1. Déterminer la valeur du paramètre $a$ pour que la fonction suivante soit continue :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{|x-1|}{x+1} & x > 0 \\ x^2 - a & x \leq 0. \end{cases}$$

   Déterminer aussi les points de non dérivabilité de $f$.

2. Etablir le nombre de zéros de la fonction $f : x \mapsto x^3+x+1$ sur l'intervalle $[-1, 0]$. Déterminer aussi les points de Lagrange de $f$ sur le même intervalle.

3. On donne une fonction $f$ dérivable définie sur l'intervalle $I = [-3, 3]$ telle que $f(-3) = 6$, $f(3) = 0$ et $-2 \leq f' \leq 1$. Quel encadrement peut-on en déduire pour

$$f(-2), \qquad f(1), \qquad \min_I f, \qquad \max_I f, \qquad f \qquad ?$$

   Donnez les différentes reponses et illustrez-les avec un dessin.

4. Encadrer $\ln(2.71)$ en sachant que $2.71 = e - 0.02$.

5. Enoncer le thèoreme de Rolle.

1)
$$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & x \geq 1 \\ \frac{1-x}{x+1} & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - \alpha & x \leq 0 \end{cases}$$

$f$ est separam continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Le seul point qui donne pb à la continuité de $f$ est $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - \alpha) = -\alpha$$

$f$ est continue en $x = 0$ si $\boxed{\alpha = -1}$

Les points qui donnent pb de derivabilité pour $f$ sont les points de "recollement" ($x = 0$ et $x = 1$). Pour étudier la dérivabilité de $f$ en $x = 0$ on suppose $f$ continue donc $\alpha = -1$.

$$f'_{0^+}(x) = \frac{-x-1-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2} \quad \text{d'où} \quad f'_+(0) = -2$$

$$f'_{0^-}(x) = 2x \quad \text{d'où} \quad f'_-(0) = 0$$

On voit que $f$ n'est pas derivable en $x = 0$ car $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.

On regarde la derivabilité en $x = 1$

$$f'_{1^-}(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \quad \text{d'où} \quad f'_-(1) = -\frac{1}{2}$$

$$f'_{1^+}(x) = \frac{1+x-x+1}{(1+x)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \quad \text{d'où} \quad f'_+(1) = \frac{1}{2}$$

Donc $f$ n'est pas derivable en $x = 1$ car $f'_+(1) \neq f'_-(1)$

2) $f : x \longmapsto x^3 + x + 1$ sur $[-1, 0] = I$

$f' : x \longmapsto 3x^2 + 1$ donc $f' > 0 \quad \forall x \in I$

$f$ est continue sur $I$

$f(-1) = -1 < 0$ , $f(0) = 1 > 0$

donc $\exists\, \alpha \in \mathring{I}$ tq $f(\alpha) = 0$. Le $\alpha$ est unique car $f' > 0 \quad \forall x \in I$ c'est-à-dire $f$ est strictement $\nearrow$ sur $I$. Le nombre de solution pour l'éq $f(x) = 0$ est 1.

---

On cherche les points de Lagrange pour $f$ c'est-à-dire les points $c \in I$ tq

$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = \dfrac{+1 + 1}{1} = +2$ en resolvant

$3c^2 + 1 = +2$ , $3c^2 - 1 = 0$ , $c = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

La fonction $f$ a 2 points de Lagrange en $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3) $f$ dérivable sur $I = [-3, 3]$ avec $\begin{cases} f(-3) = 6 \\ f(3) = 0 \\ -2 \leq f' \leq 1 \end{cases}$

On pose $I = [-3, x] \cup [x, 3]$

pour n'importe quel $x \in I$.

On utilise l'inégalité des accroiss. finis séparément sur $[-3, x]$ et $[x, 3]$ pour encadrer $f(x)$ et

$b$ $a$

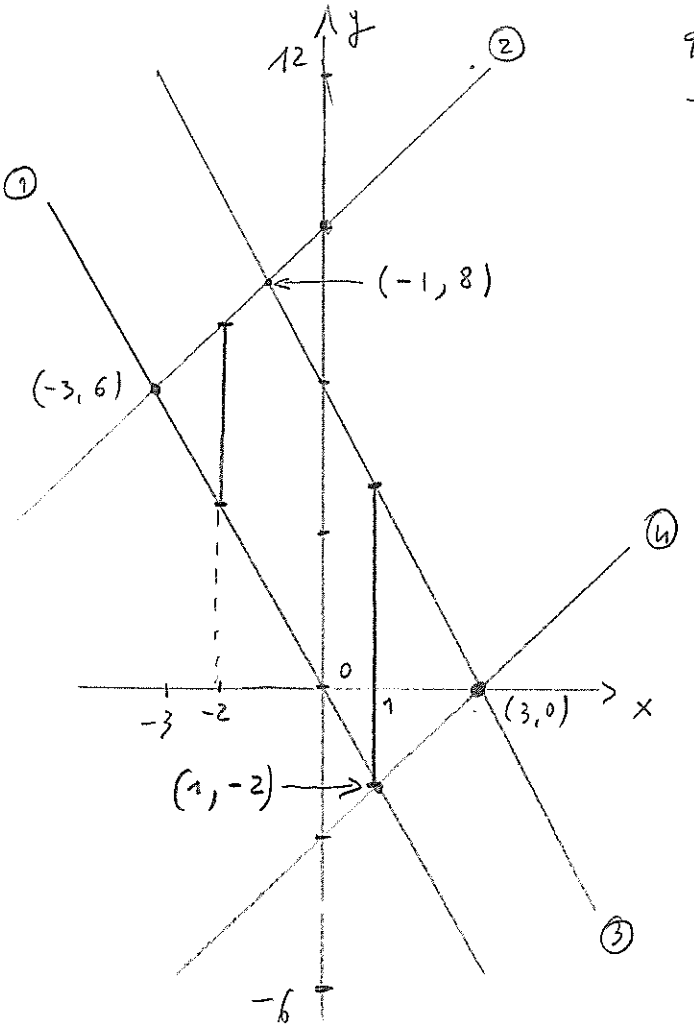
on fera le min à gauche et le max à droite pour définir l'encadrement de $f(x)$ $\forall x \in I$.

On peut écrire

$$\min_{x \in I} \{ \underset{①}{-2x}, \underset{④}{x-3} \} \leq f(x) \leq \max_{x \in I} \{ \underset{③}{6-2x}, \underset{②}{x+9} \}$$

① et ② : droites passantes par $(-3, 6)$ de pentes 2 et $-1$

③ et ④ : droites passantes par $(3, 0)$ de pentes 2 et $-1$




$\underset{②}{9 + x} = \underset{③}{6 - 2x}$ , $x = -1$

$\underset{①}{-2x} = \underset{④}{x - 3}$ , $x = 1$

$\boxed{4 \leq f(-2) \leq 7}$

① en $x = -2$ ② en $x = -2$

$\boxed{-2 \leq f(1) \leq 4}$

① en $x = 1$ ③ en $x = 1$

$\boxed{\min_I f = -2}$

$\boxed{\max_I f = 8}$

$\boxed{-2 \leq f \leq 8}$

$\min\{-2, \max\{6, 0\}\}$ $\max\{8, \min\{0, 6$

4) Pour encadrer $\ln(2.71)$ on utilise l'IAF

avec $f : x \mapsto \ln x$ définie pour $x > 0$

et $I = [\underset{a}{2.71}, e]$. Pour la dérivée $f'$ on a

$$\frac{1}{e} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\underbrace{2.71}_{e-0.02}} \quad \text{sur } I$$

$$1 - \frac{0.02}{e-0.02} \leq \ln(2.71) \leq 1 - \frac{1}{e}(0.02)$$

$$f(b) - M(b-a) \leq f(a) \leq f(b) - m(b-a)$$

Donc $\dfrac{(e - 2.02)}{(e - 0.02)} \leq \ln(2.71) \leq \dfrac{1}{e}(e - 0.02)$

5) cf. le cours.