Corrections des exercices d'entraînement

1 Séance 1

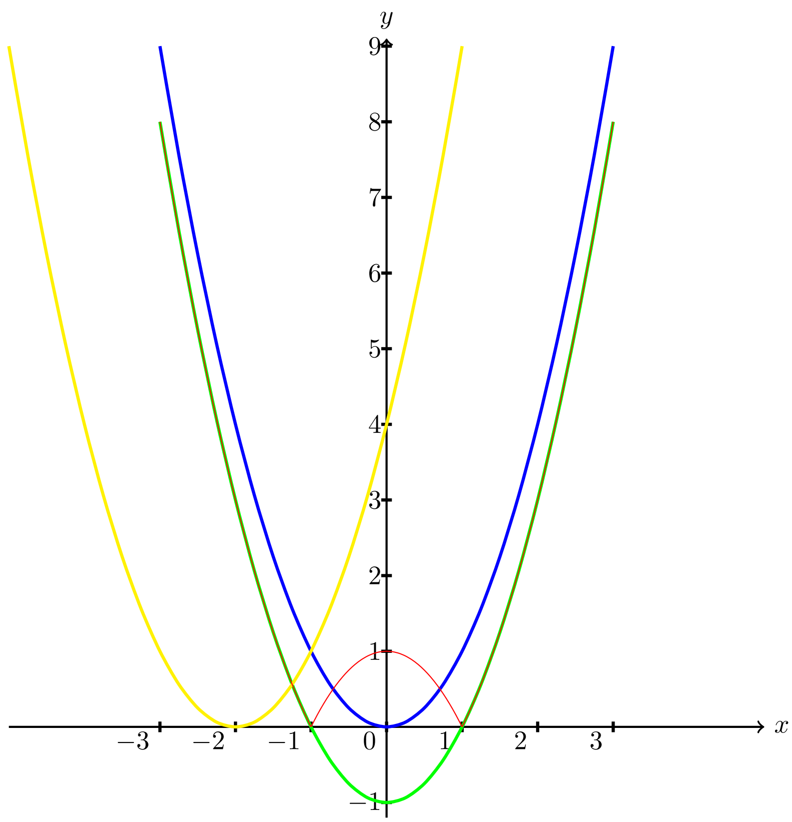
Exercice d'entraînement 1.1. Représenter graphiquement la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

En déduire les représentations graphiques des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes

1. $x \mapsto x^2 - 1$.
2. $x \mapsto (x+2)^2$.
3. $x \mapsto |x^2 - 1|$.

Correction : On a représenté en bleu le graphe de la fonction carré. Le graphe de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$, en vert, s'en déduit par translation de vecteur de coordonnées $(0, -1)$. Le graphe de la fonction $x \mapsto (x+2)^2$, en jaune, s'en déduit par translation de vecteur de coordonnées $(-2, 0)$. Enfin, pour obtenir le graphe de $x \mapsto |x^2 - 1|$ (représenté en rouge) à partir du graphe de $x \mapsto x^2 - 1$, il suffit de prendre le symétrique de la partie du graphe en-dessous de l'axe des abscisses par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice d'entraînement 1.2. Dans chacun des cas suivants, l'application $g \circ f$ existe-t-elle ? Si c'est le cas, déterminer cette application. Dans le cas contraire, à quel ensemble peut-on restreindre l'application f ou g pour que la composée soit bien définie ?

1. $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 2y \end{array} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x. \end{array}$$

2. $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 1 \end{array} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x). \end{array}$$

Correction :

1. Comme $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et comme l'application g est définie sur $\mathbb{R}$, alors l'application $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie. De plus, pour tout nombre réel x,
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = e^{2x}.$$

2. On a $f(0) = -1 < 0$ donc l'application $g \circ f$ n'est pas bien définie. Comme on a, pour tout nombre réel x
$$\begin{array}{rcl} x^2 + 2x - 1 > 0 & \Leftrightarrow & (x+1)^2 - 1 - 1 > 0 \\ & \Leftrightarrow & (x+1)^2 - (\sqrt{2})^2 > 0 \\ & \Leftrightarrow & (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) > 0. \end{array}$$
Un tableau de signe nous permet alors de résoudre cette inéquation.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $x+1-\sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de x^2+2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

alors l'application $g \circ f_{|]-\infty,-1-\sqrt{2}[\cup]-1+\sqrt{2},+\infty[}$ est bien définie et, pour tout nombre réel x de $]-\infty,-1-\sqrt{2}[\cup]-1+\sqrt{2},+\infty[$, on a
$$g \circ f(x) = g(x^2+2x-1) = \ln(x^2+2x-1).$$

Exercice d'entraînement 1.3. Notons
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 1 \end{array}.$$

Déterminer $f^{-1}([0,1])$ et $f([1,2])$.

Correction : Déterminons l'ensemble $f^{-1}([0,1])$. Soit x un nombre réel. On a
$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}([0,1]) & \Leftrightarrow & f(x) \in [0,1] \\ & \Leftrightarrow & 0 \leq f(x) \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & 0 \leq x^2 - 1 \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & 1 \leq x^2 \leq 2 \\ & \Leftrightarrow & x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]. \end{array}$$

Ainsi, $f^{-1}([0,1]) = [-\sqrt{2},-1] \cup [1,\sqrt{2}]$.

Déterminons maintenant l'ensemble $f([1,2])$.

$$\begin{array}{rcl} y \in f([1,2]) & \Leftrightarrow & \exists x \in [1,2],\ y = f(x) \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in [1,2],\ y = x^2 - 1 \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in [1,2],\ y + 1 = x^2 \\ & \Leftrightarrow & y+1 \geq 0 \text{ et } ((\exists x \in [1,2], x = \sqrt{y+1}) \text{ ou } (\exists x \in [1,2], x = -\sqrt{y+1}). \end{array}$$

Comme $-\sqrt{y-1}$ est négatif et n'appartient donc pas à $[1,2]$, on a
$$\begin{array}{rcl} y \in f([1,2]) & \Leftrightarrow & y+1 \geq 0 \text{ et } 1 \leq \sqrt{y+1} \leq 2 \\ & \Leftrightarrow & y+1 \geq 0 \text{ et } 1^2 = 1 \leq y+1 \leq 2^2 = 4 \\ & \Leftrightarrow & y+1 \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 3 \end{array}$$

car la fonction carrée est croissante sur $[1,2]$. Ainsi, $f([1,2]) = [0,3]$.

2 Séance 2

Exercice d'entraînement 2.1 (La fonction cotangente)**.** On appelle fonction cotangente et on note cot la fonction définie par l'expression
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction cotangente.
2. Calculer $\cot(\frac{\pi}{6})$, $\cot(\frac{\pi}{4})$, $\cot(\frac{\pi}{3})$ et $\cot(\frac{\pi}{2})$.
3. Étudier la parité et la périodicité de la fonction cot. Sur quel intervalle J suffit-il d'étudier cette fonction ? Comment en déduit-on le graphe de la fonction cot sur I en entier ?
4. Montrer que la fonction cot est dérivable sur I et calculer sa fonction dérivée en fonction de cot puis en fonction de sin.
5. Établir le tableau des variations de la fonction cot sur J. En déduire l'allure du graphe de la fonction cot sur l'intervalle $]-2\pi, 2\pi[$.
6. Question bonus : trouver une interprétation géométrique de la cotangente dans un triangle rectangle puis en utilisant le cercle trigonométrique.

Correction :

1. L'expression $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ a un sens si et seulement si $\sin(x) \neq 0$ ce qui revient à dire que
$$x \not\equiv 0[\pi].$$
Ainsi
$$I = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$
2. On a
$$\cot(\frac{\pi}{6}) = \frac{\cos(\frac{\pi}{6})}{\sin(\frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot(\frac{\pi}{3}) = \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot(\frac{\pi}{4}) = \frac{\cos(\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \qquad \cot(\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{1} = 0$$
3. Pour tout nombre réel x dans I, on a
$$\cot(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \cot(x).$$
Ainsi, la fonction cotangente est π-périodique : il suffit de l'étudier sur l'ensemble $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$. De plus, pour tout nombre réel x de I, on a
$$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\cot(x).$$
Ainsi, la fonction cotangente est impaire et il suffit de l'étudier sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
Du graphe de cette fonction sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on déduit le graphe de la fonction sur $[-\frac{\pi}{2}, 0[$ par symétrie centrale par rapport à l'origine. Le reste du graphe s'en déduit par translations du graphe sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ de vecteurs de coordonnées $(n\pi, 0)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
4. Comme les fonctions cos et sin sont dérivables sur I et comme
$$\forall x \in I,\ \sin(x) \neq 0$$
alors la fonction cot est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x dans I,
$$\begin{aligned} \cot'(x) &= \tfrac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin(x)^2} \\ &= \tfrac{-\sin(x)^2 - \cos(x)^2}{\sin(x)^2} \\ &= -1 - \cot(x)^2 \\ &= \tfrac{-1}{\sin(x)^2}. \end{aligned}$$
5. Pour tout point x de $J =]0, \frac{\pi}{2}]$, on a
$$\cot'(x) = -1 - \cot(x)^2 \leq -1 < 0.$$

Par conséquent, la fonction cot est strictement décroissante sur J. De plus

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1 \\ \lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0 \end{cases}$$

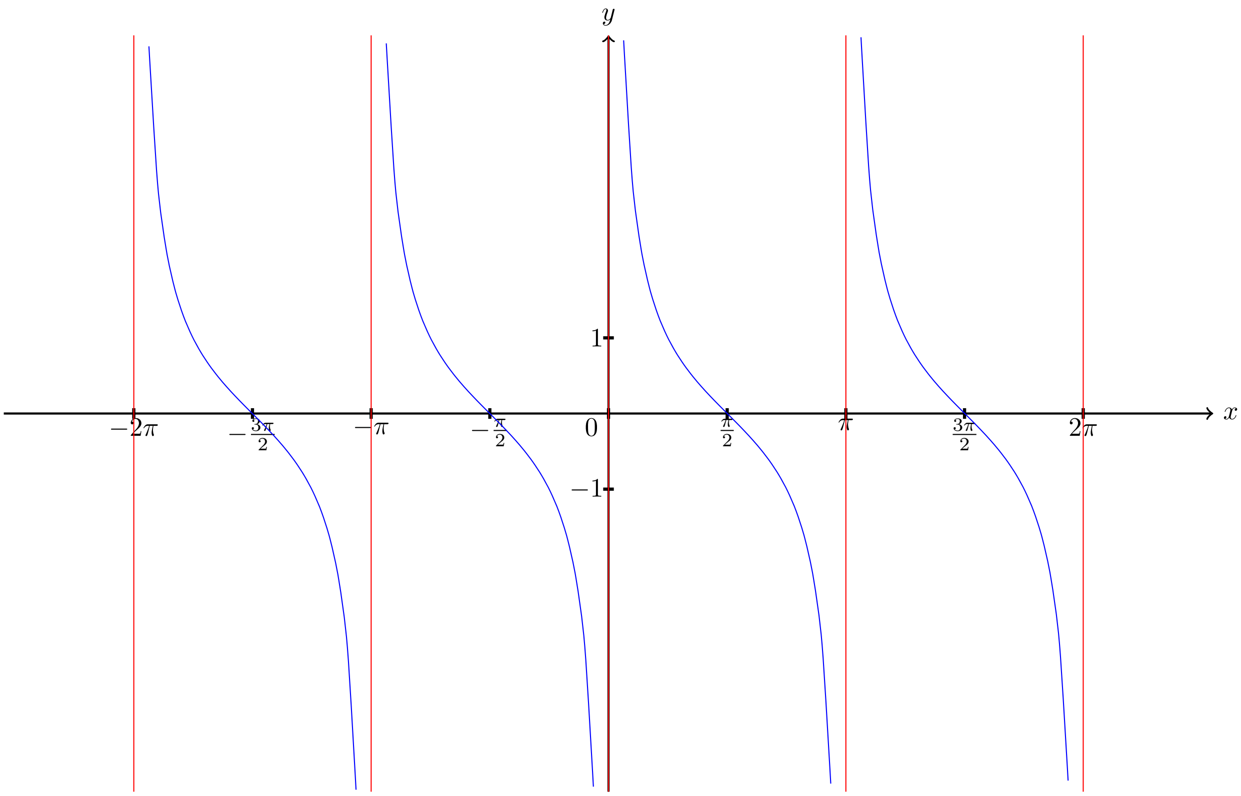
et, pour $x \in J$, $\sin(x) > 0$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} \cot(x) = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction cotangente sur J

	0		$\frac{\pi}{2}$
Variations de cot	$+\infty$	$\searrow$	$\cot(\frac{\pi}{2}) = 0$

On représente ci-dessous en bleu le graphe de la fonction cot ainsi que les asymptotes verticales à ce graphe (en rouge).



Exercice d'entraînement 2.2. Mêmes questions que dans l'exercice 2.2. avec la fonction f définie par l'expression

$$f(x) = \frac{\cos(5x)}{\cos(5x) + 1}.$$

On tracera l'allure du graphe de f sur $[-\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}]$.

Correction :

1. x appartient à l'ensemble de définition de f si et seulement si le dénominateur de l'expression qui définit f ne s'annule pas, c'est-à-dire que $\cos(5x)+1 \neq 0$ ou encore que $\cos(5x) \neq -1$, ce qui signifie que $5x$ est congru à π modulo 2π, ou encore que x est congru à $\frac{\pi}{5}$ modulo $\frac{2\pi}{5}$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est
$$A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{5} + 2k\frac{\pi}{5} \mid \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Pour tout nombre réel x de A, $x+\frac{2\pi}{5}\in A$ et

$$\begin{aligned} f(x+\tfrac{2\pi}{5}) &= \frac{\cos(5x+2\pi)}{\cos(5x+2\pi)+1} \\ &= \frac{\cos(5x)}{\cos(5x)+1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc f est $\frac{2\pi}{5}$-périodique. Ainsi, il suffit d'étudier f sur $]-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}[$. De plus, pour tout nombre réel x de A,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\cos(-5x)}{\cos(-5x)+1} \\ &= \frac{\cos(5x)}{\cos(5x)+1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc f est paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0,\frac{\pi}{5}[$. Du graphe de cette fonction sur $[0,\frac{\pi}{5}[$, on déduit le graphe sur $]-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}[$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Le reste du graphe se déduit de cette partie du graphe par translations de vecteurs $(2k\frac{\pi}{5},0)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

3. Comme la fonction $u_1 : x\mapsto 5x$ est polynômiale (et même linéaire), alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc leur composée $u_2=\cos\circ u_1 : x\mapsto\cos(5x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x

$$u_2'(x)=u_1'(x)\cos'(u_1(x))=-5\sin(5x).$$

Comme la fonction u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout comme la fonction constante égale à 1, leur somme $u_3=u_2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u_3'=u_2'+0=u_2'$. Comme les fonctions u_2 et u_3 sont dérivables sur A et comme u_3 ne s'annule pas sur A, alors le quotient $f=\frac{u_2}{u_3}$ est dérivable sur A et, pour tout point x de A,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u_2'(x)u_3(x)-u_2(x)u_3'(x)}{u_3(x)^2} \\ &= \frac{-5\sin(5x)(\cos(5x)+1)+5\cos(5x)\sin(5x)}{(\cos(5x)+1)^2} \\ &= \frac{-5\sin(5x)}{(\cos(5x)+1)^2}. \end{aligned}$$

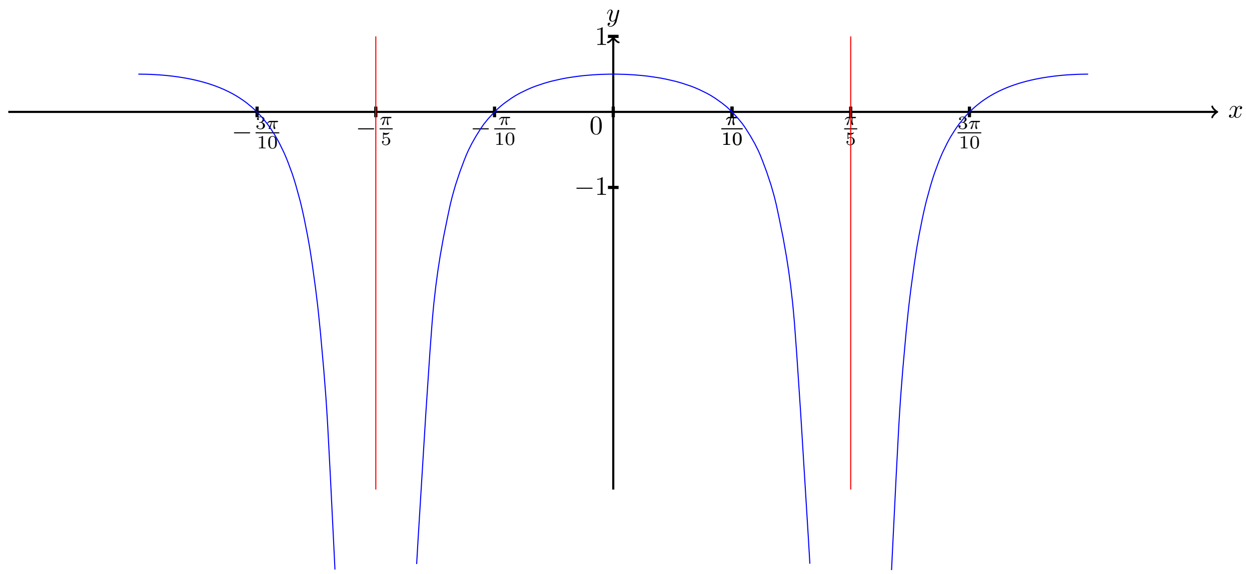
4. Comme la fonction sinus est strictement positive sur $]0,\pi[$ (et s'annule en 0), la fonction f' est strictement négative sur $]0,\frac{\pi}{5}[$ et s'annule en 0. De plus, $\cos(\pi)=-1$ et, pour $x\in[0,\frac{\pi}{5}[$, $\cos(5x)+1>0$, d'où, comme $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{5}}\cos(5x)+1=0$, alors

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{5}^-} f(x)=-\infty.$$

On en déduit le tableau de variations de f sur $[0,\frac{\pi}{5}[$.

	0		$\frac{\pi}{5}$
Variations de f	$f(0)=\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

En utilisant la deuxième question, on en déduit l'allure du graphe de f sur $[-\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{5}]$ représenté en bleu ci-dessous. On a représenté les asymptotes verticales du graphe de f en rouge.



3 Séance 3

Exercice d'entraînement 3.1 (Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique)**.** On note cosh et sinh les fonctions définies par les expression

$$\begin{cases} \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{cases}.$$

1. Étudier les fonctions cosh et sinh (ensemble de définition, parité, variations, limites) et représentez-les graphiquement.
2. Montrer que, pour tous nombres réels x et y

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

$$\cosh(x+y) + \sinh(x+y) = (\cosh(x) + \sinh(x))(\cosh(y) + \sinh(y))$$

$$\cosh(x+y) - \sinh(x+y) = (\cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(y) - \sinh(y)).$$

En déduire des expressions de $\cosh(x+y)$ et $\sinh(x+y)$ en fonction de $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(y)$, $\sinh(y)$.

Correction :

1. Les fonctions cosh et sinh sont définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on a

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

donc la fonction cosinus hyperbolique est paire : il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, +\infty[$. De plus

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

donc la fonction sinus hyperbolique est impaire. Là encore, il suffit donc d'étudier cette fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Comme la fonction $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc les fonctions cosh et sinh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x,

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}(-e^{-x}) = \sinh(x).$$

et

$$\sinh'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}(-e^{-x}) = \cosh(x).$$

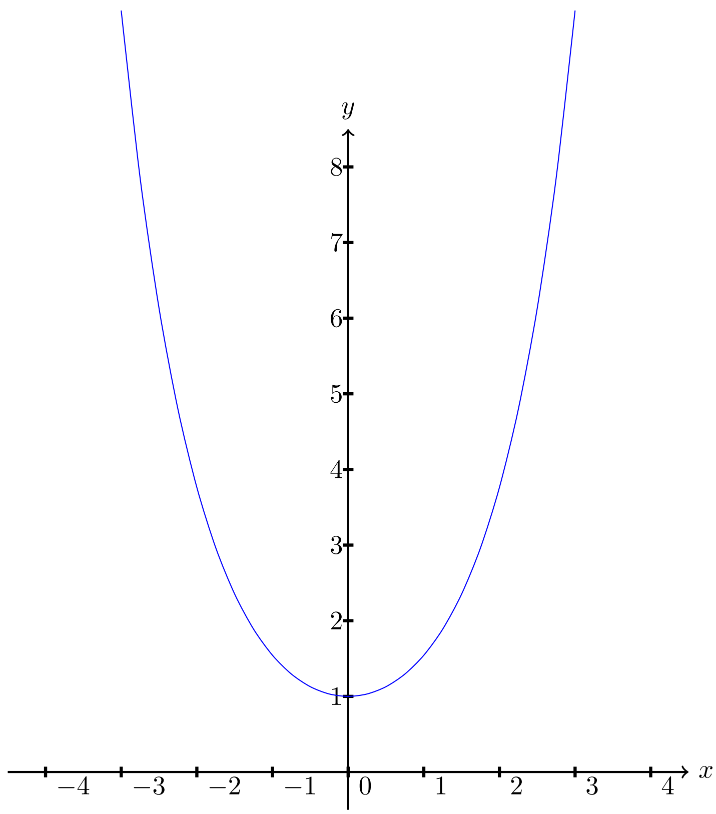
De plus, remarquons que, pour tout nombre réel x,

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} > \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0 = 0$$

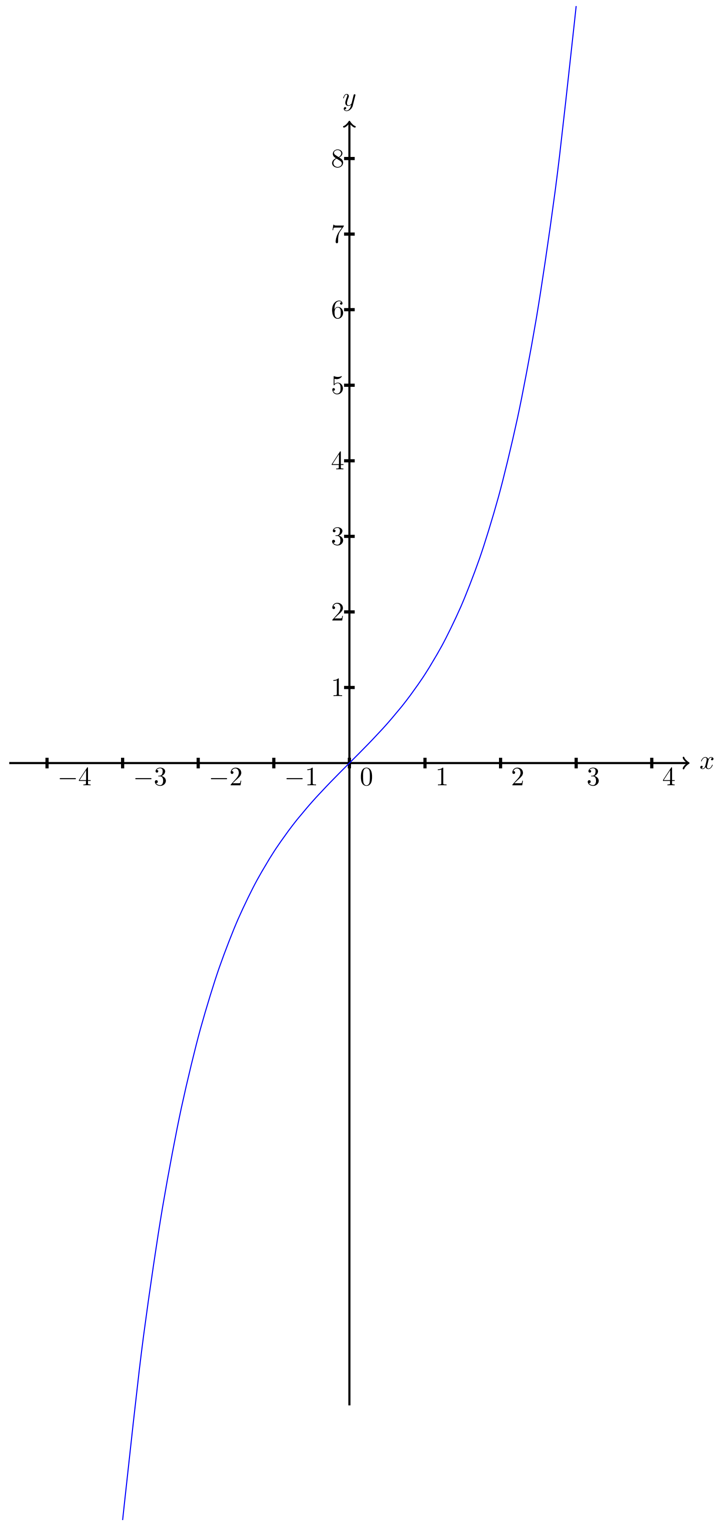
donc la fonction sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\sinh(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, alors, pour tout $x > 0$, $\sinh(x) > 0 = \sinh(0)$ et la fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} e^{y} = 0$), alors

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \cosh(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sinh(x) = +\infty \end{cases}.$$

En combinant ceci avec les propriétés de parité de ces fonctions, on obtient la représentation graphique suivante du cosinus hyperbolique (on appelle cette courbe la « chainette »)



et la représentation graphique suivante du sinus hyperbolique



2. Soit x un nombre réel. On a

$$\begin{array}{rcl}\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 & = & \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ & = & \frac{1}{4}((e^x)^2 + (e^{-x})^2 + 2e^x e^{-x}) - \frac{1}{4}((e^x)^2 + (e^{-x})^2 - 2e^x e^{-x}) \\ & = & \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^0) - \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2e^0) \\ & = & \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) \\ & = & \frac{4}{4} = 1.\end{array}$$

Remarquons que, pour tout nombre réel x

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}) = e^x$$

et

$$\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}) = e^{-x}.$$

Ainsi, pour tous nombres réels x et y,

$$\begin{cases} \cosh(x+y) + \sinh(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = (\cosh(x) + \sinh(x))(\cosh(y) + \sinh(y)) \\ \cosh(x+y) - \sinh(x+y) = e^{-x-y} = e^{-x} e^{-y} = (\cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(y) - \sinh(y)). \end{cases}$$

En prenant la somme des ces deux égalités, on obtient

$$\begin{aligned} 2\cosh(x+y) &= (\cosh(x) + \sinh(x))(\cosh(y) + \sinh(y)) + (\cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(y) - \sinh(y)) \\ &= 2\cosh(x)\cosh(y) + 2\sinh(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

donc $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$. De même, en prenant la différence des deux égalités, on obtient

$$\begin{aligned} 2\sinh(x+y) &= (\cosh(x) + \sinh(x))(\cosh(y) + \sinh(y)) - (\cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(y) - \sinh(y)) \\ &= 2\cosh(x)\sinh(y) + 2\cosh(y)\sinh(x) \end{aligned}$$

donc $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \cosh(y)\sinh(x)$.

4 Séance 4

Exercice d'entraînement 4.1. Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x + 3}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\ln(x) + x}{2x + 4}$.
3. $\lim\limits_{x \to -2} \cos\left(\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + x - 2}\right)$.
4. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$.
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x + x}{e^x + 1}$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x)}{3\ln(x) + (\ln(x))^2}$.
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \ln(x)$.
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$.

Correction :

1. Si on veut calculer la limite directement, on tombe sur une forme indéterminée. Pour tout nombre réel $x > -3$, on a
$$\frac{x^3 + 2x + 1}{x + 3} = \frac{x^3(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x(1 + \frac{3}{x})} = x^2 \frac{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x}}.$$
Or,
$$\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1 + 0 = 0 = 1$$
et
$$\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1 + 0 = 1.$$
Par conséquent
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, alors
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{x + 3} = +\infty.$$
2. Comme, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ et comme $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, alors
$$\lim_{x \to 0} x\ln(x) + x = 0.$$
Or $\lim\limits_{x \to 0} 2x + 4 = 2 \times 0 + 4 = 4$, d'où
$$\lim_{x \to 0} \frac{x\ln(x) + x}{2x + 4} = \frac{0}{4} = 0.$$

3. Là encore, si l'on veut calculer la limite directement, on tombe sur une forme indéterminée. Remarquons que, pour tout nombre réel x

$$\begin{array}{rcl} x^2+x-2 & = & (x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-2 \\ & = & (x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4} \\ & = & (x+\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2 \\ & = & (x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}) \\ & = & (x-1)(x+2). \end{array}$$

De plus

$$x^2+4x+4 = x^2+2.2x+2^2 = (x+2)^2.$$

Par conséquent, pour tout nombre réel x dans $\mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$, on a

$$\begin{array}{rcl} \frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2} & = & \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-1)} \\ & = & \frac{x+2}{x-1}. \end{array}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-2} x+2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-2} x-1 = -3$, alors

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2} = \frac{0}{-3} = 0.$$

Or $\lim\limits_{y\to0} \cos(y) = \cos(0) = 1$ par continuité de la fonction cosinus d'où

$$\lim_{x\to-2} \cos\left(\frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}\right) = 1.$$

4. On tombe ici aussi sur une forme indéterminée. Pour tout nombre réel x, on a

$$\begin{array}{rcl} x^2+3x-4 & = & (x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}-4 \\ & = & (x+\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4} \\ & = & (x+\frac{3}{2})^2-(\frac{5}{2})^2 \\ & = & (x+\frac{3}{2}-\frac{5}{2})(x+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}) \\ & = & (x-1)(x+4). \end{array}$$

Ainsi, pour tout nombre réel $x \neq 1$

$$\frac{x^2+3x-4}{x-1} = \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x+4.$$

et

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = 1+4 = 5.$$

5. On tombe là encore sur une forme indéterminée. On va factoriser par le terme dominant au numérateur et au dénominateur. Pour tout nombre réel x, on a

$$\begin{array}{rcl} \frac{2^x+x}{e^x+1} & = & \frac{e^{x\ln(2)}+x}{e^x+1} \\ & = & \frac{e^{x\ln(2)}(1+xe^{-x\ln(2)})}{e^x(1+e^{-x})} \\ & = & e^{x(\ln(2)-1)}\frac{1+xe^{-x\ln(2)}}{1+e^{-x}}. \end{array}$$

Comme $2 < e = e^1$ et comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $\ln(2) < \ln(e) = 1$ et $\ln(2)-1 < 0$. Ainsi, comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(2)-1)x = -\infty \\ \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0, \end{array} \right.$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x(\ln(2)-1)} = 0.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} 1+xe^{-x\ln(2)} = 1+\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(2)}(x\ln(2))e^{-x\ln(2)} = 1+\frac{1}{\ln(2)}\lim_{y\to+\infty} ye^{-y} = 1+\frac{1}{\ln(2)}\times 0 = 1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1+0 = 1$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+xe^{-x\ln(2)}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1} = 1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+x}{e^x+1} = 0\times 1 = 0.$$

6. On tombe sur une forme indéterminée. Remarquons que, comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ alors, pour $x>1$, $\ln(x)>\ln(1)=0$ et, comme $(\ln(x))^2\geq 0$, alors $3\ln(x)+(\ln(x))^2>0$ et $3\ln(x)+(\ln(x))^2\neq 0$. Pour $x>1$, on a

$$\begin{array}{rcl} \frac{\ln(2x)}{3\ln(x)+(\ln(x))^2} & = & \frac{\ln(2)+\ln(x)}{\ln(x)^2+3\ln(x)} \\ & = & \frac{\ln(x)(1+\frac{\ln(2)}{\ln(x)})}{\ln(x)^2(1+\frac{3}{\ln(x)})} \\ & = & \frac{1}{\ln(x)}\frac{1+\frac{\ln(2)}{\ln(x)}}{1+\frac{3}{\ln(x)}}. \end{array}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)} = 0$$

et

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} = 1+\ln(2)\times 0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{3}{\ln(x)} = 1+3\times 0 = 1 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\ln(2)}{\ln(x)}}{1+\frac{3}{\ln(x)}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{3\ln(x)+(\ln(x))^2} = 0\times 1 = 0.$$

7. On tombe encore sur une forme indéterminée. Pour $x>0$, on a

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x^2+1}-\ln(x) & = & \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\ln(x) \\ & = & |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\ln(x) \\ & = & x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\ln(x) \\ & = & x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{\ln(x)}{x}). \end{array}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1+0 = 1$ et $\lim\limits_{y\to 1}\sqrt{y}=\sqrt{1}=1$ (par continuité de la fonction $\sqrt{.}$), alors

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Or, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{\ln(x)}{x}) = 1-0 = 1.$$

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\ln(x) = +\infty.$$

8. Là encore, on tombe sur une forme indéterminée. Pour $x > 0$, on a $x^2 + x > 0$ et $x^2 + 1 > 0$ donc $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$ est bien défini. Pour tout nombre réel $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1} &= (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})\tfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \tfrac{(\sqrt{x^2+x})^2-(\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \tfrac{x^2+x-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

car $x^2 + x > 0$ et $x^2 + 1 > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1} &= \tfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \tfrac{x(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2}(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})} \\
&= \tfrac{x}{|x|}\tfrac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \tfrac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{cases}
\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1 + 0 = 1 \\
\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1 \\
\lim\limits_{y\to 1} \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1
\end{cases},$$

alors

$$\begin{cases}
\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} = 1 \\
\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 1
\end{cases}.$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 + 1 = 2.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 - 0 = 1,$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}.$$