

1. Déterminer si la fonction suivante est continue :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

2. Etablir le nombre de zéros de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$ sur l'intervalle $[-1, 0]$. Déterminer les points de Lagrange de f sur le même intervalle. Déterminer l'image de l'intervalle $[-1, 0]$ par la fonction f .
-

3. On donne une fonction f dérivable définie sur l'intervalle $[2, 5]$ telle que $f(2) = 3$, $f(5) = 2$ et $-3 \leq f' \leq 1$. Quel encadrement peut-on en déduire pour $\sup f$? Et pour $\inf f$? Et pour f ? Faire un dessin.
-

4. Encadrer $\sqrt{3.98} + e^{0.02}$ en sachant que $3.98 = 4 - 0.02$.
-

5. Soit $f : x \mapsto x^2 - x$. Dessiner le graphe de la fonction

$$f(x), \quad |f(x)|, \quad -f(x), \quad f(x+1), \quad f(x) + 1.$$

6. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2/x - 1 & 0 < x < 1 \\ x/2 + 1/2 & x \geq 1 \end{cases}$$

Tracer le graphique de f ; vérifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $I =]0, \infty[$; tracer le graphique de f^{-1} ; calculer $(f^{-1})(2)$ et $(f^{-1})(3)$.

7. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} f = \lim_{x \rightarrow 0_-} f \quad \text{car } f \text{ est paire.}$$

Les H_p du Thm de de l'Hôpital sont vérifiées donc

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \cos x = 1$$

On a donc que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

2] Pour établir le nombre de zéros de la fc f sur $[-1, 0]$ on regarde $f(-1)$, $f(0)$ et les éventuels points stationnaires de f (c'est-à-dire les zéros de f') sur $[-1, 0]$.

$$f(-1) = f(0) = 1$$

$$f': x \mapsto 3x^2 - 1 \quad \text{donc } f' = 0 \text{ pour } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ point de max locale ...

à comparer avec $x = -1$ et $x = 0$.

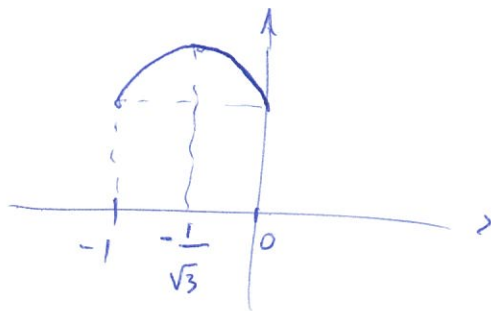
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} + 1 > 1$$

On en conclut que f n'a aucun zéro dans $[-1, 0]$.

Le point $x_L = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ est un point de Lagrange de f sur $[-1, 0]$ car il

$$\text{vérifie } (0 =) f'(x_L) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (= 0)$$

Enfin, $f([-1, 0]) = \left[1, \frac{2}{3\sqrt{3}} + 1\right]$.



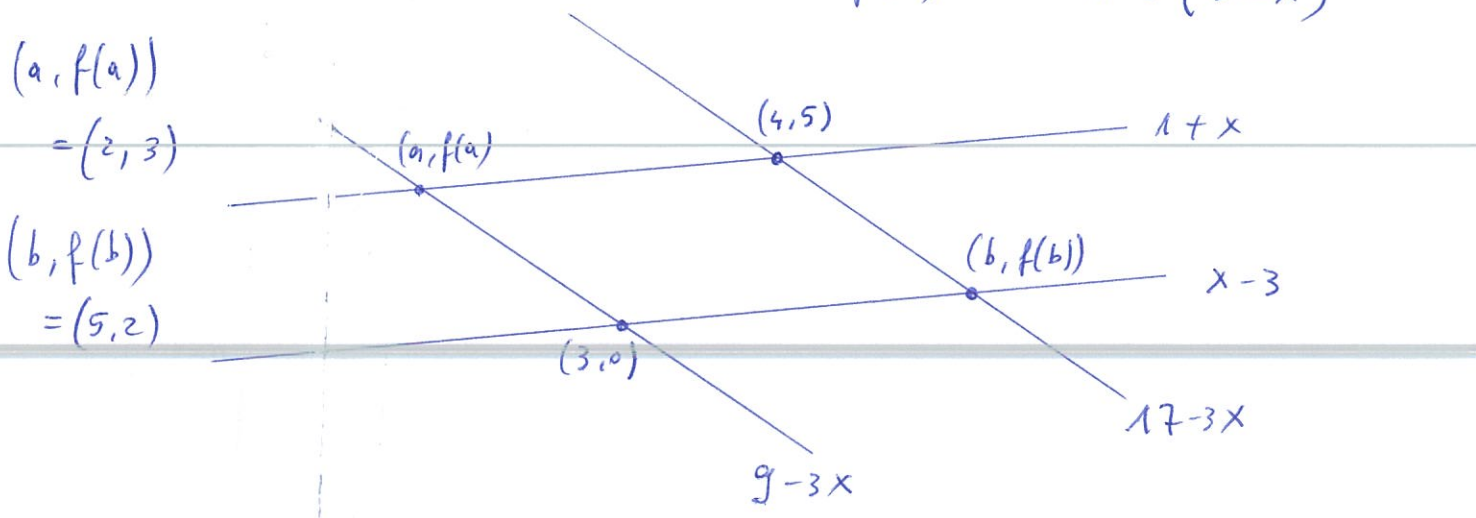
3] Pour avoir un encadrement de f
 on utilise l'IAF sur l'intervalle $[2, 5]$
 vu comme l'union des deux sous-intervalles
 $[2, x]$ et $[x, 5]$ (avec $x \in]2, 5[$).

ici x joue le rôle de b ici x joue le rôle de a

L'IAF s'écrit : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$
 pour une fonction f continue sur $[a, b]$,
 dérivable sur $]a, b[$ avec $m \leq f' \leq M$ sur $]a, b[$.

Sur $[2, x]$ on a $3 - 3(x-2) \leq f(x) \leq 3 + (x-2)$

Sur $[x, 5]$ on a $2 - (5-x) \leq f(x) \leq 2 + 3(5-x)$



En partant de la figure et des droites
 calculées on peut déduire que

$f(a)$	$\leq \sup f \leq 5$	sur $[a, 4]$
$f(b)$	$\leq \sup f \leq 5$	sur $[4, b]$
0	$\leq \inf f \leq f(a)$	sur $[a, 3]$
0	$\leq \inf f \leq f(b)$	sur $[3, b]$
0	$\leq f \leq 5$	sur $[2, 5]$

4] On utilise à nouveau l'IAF sur l'intervalle $I = [0, 0.02]$ et avec la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4-x} + e^x$
 On veut encadrer $f(0.02)$ donc $f(b)$ et on utilise $f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a)$ avec $m \leq f' \leq M$.

Ici $f' : x \mapsto \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} + e^x > 0$ sur I

alors $\underbrace{1 - \frac{1}{4}}_{f'(0)} \leq f' \leq \underbrace{e - \frac{1}{2\sqrt{3}}}_{f'(1)}$ (on prends large)

donc $\frac{3}{4} = f' \leq \underbrace{2.71 - 0.25}_{\sim 2.5}$

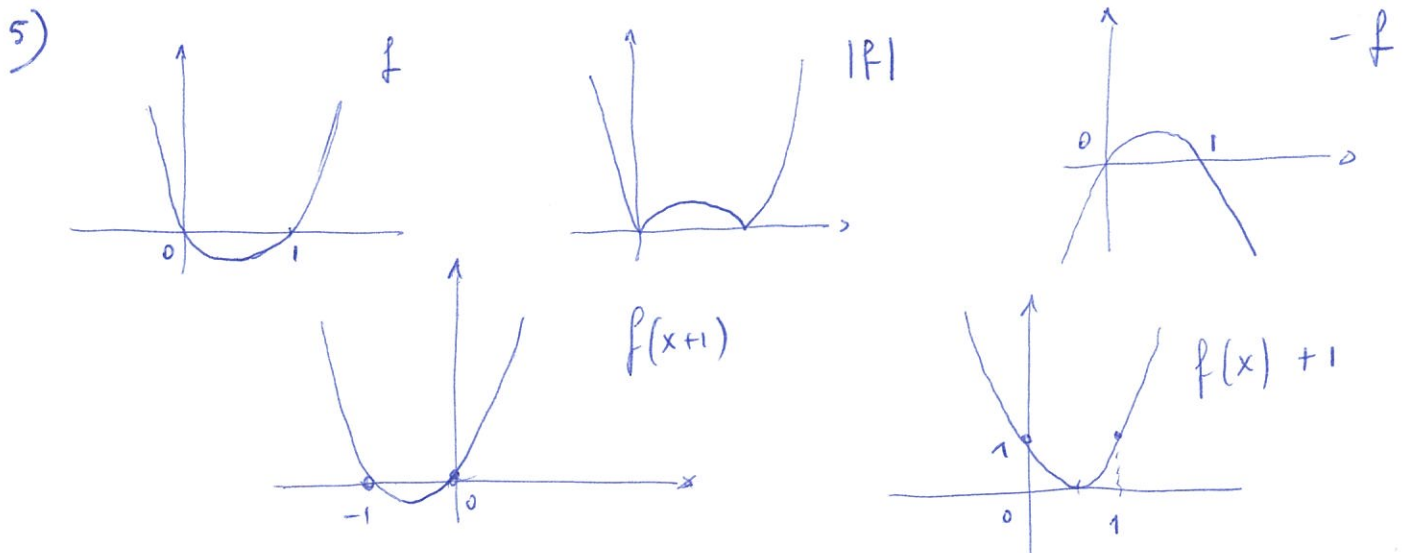
on revient à l'IAF :

$$3 + \frac{3}{4} \cdot 0.02 \leq f(0.02) \leq 3 + \frac{5}{2} \cdot 0.02$$

C'est-à-dire

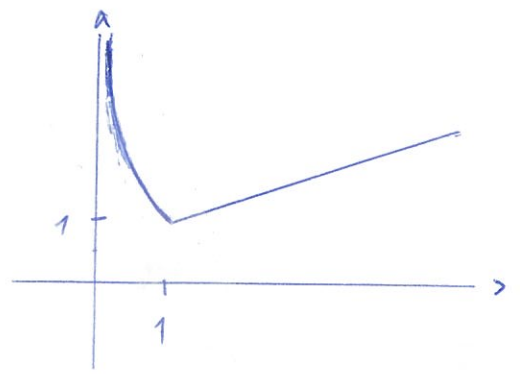
$$\boxed{3 + 0.015 \leq f(0.02) \leq 3 + 0.05}$$

En effet, avec la calculatrice, $f(0.02) \approx 3.0151951$.



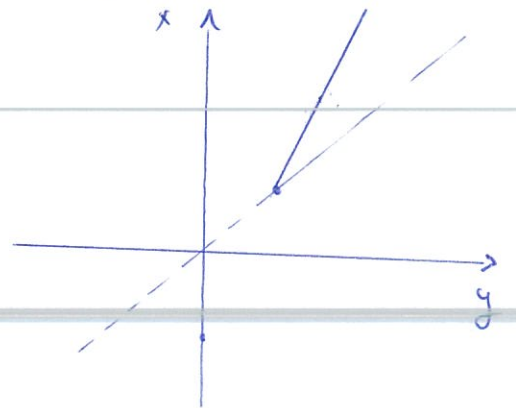
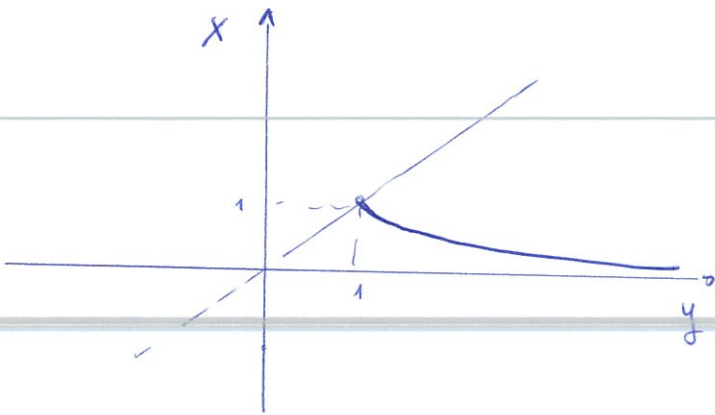
6]

$$f: x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x} - 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$$



f admet une fonction réciproque sur $]0, 1[$ et $[1, +\infty[$ car elle n'est pas monotone sur $]0, +\infty[$ mais séparément sur $]0, 1[$ et $[1, +\infty[$

Pour tracer le graphique de f^{-1} , on considère le sym de celui de f par rapport à la droite $y = x$



réciproque de f sur $]0, 1[$

Ici c'est un cas très simple où l'on peut calculer exactement l'expression de f^{-1} :

$$f^{-1}: y \mapsto \begin{cases} \frac{2}{y+1} & y \in [1, +\infty[\\ 2y-1 & y \in]0, 1[\end{cases}$$

Donc $(f^{-1})(2) = 3$ en effet $f(3) = 2$

et $(f^{-1})(3) = 5$ en effet $f(5) = 3$.

7) Une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue prend toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$.