{array}.$$

De même, l'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective d'application réciproque $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

Étant donné un ensemble A on note Id_A l'application

$$\begin{array}{rcl} A & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

Cette application est appelée l'application identité de A et elle est bijective. Notons la propriété suivante des applications réciproques.

Proposition 5.10. *Soit $f : E \to F$ une application bijective entre deux ensembles E et F. On a*

$$f^{-1} \circ f = Id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_F.$$

Démonstration. Soit $y \in F$. Par définition, l'élément $f^{-1}(y)$ de E est l'unique solution dans E de l'équation $f(x) = y$ donc $f(f^{-1}(y)) = y$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.
Soit x_0 un point de E et posons $y = f(x_0)$. Le point x_0 est alors l'unique solution dans E de l'équation $y = f(x)$ donc $f^{-1}(y) = x_0$ et $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$. Ainsi $f^{-1} \circ f = Id_E$. □

5.3 Théorèmes généraux

Soit $f : A \to B$ une application bijective d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ vers un ensemble $B \subset \mathbb{R}$.

Remarquons que le point du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient au graphe de f si et seulement si $y = f(x)$, ce qui revient à dire que $x = f^{-1}(y)$ par définition de f^{-1}, *i.e.* le point de coordonnées (y, x) appartient au graphe de f^{-1}. Comme l'application $(x, y) \mapsto (y, x)$ est la symétrie par rapport à la diagonale (la droite d'équation $y = x$), on obtient la propriété suivante.

Proposition 5.11 (Graphe de l'application réciproque)**.** *Les graphes des applications f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

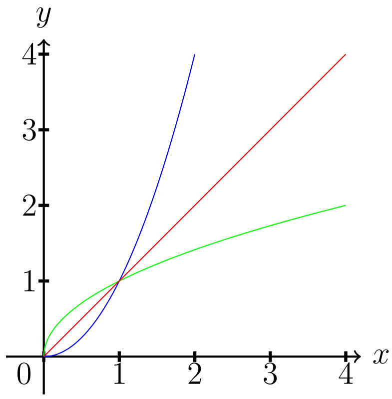
Exemple 5.12. Ci-dessous on a représenté, en bleu, le graphe de l'application bijective

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

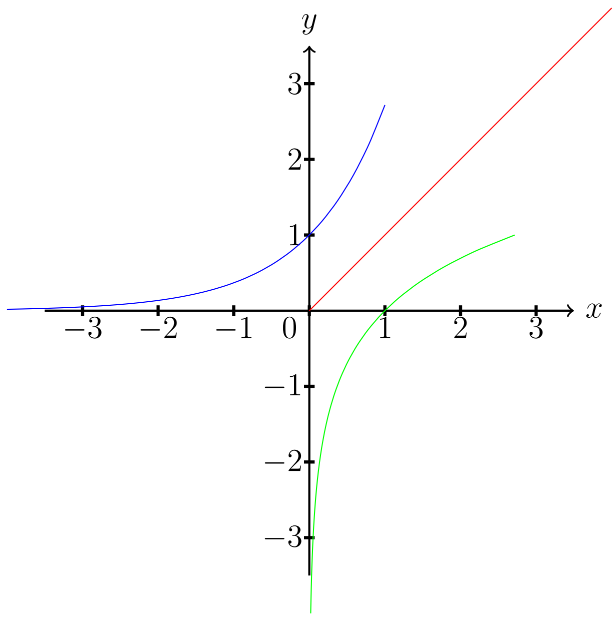
et, en vert, le graphe de son application réciproque

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

On voit que les deux graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ qui est représentée en rouge.



On constate la même chose pour les graphes des fonctions $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ (en bleu) et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (en vert) qui sont bijections réciproques.



Théorème 5.13 (Continuité de l'application réciproque)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I)$ et l'application $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue.*

Dans cet énoncé, la démonstration de la continuité de l'application f^{-1} est délicate. On l'admettra dans le cadre de ce cours et on renvoie au cours de Approfondissements mathématiques 1 pour une démonstration de cette partie du théorème. Néanmoins, on va démontrer que l'application f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (qui est bien un intervalle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires).

Démonstration. Montrons que l'application

$$\begin{array}{ccc} I & \to & f(I) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective. Montrons d'abord qu'elle est injective. Soient x_1 et x_2 deux points de I. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. Comme f est strictement monotone, on ne peut avoir ni $x_1 < x_2$, ni $x_1 > x_2$ donc $x_1 = x_2$ et notre application est injective. De plus, par définition de $f(I)$, tout point de $f(I)$ a un antécédent par f donc cette application est surjective : f réalise une bijection de I sur $f(I)$. □

Théorème 5.14 (Dérivabilité de l'application réciproque)**.** *Soit $f : I \to f(I)$ une fonction strictement monotone et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide. On suppose que*

$$\forall x \in I, f'(x) \neq 0.$$

Alors l'application $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable sur $f(I)$ et, pour tout point x de l'intervalle $f(I)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

L'hypothèse $f'(x) \neq 0$ est cruciale comme l'atteste la non-dérivabilité en 0 de la fonction racine carrée : la fonction $x \mapsto x^2$ a une dérivée nulle en 0.

Exercice 5.15 (Dérivabilité de l'application réciproque)**.** Démontrer ce théorème en utilisant la définition du nombre dérivé.

5.4 Fonctions réciproques des fonctions usuelles

5.4.1 Fonction exponentielle

La fonction exponentielle, comme on l'a vu plus haut, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. On est maintenant en mesure de démontrer que la fonction exponentielle est dérivable.

Exercice 5.16. En utilisant le théorème de dérivabilité des applications réciproques, montrer que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$.

5.4.2 Fonctions circulaires réciproques

La fonction arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $\cos([0, \pi]) = [\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$. La fonction réciproque de cette bijection est appelée la fonction arccosinus et est notée arccos. Elle est donc définie sur $[-1, 1]$ et est à valeurs dans $[0, \pi]$.

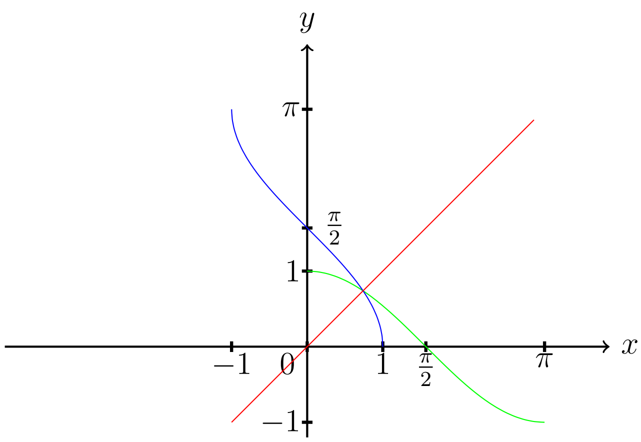
Exercice 5.17. En utilisant le théorème de dérivabilité des applications réciproques, montrer que la fonction arccosinus est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa fonction dérivée.

Cet exercice démontre la proposition suivante.

Proposition 5.18 (Dérivée de arccos)**.** *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et, pour tout nombre réel* x *de l'intervalle* $]-1, 1[$*, on a*

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour tracer le graphe de la fonction arccos (en bleu), on se souvient que ce graphe est symétrique du graphe de $\cos_{|[0,\pi]}$ (en vert) par rapport à la droite d'équation $y = x$ (en rouge).



Comme $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ alors $\arccos(1) = 0$ et $\arccos(-1) = \pi$, comme on peut le voir sur le graphe ci-dessus.

La fonction arcsinus

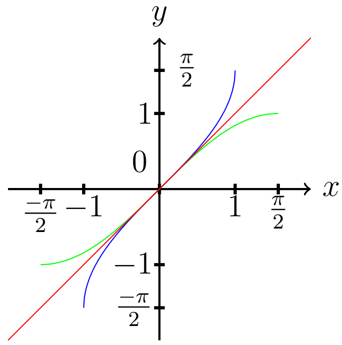
La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [\sin(\frac{-\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$. La fonction réciproque de cette bijection est appelée la fonction arcsinus et est notée arcsin. Elle est donc définie sur $[-1, 1]$ et est à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 5.19. En utilisant le théorème de dérivabilité des applications réciproques, montrer que la fonction arcsinus est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa fonction dérivée.

Proposition 5.20 (Dérivée de arcsin)**.** *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et, pour tout point* x *de l'intervalle* $]-1, 1[$*,*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On représente ci-dessous les graphes des fonctions arcsin (en vert) et $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ (en bleu). Ces graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (en rouge).



Comme $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, alors, comme on peut le voir sur le graphe ci-dessus, $\arcsin(-1) = \frac{-\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

La fonction arctangente

On a vu en TD que la fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur l'intervalle $]\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} \tan(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. On appelle arctangente et on note $\arctan : \mathbb{R} \to]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la fonction réciproque de cette bijection. Cette fonction sera étudiée en TD. Notons le résultat suivant qui sera démontré en TD.

Proposition 5.21 (Dérivée de arctan)**.** *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$