TD de fondements mathématiques 1

9 Séance 9

Exercice d'entraînement 9.1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp\left(\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1\right).$$

La fonction f admet-elle un maximum global ? un minimum global ? Si oui, en quel(s) point(s) est-il atteint ?

Correction : On va étudier la fonction f afin d'en déterminer les extrema globaux.
Comme

1. la fonction $u : x \mapsto \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,
2. la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$,

alors leur composée $f = \exp \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = u'(x)\exp'(u(x)) = (3x^3 - 6x^2 - 3x + 6)\exp(u(x)).$$

Comme l'exponentielle d'un nombre réel est strictement positive, il suffit d'étudier le signe du polynôme $3x^3 - 6x^2 - 3x + 6$ pour en déduire le signe de f'.

Remarquons que 1 est racine du polynôme $3x^3 - 6x^2 - 3x + 6$ donc

$$\begin{aligned} 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 &= (x-1)(3x^2 - 3x - 6) \\ &= 3(x-1)(x^2 - x - 2) \\ &= 3(x-1)((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}) \\ &= 3(x-1)((x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2) \\ &= 3(x-1)((x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2})) \\ &= 3(x-1)(x-2)(x+1). \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau des variations de f.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarquons que, pour $x \neq 0$,

$$\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1 = x^4\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right).$$

donc
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+6x-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+6x-1=+\infty.$$
Or, $\lim_{Y\to+\infty}\exp(Y)=+\infty$, d'où, par composition des limites, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Ainsi, la fonction f n'est pas majorée et n'admet donc pas de maximum global.

D'après le tableau de variation de f, f admet un minimum global en -1 ou en 2. Remarquons que $f(-1)=\exp(-\frac{23}{4})$ et que $f(2)=\exp(1)$. Comme $-\frac{23}{4}<1$ et la fonction expoenntielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $f(-1)<f(2)$. Ainsi, f admet un minimum global en -1.

Exercice d'entraînement 9.2. Soit f la fonction
$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&e^{x^9-9x+1}\end{array}.$$

1. Soit a un nombre réel. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=a$.
2. Déterminer $f([0,1])$ et $f^{-1}([e,+\infty[)$.

Correction :

1. Étudions la fonction f. Notons
$$u:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x^9-9x+1\end{array}.$$
Comme la fonction u est polynômiale, elle est dérivable et, pour tout nombre réel x,
$$u'(x)=9x^8-9=9(x^8-1).$$
Ainsi, la fonction $f=\exp\circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x,
$$f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=9(x^8-1)e^{x^9-9x^8+1}.$$
Remarquons que 1 et -1 sont des racines évidentes du polynôme x^8-1, d'où l'idée de tenter de factoriser ce polynôme par $(x+1)(x-1)$. On a, pour tout nombre réel x :
$$\begin{array}{rcl}u'(x)&=&9(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)\\ &=&9(x-1)(x+1)(1+x^2+x^4+x^6).\end{array}$$
Remarquons que, pout tout nombre réel x,
$$1+x^2+x^4+x^6\geq 1>0$$
d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

De plus, pour $x\neq 0$,
$$u(x)=x^9(1-\frac{9}{x^8}+\frac{1}{x^9}).$$
Or
$$\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{9}{x^8}+\frac{1}{x^9})=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{9}{x^8}+\frac{1}{x^9})=1-0+0=1$$
d'où $\lim_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}u(x)=-\infty$. Comme $\lim_{y\to+\infty}\exp(y)=+\infty$ et $\lim_{y\to-\infty}\exp(y)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$. De plus $f(-1)=e^9$ et $f(1)=e^{-7}$ d'où le tableau des variations de f :

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de f	0	$\nearrow$	e^9	$\searrow$	e^{-7}	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau des variations de f, l'équation $f(x)=a$

— n'a pas de solution si $a \leq 0$;
— a une unique solution dans $]-\infty, -1[$ si $0 < a < e^{-7}$;
— a deux solutions (1 et une dans $]-\infty, -1[$) si $a = e^{-7}$;
— a trois solutions (une dans $]-\infty, -1[$, une dans $]-1, 1[$ et une dans $]1, +\infty[$) si $e^{-7} < a < e^9$;
— a deux solutions (-1 et une dans $]1, +\infty[$) si $a = e^9$;
— a une unique solution dans $]1, +\infty[$ si $a > e^9$.

2. D'après le tableau de variations de f, la fonction f est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Comme elle est continue sur $[0, 1]$, on a $f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [e^{-7}, e]$.
Pour déterminer $f^{-1}([e, +\infty[)$, résolvons l'équation $f(x) = e$. Pour tout nombre réel x

$$\begin{aligned} f(x) = e \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(e^{x^9-9x+1}) = \ln(e) \\ &\Leftrightarrow \quad x^9 - 9x + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x^8 - 9) = 0 \end{aligned}$$

Cette équation a donc pour solutions $-9^{\frac{1}{8}}$, 0 et $9^{\frac{1}{8}}$. Il s'agit de toutes les solutions de cette équation qui n'admet que trois solutions d'après la question précédente. En utilisant le tableau des variations de f, on en déduit que $f^{-1}([e, +\infty[) = [-9^{\frac{1}{8}}, 0] \cup [9^{\frac{1}{8}}, +\infty[$.

10 Séance 10

Exercice d'entraînement 10.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \quad & f(x) = (x - \beta)^2 - 2 \\ \forall x < 0, \quad & f(x) = \alpha \sin(x), \end{aligned}$$

où α et β sont des paramètres réels qui seront déterminés dans l'exercice.

1. Déterminer α et $\beta > 0$ de sorte que la fonction f soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f admet-elle un minimum global ? un maximum global ? Le cas échéant, préciser en quel(s) point(s) il est atteint.

Correction :

1. Pour que la fonction f soit continue en 0, il suffit que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

c'est-à-dire que

$$(0 - \beta)^2 - 2 = \alpha \times \sin(0)$$

ou encore que $\beta^2 = 2$. Comme $\beta > 0$, cela revient à dire que $\beta = \sqrt{2}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, f'(x) = 2(x - \beta).$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et

$$\forall x < 0, f'(x) = \alpha \cos(x).$$

D'après le théorème de prolongement de la dérivée et supposant que $\beta = \sqrt{2}$, pour que la fonction f soit dérivable en 0, il suffit que

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$$

i.e $-2\beta = \alpha$. Ainsi, pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$, il suffit que $\beta = \sqrt{2}$ et $\alpha = -2\sqrt{2}$.

2. Des variations des fonction $x \mapsto x^2$ et de la fonction sinus, on en déduit les variations de la fonction f. La fonction f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, strictement décroissante sur $[0, \sqrt{2}]$, strictement décroissante sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ et les intervalles de la forme $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, avec $k < 0$ et strictement croissante sur les intervalles de la forme $[-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{-\pi}{2} + 2k\pi]$, avec $k \leq 0$. De plus, $\lim_{+\infty} f = +\infty$, $f(\sqrt{2}) = -2$, $f(-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -2\sqrt{2}$ pour tout entier $k \leq 0$. Ainsi, la fonction f n'est pas majorée mais, comme $-2 > -2\sqrt{2}$, admet un minimum en tout les points de la forme $-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \leq 0$, minimum qui vaut $-2\sqrt{2}$.

Exercice d'entraînement 10.2. Montrer à l'aide d'une récurrence que la fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

Correction : On montre par récurrence sur $n \geq 0$ que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier $n \geq 0$, $f^{(n)}$ est de la forme $P_n f$, où P_n est une fonction polynômiale.

Pour $n = 0$, $f = P_0 f$, où P_0 est la fonction constante égale à 1.

Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq 0$. Comme P_n est dérivable, car polynomiale et f est dérivable en tant que composée des fonction $x \mapsto x^2$ et exponentielle, qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors le produit $P_n f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la dérivée n-ième $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) & = & P_n'(x)f(x) + P_n(x)f'(x) \\ & = & P_n'(x)f(x) + P_n(x)2xe^{x^2} \\ & = & (P_n'(x) + 2xP_n(x))e^{x^2}. \end{array}$$

On en déduit la propriété au rang $n+1$ en définissant la fonction polynomiale P_{n+1} par $P_{n+1}(x) = P_n'(x) + 2xP_n(x)$. Ceci achève la récurrence et démontre que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

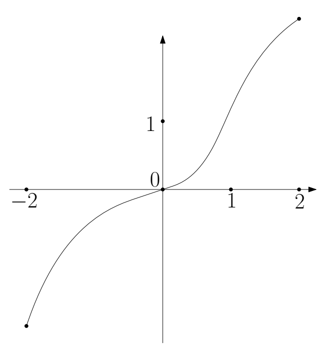
11 Séance 11

Exercice d'entraînement 11.1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,2] \\ x & \mapsto & \cos(x) + 1. \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5. \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x}. \end{array}$$

La fonction $f_4 : [-2,2] \to \mathbb{R}$ donnée par le graphe suivant.



Correction :

1. On a $f_1(0) = f_1(2\pi)$ donc l'application f_1 n'est pas injective, donc pas bijective. Par contre, comme la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$, alors la fonction f_1 est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$, donc $f_1([0,\pi]) = [f_1(\pi), f_1(0)] = [0,2]$, d'où $[0,2] = f_1([0,\pi]) \subset f_1(\mathbb{R}) \subset [0,2]$. Ainsi $f_1(\mathbb{R}) = [0,2]$ et l'application f_1 est surjective.
2. Étudions la fonction f_2. Remarquons que, pour tout nombre réel $x \neq -1$,

$$f_2(x) = \frac{1+x-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Ainsi le graphe de la fonction f_2 se déduit du graphe de la fonction inverse et on obtient pour la fonction f_2 le tableau des variations suivant.

	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations de f_2	$1 \nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow 1$

D'après le tableau des variations de f_2, l'équation $f_2(x) = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ si $a \neq 1$ et n'admet pas de solution si $a = 1$. Ainsi, l'application f_2 n'est pas surjective mais est injective.

3. La fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_3'(x) = 5x^4.$$
Ainsi, la dérivée de f_3 est strictement positive en tout point sauf en 0 où elle s'annule. Par conséquent, l'application f_3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent f_3 est injective sur $\mathbb{R}$. De plus
$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty. \end{cases}$$
Comme f_3 est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $f_3(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f_3(x), \lim_{x\to+\infty} f_3(x)[= \mathbb{R}$. Ainsi, l'application f_3 est surjective. Comme l'application f_3 est injective et surjective, elle est bijective.
4. L'application f_4 est strictement croissante donc injective. D'après le graphe de f_4, $f_4([-2, 2])$ est borné donc distinct de $\mathbb{R}$. Ainsi, l'application f_4 n'est pas surjective.

12 Séance 12

Exercice d'entraînement 12.1. Calculer, pour $x \in [-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x))$.

Correction : Rappelons que, comme arcsin est l'application réciproque de sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, alors, pour tout nombre réel x dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
Pour tout nombre réel $x \in [\frac{-3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, on a
$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \arcsin(\sin(-\pi - x)) = -\pi - x$$
car $-\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Pour tout nombre réel $x \in [\frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}]$,
$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = x + 2\pi$$
car $x + 2\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Enfin, pour tout nombre réel $x \in [\frac{-7\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}]$,
$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \arcsin(\sin(-3\pi - x)) = -3\pi - x$$
car $-3\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice d'entraînement 12.2. On rappelle que les fonctions cosh et sinh sont définies sur $\mathbb{R}$ par
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
et
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. En utilisant les résultats de l'exercice d'entrainement 3.1, montrer que le sinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et que le cosinus hyperbolique réalise une bijection de A vers $[1, +\infty[$, où A est un intervalle qui contient le point 1 à déterminer. On note argsh et argch les bijections réciproques respectives de ces bijections.
2. En utilisant le théorème de dérivation des fonctions réciproques, sur quels ensembles peut-on dire que les fonctions argch et argsh sont dérivables ? Calculer leurs fonctions dérivées (on pourra utiliser la formule $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ établie dans l'exercice d'entrainement 3.1).

Correction :

1. On a déjà vu lors de l'exercice d'entraînement 3.1 que la fonction sinh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\sinh(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty}\sinh(x), \lim_{x\to+\infty}\sinh(x)[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$. On aussi vu que la fonction cosh est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $\cosh([0,+\infty[) = [\cosh(0), \lim_{x\to+\infty}\cosh(x)[= [1,+\infty[$.

2. On a vu que lors de l'exercice d'entraînement 3.1 que la fonction sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout point x de $\mathbb{R}$, $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$ donc $\sinh'(x) \neq 0$. Par conséquent, par le théorème de dérivation des fonctions réciproques, on en déduit que la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout point x de $\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\mathrm{argsh}'(x) &= \tfrac{1}{\sinh'(\mathrm{argsh}(x))}\\ &= \tfrac{1}{\cosh(\mathrm{argsh}(x))}\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1+\sinh(\mathrm{argsh}(x))^2}}\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$
En effet, pour tout nombre réel y, $\cosh(y)^2 - \sinh(y)^2 = 1$ et $\cosh(y) > 0$ donc $\cosh(y) = \sqrt{1+\sinh(y)^2}$.
On a vu que lors de l'exercice d'entraînement 3.1 que la fonction cosh est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout point x de $\mathbb{R}_+^*$, $\cosh'(x) = \sinh(x) > 0$ donc $\cosh'(x) \neq 0$. Ainsi, d'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, la fonction argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et, pour tout nombre réel x de $]1,+\infty[$,
$$\begin{aligned}\mathrm{argch}'(x) &= \tfrac{1}{\cosh'(\mathrm{argch}(x))}\\ &= \tfrac{1}{\sinh(\mathrm{argch}(x))}\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{\cosh(\mathrm{argch}(x))^2-1}}\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}$$
En effet, pour tout nombre réel y dans $]0,+\infty[$, $\cosh(y)^2 - \sinh(y)^2 = 1$ et $\sinh(y) > 0$ donc $\sinh(y) = \sqrt{\cosh(y)^2-1}$.