Examen partiel d'analyse 1.
Specifier sur la copie NOM, PRENOM et GROUPE TD (parmis Elec, Phys, Mi, M1, M2)
Vous devez apporter le plus grand soin à la rédaction et justifiez vos réponses !

---

1. Soit (u_n) une suite numérique réelle croissante.
   Montrer que si (u_n) est majorée, alors elle converge vers $\ell = \sup\{u_n,\ n \in I\!N\}$.
   Montrer que si (u_n) n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$ pour $n \to +\infty$.

---

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} \quad n \geq 0.$
   - Montrer (par récurrence) que la suite (u_n) est decroissante et minorée par 0.
   - Montrer que la valeur limite ℓ est solution de l'équation $x = \frac{x}{x+1}$.
   - Conclure en déterminant la valeur de ℓ.
   - Illustrer par un dessin la convergence de (u_n) à ℓ.
   - Etudier le comportement de la suite (u_n) en fonction de la valeur initiale u_0.

---

3. Soit E le domaine de validité de l'inegalité $\sqrt{2-x} > x$.
   Déterminer, s'il existe, $\inf(E)$, $\min(E)$, $\sup(E)$, $\max(E)$.

---

4. Déterminer
   - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$; $\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2-n}}{e^{1-n}+e^{-2n}}$; $\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}}$;
   - $\lim_{n\to+\infty} u_n$ avec (u_n) définie par récurrence comme suit :
   $$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n;$$
   - pour quel intervalle de valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ on a que $\lim_{n\to+\infty}\ln[(1+a^n)^{\frac{1}{n^\lambda}}]$ est fini, avec $a \geq 1$;
   - pour quel intervalle de valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ l'égalité $\frac{n^\beta+n^2\ln n}{n^2+1} = o(n^3)$ est vraie pour $n \to +\infty$.

---

5. Déterminer le domaine de définition E, le signe, les limites au bord de E et les eventuelles asymptotes (vert., horiz., obliques) de la fonction suivante :
   $$f : x \mapsto \frac{1-xe^x}{e^x-1}.$$
   Donner l'allure du graphe de la fonction f.
   La fonction f est-elle invertible sur E ? Si oui, quel serait le graphe de f^{-1} ?

---

1) La suite (u_n) est majorée donc l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ possède une borne supérieure finie ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure (le plus petit des majorants de (u_n)) il existe un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tq $\ell - \varepsilon < u_{\bar{n}}$. Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par ℓ, on a donc que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(n \geq \bar{n} \implies \ell - \varepsilon < u_{\bar{n}} \leq u_n < \ell \, (\leq \ell + \varepsilon) \right)$$

c'est-à-dire $(n \geq \bar{n} \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$ et donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Supposons que (u_n) ne soit pas majorée.
$\forall M > 0$ il existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tq $u_{\bar{n}} > M$.
Comme (u_n) est croissante, on a donc $u_n \geq u_{\bar{n}} > M$ pour tout $n \geq \bar{n}$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

---

3) On considère l'inegalité suivante $(\sqrt{A} > B)$
$\sqrt{2-x} > x$. Deux situations à analyser :

a) $\begin{cases} B < 0 \\ \text{et} \\ A \geq 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x < 0 \\ \text{et} \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$ d'où $\boxed{x < 0}$.

b) $\begin{cases} B \geq 0 \\ \text{et} \\ A > B^2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et} \\ 2 - x > x^2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et} \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et} \\ -2 < x < 1 \end{cases}$ d'où $\boxed{0 \leq x < 1}$

On a alors $E = \,]-\infty, 0[\, \cup \, [0, 1[\, = \,]-\infty, 1[$

$\inf_{\mathbb{R}}(E) \nexists$, $\min_{\mathbb{R}}(E) \nexists$

$\sup_{\mathbb{R}}(E) = 1$, $\max_{\mathbb{R}}(E) \nexists$

2) Suite récurrente (générale) d'ordre 1 de type point-fixe $u_{n+1} = f(u_n)$

avec $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} & n \geq 0 \end{cases}$$

- (u_n) est $\searrow$ et minorée par zéro. On démontre ces deux propriétés ensemble et par récurrence.

$n = 0$ $\qquad u_0 = 1 > 0$. D'autre part,

~~de plus~~ $\qquad u_0 = 1 > \dfrac{1}{2} = u_1$

On suppose que $u_n > 0$ et que $u_{n-1} > u_n$ et on veut montrer que $u_{n+1} > 0$ et que $u_n > u_{n+1}$.

On sait que $u_n > 0$ donc $u_n + 1 > 1$ d'où $\dfrac{1}{u_n + 1} < 1$. On multiplie les deux côtés par $u_n > 0$ (ça ne change pas le sens de l'inégalité).

$$0 < \frac{1}{u_n + 1} < 1$$

donne $\qquad 0 < \underbrace{\dfrac{u_n}{u_n + 1}}_{u_{n+1}} < u_n$

d'où $u_n > u_{n+1}$ et $u_{n+1} > 0$.

- Si $n \to +\infty$ alors $v_n \to l$ mais aussi $v_{n+1} \to l$. On passe à la limite pour $n \to +\infty$ dans l'égalité de la récurrence qui est vraie pour tout $n \geq 0$.

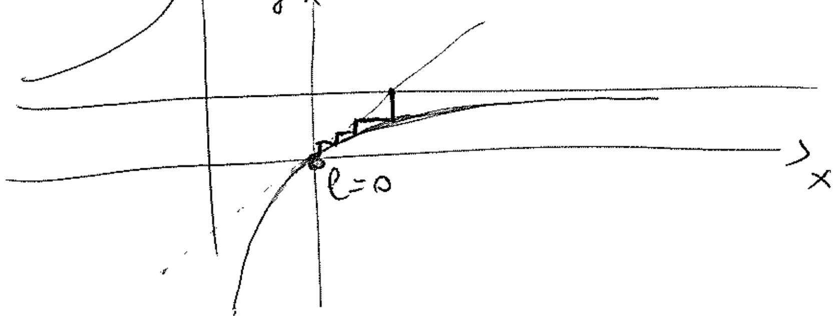
On a donc que $l = \frac{l}{l+1}$

- La valeur $l = 0$ est la seule qui vérifie l'égalité $\frac{l}{l+1} = l$.

On retrouve d'une part le Thm sur les suites décroissantes et minorée (ici par 0) qui donc convergent à leur borne inf (d'où $l = \inf_n (v_n) = 0$).

D'autre part, (v_n) est une suite de type point fixe donc si $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ alors $l = f(l)$ d'où $l = 0$ le seul point fixe de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{x+1}$.

- Dessin



(3)

- La suite $v_n \to l$ pour $n \to +\infty$ ssi v_0 est choisi dans un intervalle de valeurs ~~pour lesquelles~~ où f est une contraction (c'est-à-dire par exemple là où $|f'| < 1$).

$f' : x \longmapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ donc $|f'| < 1$ ssi $x > 0$ ou $x < -2$

Si $v_0 \in [0, +\infty[$ ou $v_0 \in]-\infty, -2]$ la suite (u_n) CV

- $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^n$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{\to e^2} \longrightarrow 0 \quad \text{pour } n \to +\infty$$

- $$\frac{e^{2-n}}{e^{1-n}+e^{-2n}} = \frac{e^2 e^{-n}}{e^1 e^{-n}+e^{-n}e^{-n}} = \frac{e^2}{e^1+e^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$$

- $$\frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}} = \frac{\cancel{n^{2n}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}{\cancel{n^{2n}}}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$$

- $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$ suite recurrente d'ordre 2 de type polynomiale

On considère le polynôme caracteristique

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ est racine double de $p(\lambda)$

Alors $u_n = (a+nb)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

avec $\begin{cases} a = -1 \\ a+b = 1 \end{cases}$ d'où $u_n = (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Alors $u_n \longrightarrow 0$ pour $n \to +\infty$.

(la puissance est plus faible de l'exponentielle.)

• $\ln\left(\left(1+a^n\right)^{1/n^\lambda}\right)$ $\qquad$ $a \geq 1$ fixé, $\lambda \in \mathbb{R}$ variable

$$= \frac{1}{n^\lambda} \ln\left(1+a^n\right)$$

$$= \frac{1}{n^\lambda}\left(\ln\left(a^n\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^\lambda}\ln a^n + \frac{1}{n^\lambda}\ln\left(1+\frac{1}{a^n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^{\lambda-1}}\ln a + \frac{1}{n^\lambda}\ln\left(1+\frac{1}{a^n}\right)$$

or $\ln\left(1+\frac{1}{a^n}\right) \leq \ln 2$ (étant $a \geq 1$)

et $\ln(a)$ est une constante

donc la limite est fini si $\boxed{\lambda \geq 1}$.

• $\dfrac{n^\beta + n^2 \ln n}{n^2+1} = o(n^3)$ $\qquad$ 5

ssi $\dfrac{n^\beta + n^2\ln n}{n^3(n^2+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

si $\beta > 2$ alors $\dfrac{n^\beta\left(1+\frac{\ln n}{n^{\beta-2}}\right)}{n^5\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ est fini ~~…~~ si $\beta \leq 5$

si $\beta \leq 2$ alors $\dfrac{n^2\left(\frac{1}{\cancel{n^{2\beta}}} + \frac{\ln n}{1}\right)}{n^5\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \longrightarrow 0$ car la puissance l'emporte sur le ln

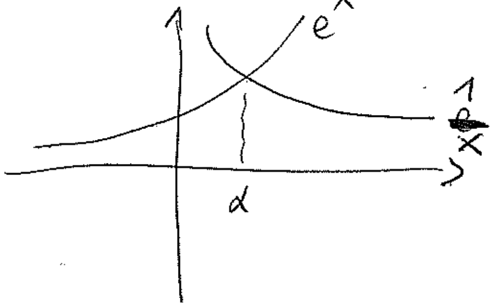
D'où $\boxed{\beta \leq 5}$

$$f : x \longmapsto \frac{1 - x e^x}{e^x - 1}$$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Signe de f :

on remarque que $f(x) = 0$ pour $x = \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$. En fait $f(x) = 0$ pour $\frac{1}{x} = e^x$ (α est déterminé graphiquem sans être evalué precisem)



si $x < 0$ alors $f < 0$
si $0 < x < \alpha$, $f > 0$
et si $x > \alpha$, $f < 0$.

Le bord de D_f est l'ensemble $\{\pm\infty, 0\}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f = -1$ donc $y = -1$ est asymptote horizz. pour $x \to -\infty$.

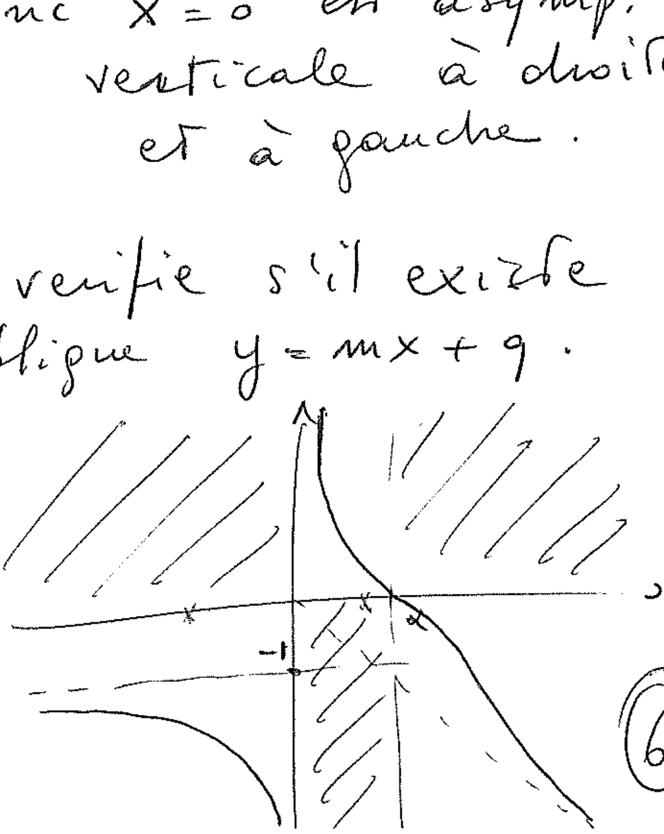
$\lim\limits_{x \to 0^+} f = +\infty$ donc $x = 0$ est asymp. verticale à droite et à gauche.
$\lim\limits_{x \to 0^-} f = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$ et on verifie s'il existe l'asymptote oblique $y = mx + q$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f}{x} = m = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f - mx) = q = 0$

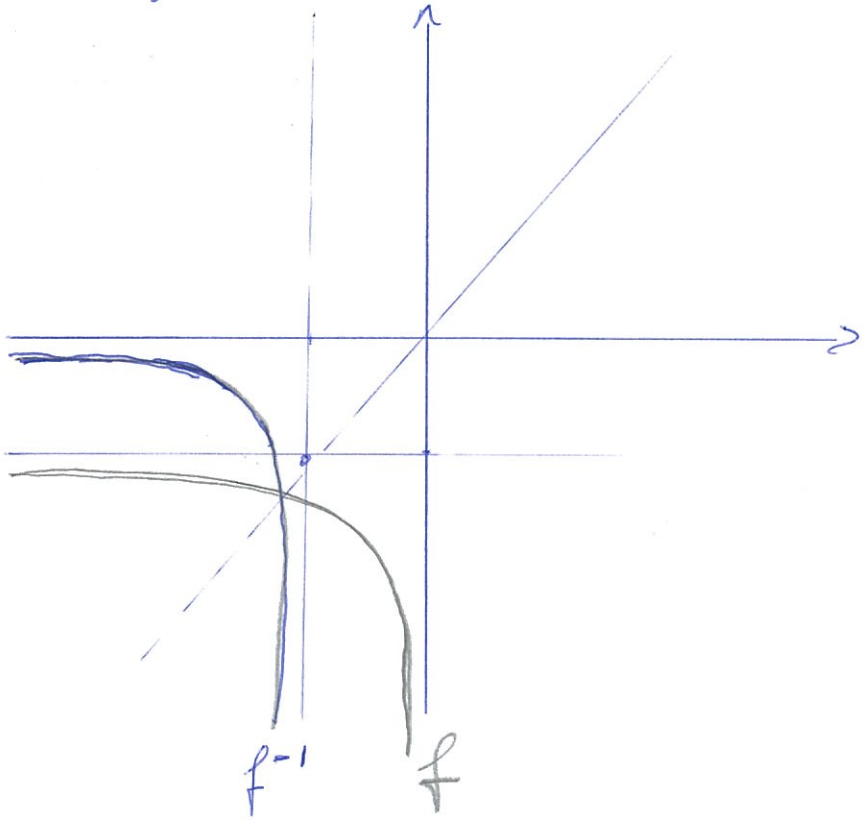
Donc $y = -x$ est asympt oblique pour $x \to +\infty$

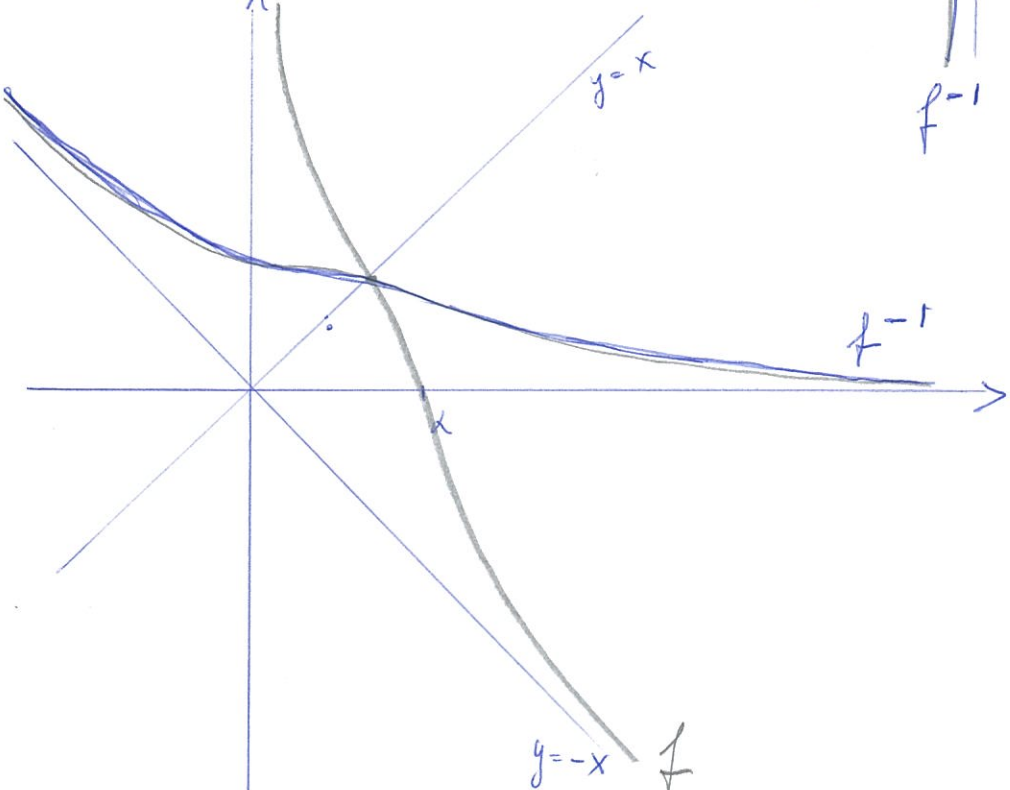


La fonction f est inversible sur $]-\infty, 0[$ ~~et~~ sur $]0, +\infty[$ car strictement décroissante.

Le graphe de f^{-1} est le sym du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.

Sur $]-\infty, 0[$





Sur $]0, +\infty[$