**TD de fondements mathématiques 1**

# 5 Séance 5

**Exercice d'entraînement 5.1.** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes à l'aide d'encadrements.

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+3}{x} + \frac{e^x+x}{e^{2x}+1}$.
2. $\lim_{x\to+\infty} x^2\sin(x)+e^x$.
3. $\lim_{x\to+\infty} g(x)\frac{\ln(x)^2+1}{\ln(x)+2}+x$, où $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout nombre réel $x$,
$$-5 \leq g(x) \leq 2.$$

Correction :

1. Pour tout nombre réel $x$, on a
$$\frac{e^x+x}{e^{2x}+1} = \frac{e^x(1+xe^{-x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = e^{-x}\frac{1+xe^{-x}}{1+e^{-2x}}.$$
Or $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{Y\to-\infty} e^Y = 0$ et, par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$, d'où
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\frac{1+xe^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0\times\frac{1+0}{1+0} = 0.$$
donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{e^{2x}+1} = 0.$$
Pour tout nombre réel $x>0$, on a
$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$
donc
$$2 \leq \cos(x)+3 \leq 4$$
et, comme $x>0$,
$$\frac{2}{x} \leq \frac{\cos(x)+3}{x} \leq \frac{4}{x}.$$
Or
$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 2\times 0 = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 4\times 0 = 0 \end{cases}$$
donc, d'après le théorème d'encadrement,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+3}{x} = 0.$$
Par conséquent,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+3}{x} + \frac{e^x+x}{e^{2x}+1} = 0+0 = 0.$$
2. Soit $x$ un nombre réel. On a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc, comme $x^2 \geq 0$, on a
$$-x^2 \leq \sin(x)x^2.$$
Ainsi,
$$-x^2+e^x \leq \sin(x)x^2+e^x.$$

Or,
$$-x^2 + e^x = e^x(1 - x^2e^{-x}).$$
et, par croissance comparée,
$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$$
d'où
$$\lim_{x\to+\infty} 1 - x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + x^2e^{-x} = 1 + 0 = 1.$$
Ainsi,
$$\lim_{x\to+\infty} -x^2 + e^x = +\infty.$$
D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que
$$\lim_{x\to+\infty} \sin(x)x^2 + e^x = +\infty.$$

3. Soit $x > 1$ un nombre réel. Alors $\ln(x) + 2 > 0 + 2 > 0$ et $\ln(x)^2 + 1 > 0$ donc $\frac{\ln(x)^2+1}{\ln(x)+2} > 0$. Par conséquent,
$$-5\frac{\ln(x)^2 + 1}{\ln(x) + 2} \leq g(x)\frac{\ln(x)^2 + 1}{\ln(x) + 2}$$
et
$$-5\frac{\ln(x)^2 + 1}{\ln(x) + 2} + x \leq g(x)\frac{\ln(x)^2 + 1}{\ln(x) + 2} + x.$$
On a
$$-5\frac{\ln(x)^2 + 1}{\ln(x) + 2} + x = x(-5\frac{\ln(x)}{x}\frac{1 + \frac{1}{\ln(x)^2}}{1 + \frac{2}{\ln(x)}} + 1).$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, alors
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\ln(x)} = 0.$$
donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{\ln(x)^2}}{1 + \frac{2}{\ln(x)}} = \frac{1}{1} = 1.$$
Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, d'où
$$\lim_{x\to+\infty} -5\frac{\ln(x)}{x}\frac{1 + \frac{1}{\ln(x)^2}}{1 + \frac{2}{\ln(x)}} = 0.$$
Par conséquent
$$\lim_{x\to+\infty} -5\frac{\ln(x)^2 + 1}{\ln(x) + 2} + x = +\infty.$$
En utilisant le théorème d'encadrement, on en déduit que
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)\frac{\ln(x)^2 + 1}{\ln(x) + 2} + x = +\infty.$$

# 6 Séance 6

**Exercice d'entraînement 6.1** (Continuité d'une fonction)**.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$ d'une variable réelle définie par l'expression
$$f(x) = e^x \ln(x^2 + 4x + 1) + \cos(x).$$
Sur quel ensemble la fonction $f$ est-elle continue ? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des théorèmes de votre cours.

Correction : La fonction $f$ est définie sur l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $x^2+4x+1>0$. Or, pour tout nombre réel $x$,

$$\begin{aligned} x^2+4x+1 &= (x+2)^2-2^2+1 \\ &= (x+2)^2-(\sqrt{3})^2 \\ &= (x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

On effectue alors un tableau de signes.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2-\sqrt{3}$ | | $-2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x+2-\sqrt{3}$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| Signe de $x+2+\sqrt{3}$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $x^2+4x+1$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Ainsi, la fonction $f$ est définie sur $A = ]-\infty, -2-\sqrt{3}[\cup]-2+\sqrt{3}, +\infty[$.

Comme

1. la fonction $x \mapsto x^2+4x+1$ est continue sur $A$ car polynômiale,
2. pour tout point $x$ de $A$, $x^2+4x+1>0$,
3. la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,

alors leur composée $x \mapsto \ln(x^2+4x+1)$ est continue sur $A$.
Or la fonction exponentielle est continue sur $A$, d'où, comme le produit de deux fonctions continues est continue, la fonction $u : x \mapsto e^x \ln(x^2+4x+1)$ est continue sur $A$.
Enfin, comme la fonction cosinus est continue sur $A$ et comme la somme de deux fonctions continues est continue, alors $f = u + \cos$ est continue sur $A$.

**Exercice d'entraînement 6.2** (Recollement de fonctions)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{l} \forall z>0,\ f(z) = \frac{z^4+2z^2}{z^6+z^2} \\ \forall z \leq 0,\ f(z) = 1-\cos(z). \end{array}$$

La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ? Si la réponse est non, sur quel ensemble la fonction $f$ est-elle continue ?

Correction : Pour tout réel $z>0$, $z^6+z^2>0+0=0$ donc $z^6+z^2 \neq 0$. De plus, les fonctions $z \mapsto z^4+2z^2$ et $z \mapsto z^6+z^2$ sont des fonctions polynômiales donc sont continues sur $\mathbb{R}_-^*$. Par conséquent, la fonction $f$, qui est le quotient de ces deux fonctions sur $\mathbb{R}_-^*$, est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

De plus, comme la fonction $z \mapsto \cos(z)$ et la fonction constante égale à 1 sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction $f$, qui est la différence de ces deux fonctions, est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Au final, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Étudions maintenant la continuité de $f$ en 0. Pour tout nombre réel $z>0$,

$$\begin{aligned} \frac{z^4+2z^2}{z^6+z^2} &= \frac{z^2(z^2+2)}{z^2(z^4+1)} \\ &= \frac{2+z^2}{1+z^4}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{z\to 0} \frac{2+z^2}{1+z^4} = \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

Par conséquent,

$$\lim_{z\to 0^+} f(z) = 2.$$

De plus, par continuité de la fonction cosinus

$$\lim_{z\to 0} 1-\cos(z) = 1-\cos(0) = 1-1 = 0.$$

Ainsi,
$$\lim_{z\to 0^-} f(z) = 0.$$
Comme $0 \neq 2$, la fonction $f$ n'est pas continue en 0.

**Exercice d'entraînement 6.3** (Application du théorème des valeurs intermédiaires).

1. Montrer que l'équation $2^x - 2x = 3$ admet au moins une solution sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 5x + 2 = 1$ a au moins deux solutions sur $[0, 2]$.

Correction :

1. Notons $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 2^x - 2x = e^{\ln(2)x} - 2x.$$
Comme les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \ln(2)x$ et exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$, alors la fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2^x \end{array}$$
est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, comme la fonction $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $f(0) = 2^0 - 2.0 = 1 < 3$ et $f(4) = 2^4 - 2.4 = 8 > 3$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet au moins une solution sur $[0, 4] \subset [0, +\infty[$.
2. Notons
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x^2 - 5x + 2. \end{array}$$
La fonction $f$ est une fonction polynômiale donc est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $f(0) = 2 > 1$, $f(1) = -1 < 1$ et $f(2) = 4 > 1$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 2 = 1$ admet au moins une solution sur $]0, 1[$ et une solution sur $]1, 2[$. Cette équation admet donc au moins deux solutions sur $[0, 2]$.

# 7 Séance 7

**Exercice d'entraînement 7.1.** En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer dans chacun des cas si la fonction $f$ est dérivable au point $a \in \mathbb{R}$.

1. $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -3x^2 + 1 \end{array}$$
en $a = 1$.
2. $$f: \begin{array}{ccc} ]-1, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{x+1} \end{array}$$
en $a = 1$ puis en $a \in \mathbb{R}$ quelconque.
3. $$f: \begin{array}{ccc} [-1, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x+2}{\sqrt{x+1}+2} \end{array}$$
en $a = -1$.
4. $$f: \begin{array}{ccc} [-1, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{\sqrt{x+1}+2} \end{array}$$
en $a = -1$.

Correction :

1. Pour tout nombre réel $x \neq 1$, on a
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-3x^2+1+2}{x-1} = \frac{-3(x^2-1)}{x-1} = -3(x+1).$$
donc
$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -3\times 2 = -6.$$
La fonction $f$ est dérivable en 1 et a pour nombre dérivé $-6$ en 1.
2. Soit $a$ un nombre réel. Pour tout nombre réel $x \in ]-1,+\infty[\setminus\{a\}$,
$$\begin{aligned} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \tfrac{\frac{x}{x+1}-\frac{a}{a+1}}{x-a} \\ &= \tfrac{x(a+1)-a(x+1)}{(x-a)(a+1)(x+1)} \\ &= \tfrac{x-a}{(x-a)(a+1)(x+1)} \\ &= \tfrac{1}{(a+1)(x+1)}. \end{aligned}$$
Ainsi
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{(a+1)^2}$$
et la fonction $f$ est dérivable en $a$ et a pour nombre dérivé $\frac{1}{(a+1)^2}$ en $a$. En particulier, la fonction $f$ est dérivable en 1 et a pour nombre dérivé $\frac{1}{4}$ en 1.
3. Pour tout nombre réel $x$ dans $]-1,+\infty[$,
$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{2x+2}{(x+1)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+2}.$$
Ainsi
$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{2}{\sqrt{-1+1}+2} = 1$$
donc la fonction $f$ est dérivable en $-1$ et a pour nombre dérivé 1 en $-1$.
4. Pour tout nombre réel $x$ dans $]-1,+\infty[$,
$$\begin{aligned} \tfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \tfrac{\frac{x}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{1}{2}}{x+1} \\ &= \tfrac{2x+\sqrt{x+1}+2}{2(x+1)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \tfrac{1}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+2)}. \end{aligned}$$
On en déduit que
$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = +\infty$$
et la fonction $f$ n'est pas dérivable en $-1$.

**Exercice d'entraînement 7.2.** En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)^2-\cos(a)^2}{x^2-a^2}$, où $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\sin(x))}{\sin(x)}$.

Correction :
1. Pour tout nombre réel $x$ distinct de $a$ et de $-a$,
$$\frac{\cos(x)^2-\cos(a)^2}{x^2-a^2} = \frac{(\cos(x)-\cos(a))(\cos(x)+\cos(a))}{(x-a)(x+a)}.$$
On a
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} = \cos'(a) = -\sin(a) \\ \displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)+\cos(a)}{x+a} = \frac{2\cos(a)}{2a} \end{cases}$$

donc
$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)^2-\cos(a)^2}{x^2-a^2}=\frac{-2\cos(a)\sin(a)}{2a}=\frac{-\sin(2a)}{2a}.$$
De manière alternative, on pouvait utiliser la définition du nombre dérivé en $a$ de $\cos^2$ pour calculer cette limite.

2. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée des fonctions exponentielle et
$$u:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 3x\end{array}.$$
De plus, pour tout nombre réel $x$, $f'(x)=u'(x)\exp\circ u(x)=3e^{3x}$. Ainsi, pour $x\neq 0$,
$$\frac{e^{3x}-1}{e^x-1}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\frac{x-0}{e^x-e^0}.$$
Or
$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=3\\ \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{e^x-e^0}=\frac{1}{\exp'(0)}=\frac{1}{\exp(0)}=1\end{array}\right.$$
d'où
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^x-1}=\frac{3}{1}=3.$$

3. Pour tout nombre réel $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a
$$\frac{\ln(1+x\sin(x))}{\sin(x)}=x\times\frac{\ln(1+x\sin(x))}{x\sin(x)}.$$
Or,
$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}x\sin(x)=0\times\sin(0)=0\\ \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h-0}=\ln'(1)=\frac{1}{1}=1\end{array}\right.$$
d'où
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin(x))}{x\sin(x)}=1$$
et
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin(x))}{\sin(x)}=0.$$

# 8 Séance 8

**Exercice d'entraînement 8.1** (Calculs de dérivées)**.** Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner son ensemble de définition, étudier la dérivabilité de la fonction et calculer sa fonction dérivée.

1. La fonction $f_1$ est définie par l'expression
$$f_1(x)=x^e\sqrt{x^2-3x}.$$
2. La fonction $f_2$ est définie par l'expression
$$f_2(x)=2^{3^{\cos(x)}}.$$
3. La fonction $f_3$ est définie par les expressions
$$\left\{\begin{array}{l}f_3(x)=x^2\ln(|x|\sqrt{|x|})\text{ si }x\neq 0\\ f_3(0)=0\end{array}\right..$$

Correction :

1. Par définition,
$$f_1(x) = e^{e\ln(x)}\sqrt{x^2 - 3x}.$$
Ainsi, la fonction $f_1$ est définie sur l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $x > 0$ et $x^2 - 3x \geq 0$. Pour tout nombre réel $x$, $x^2 - 3x = x(x - 3)$ d'où le tableau de signes suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $x^2-3x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi, l'ensemble de définition de $f_1$ est
$$A = ]0, +\infty[ \cap (] - \infty, 0] \cup [3, +\infty[) = [3, +\infty[.$$
Comme
(a) la fonction $x \mapsto e\ln(x)$ est dérivable sur $A \subset \mathbb{R}_+^*$,
(b) la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$,
alors leur composée $u : x \mapsto x^e = e^{e\ln(x)}$ est dérivable sur $A$ et, pour tout nombre réel $x$ de $A$,
$$u'(x) = e\ln'(x)e^{e\ln(x)} = e\frac{x^e}{x} = ex^{e-1}.$$
Comme
(a) la fonction $v : x \mapsto x^2 - 3x$ est dérivable sur $]3, +\infty[$ car elle est polynômiale,
(b) pour tout nombre réel $x > 3$, $x^2 - 3x > 0$ d'après le tableau de signe ci-dessus,
(c) la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
alors leur composée $w : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x}$ est dérivable sur $]3, +\infty[$ de dérivée définie par
$$\forall x > 3,\ w'(x) = v'(x).\frac{1}{2\sqrt{v(x)}} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x}.$$
Comme les fonction $u$ et $w$ sont dérivables sur $]3, +\infty[$, alors leur produit $f_1$ est dérivable sur $]3, +\infty[$ et
$$\forall x > 3,\ f_1'(x) = u'(x)w(x) + u(x)w'(x) = ex^{e-1}\sqrt{x^2 - 3x} + x^e\frac{2x - 3}{x^2 - 3x}.$$
Étudions maintenant la dérivabilité de $f_1$ en 3. Pour $x > 3$,
$$\begin{aligned} \tfrac{f_1(x)-f_1(3)}{x-3} &= \tfrac{x^e\sqrt{x(x-3)}-0}{x-3} \\ &= \tfrac{x^e\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}. \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\lim_{x\to 3} \frac{f_1(x) - f_1(3)}{x - 3} = +\infty$$
donc $f_1$ n'est pas dérivable en 3.

2. Pour $a > 0$, on note $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction exponentielle en base $a$. Remarquons que la fonction $f_2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f_2 = \exp_2 \circ(\exp_3 \circ \cos)$. Comme $\exp_a$ est la composée de la fonction exponentielle avec la fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(a)x \end{array},$$
alors $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a'(x) = \ln(a)\exp'(\ln(a)x) = \ln(a)\exp_a(x).$$

De plus, comme la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée la fonction $-\sin$, alors la fonction $\exp_3 \circ \cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp_3 \circ \cos)'(x) = \cos'(x)\exp_3'(\cos(x)) = -\ln(3)\sin(x)3^{\cos(x)}.$$

Ainsi, la fonction $f_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel $x$,

$$\begin{array}{rcl} f_2'(x) & = & (\exp_3 \circ \cos)'(x)\exp_2'((\exp_3 \circ \cos)(x)) \\ & = & -\ln(3)\sin(x)3^{\cos(x)}\ln(2)\exp_2((\exp_3 \circ \cos)(x)) \\ & = & -\ln(2)\ln(3)\sin(x)3^{\cos(x)}2^{3^{\cos(x)}}. \end{array}$$

3. La fonction $f_3$ est définie sur $\mathbb{R}$. Remarquons que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f_3(x) = \frac{3}{2}x^2\ln(x)$. La fonction $f_3$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car les fonctions ln et $x \to x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0,\ f_3'(x) = 3x\ln(x) + \frac{3}{2}x.$$

Pour tout nombre réel $x < 0$, on a $f_3(x) = \frac{3}{2}x^2\ln((-x))$. Comme $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, $-x > 0$ pour $x < 0$ et comme ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction $\ln \circ (x \mapsto -x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et

$$\forall x < 0, (\ln \circ (x \mapsto -x))'(x) = -(\ln)'(-x) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, la fonction $f_3$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et

$$\forall x < 0,\ f_3'(x) = \frac{3}{2}x + 3x\ln(|x|).$$

Enfin

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} \frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x\ln(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3}{2}(-x)\ln(-x) = 0 \end{array} \right.$$

par croissances comparées. Ainsi, la fonction $f_3$ est dérivable en 0 de dérivée 0 (on aurait pu alternativement démontrer la continuité de $f_3$ en 0 et utiliser le théorème de prolongement de la dérivée, mais c'était un peu plus long ici). En conclusion, la fonction $f_3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée 0 en 0 et

$$\forall x \neq 0,\ f_3'(x) = \frac{3}{2}x + 3x\ln(|x|).$$