Aucuns documents et outils éléctroniques autorisés.

Examen partiel d'analyse 1.

Specifier sur la copie NOM, PRENOM et GROUPE TD (Elec, Phys1, Phys2, Mi, M1, M2) 1

Vous devez apporter le plus grand soin à la rédaction et justifiez vos réponses !

---

1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide.
   A l'aide des quantificateurs $\exists$, $\forall$, donner les définitions suivantes :

   (i) $s$ est un minorant de $E$, (ii) $s$ est le $\inf(E)$, (iii) $s$ est le $\min(E)$.

---

2. Soit $(u_n)$ une suite numérique réelle décroissante.
   Montrer que si $(u_n)$ est minorée, alors elle converge vers $\ell = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

---

3. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = -1, \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \quad n \geq 0.$
   - Montrer (par récurrence) que la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 3.
   - Montrer que la valeur limite $\ell$ vérifie l'équation $x = \sqrt{2x+3}$. Pourquoi ?
   - Conclure en déterminant la valeur de $\ell$.
   - Illustrer par un dessin la convergence de $(u_n)$ à $\ell$.

---

4. Justifier mathématiquement si les enoncés suivants sont vrais ou faux pour les suites données.
   - $u_n = \frac{3^n - 5n}{2^n - n^2}$ : (a) tend vers zéro, (b) tend vers $+\infty$, (c) tend vers $-\infty$.
   - $u_n = \frac{3n-1}{n^2}$ : (a) croissante, (b) $u_n \sim \frac{1}{n}$, (c) $u_n = o(\frac{1}{n})$.
   - $u_n = (\frac{n}{n+1})^n$ : (a) tend vers 1, (b) tend vers $e^{-1}$, (c) tend vers $+\infty$.
   - $u_{n+2} = -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n,\ u_0 = 1,\ u_1 = -\frac{7}{3}$ : (a) tend vers zéro, (b) n'a pas de limite.

---

5. Déterminer le domaine de définition $E$, le signe, les limites au bord de $E$, les eventuelles asymptotes (vert., horiz., obliques) et donner l'allure du graphe de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 6}{x+1}.$$

1) $E \subset \mathbb{R}$ , $s \in \mathbb{R}$

(i) $s$ est un minorant de $E$ si $\forall x \in E$ , $s \leq x$

(ii) $s = \inf(E)$ si

$$(i) \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in E \text{ tq } s \leq \bar{x} \leq s + \varepsilon.$$

(iii) $s = \min(E)$ si (i) et (ii) et $s \in E$.

2) $(u_n)$ suite réelle decroissante

donc $u_n \geqslant u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Or, $(u_n)$ est minorée donc $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tq

$\ell = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}}(u_n)$. On sait que $\ell$ est le plus grand des minorants, c'est-à-dire

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tq $\ell \leq u_{\bar{n}} \leq \ell + \varepsilon$.

Donc, $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}, \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n} \text{ on a}}$

$$\boxed{\ell - \varepsilon \underset{\varepsilon > 0}{\leq}} \ \ell \underset{\ell \text{ est un minorant}}{\leq} \boxed{u_n} \underset{(u_n) \text{ est decroissante.}}{\leq} u_{\bar{n}} \ \boxed{\leq \ell + \varepsilon}$$

D'où la convergence de $(u_n)$ à $\ell$.

3) $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} & n \geqslant 0 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

(i) Par induction sur $n$ : $u_1 = 1 > -1 = u_0$ ok

Heredité $u_{n+1} \geq u_n$

Donc $2u_{n+1} + 3 \geq 2u_n + 3$

$\sqrt{\cdot}$ fc qui preserve l'ordre.

$\sqrt{2u_{n+1} + 3} \geq \sqrt{2u_n + 3}$ c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

Par induction sur $n$ : $u_0 = -1 < 3$

Heredité $u_n \leq 3$

Donc $2u_n + 3 \leq 9$ d'où $u_{n+1} \leq 3$ car

$\sqrt{\cdot}$ fc qui preserve l'ordre.

(c) Soit $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$ on a aussi $l = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1}$

pour unicité de la valeur limite d'une suite (et continuité de la fc $\sqrt{\ }$) on a que l'identité $u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$ "passe à la limite" d'où $l = \sqrt{2l+3}$. On résu cette équation

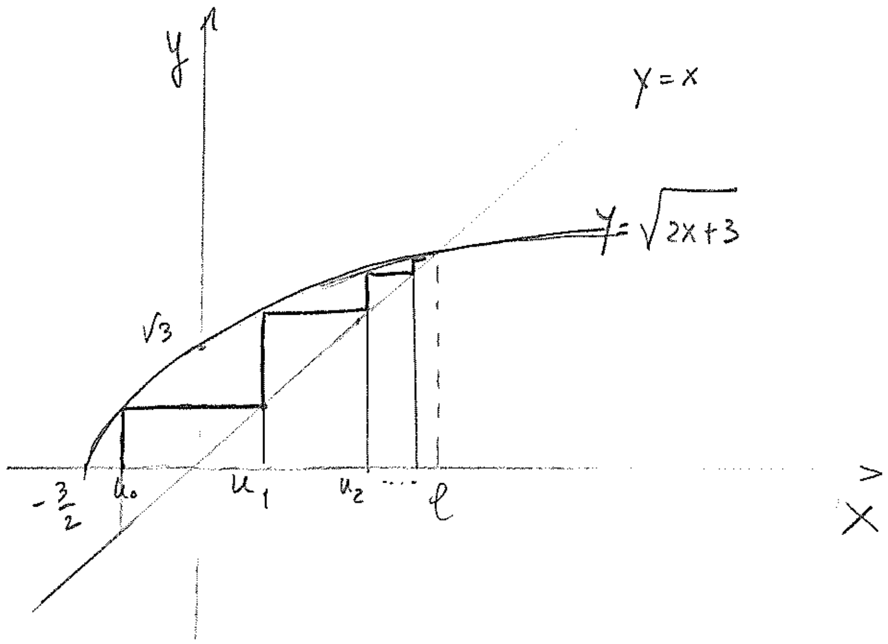
(d) pour trouver la valeur limite acceptable :

$$l^2 - 2l - 3 = 0 \quad , \quad l_1 = -1 \ , \ l_2 = 3 .$$

La valeur $l_1 = -1$ n'est pas acceptable car $l_1 < 0$ et $u_n > 0 \ \forall n > 0$.

Donc $l = l_2 = 3$. On remarque aussi que $l_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$ comme atteste le Thm sur la limite d'une suite numérique réelle croissante et majorée.

(e)



4)

(1) $u_n = \dfrac{3^n - 5n}{2^n - n^2}$ $\boxed{n > 2}$

(a) F car $(u_n) \nearrow$

(b) V car $u_n \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

(c) F car $u_n > 0$ pour $n > 2$

(2) $u_n = \dfrac{3n - 1}{n^2}$ $\boxed{n > 0}$

(a) F car le dénominateur grandit plus vite que le numerat.

(b) F car $u_n \sim \dfrac{3}{n}$

(c) F car $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 3 \ (\neq 0)$.

(3) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(\dfrac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \dfrac{-1}{n+1}\right)^{n+1-1}$

donc $u_n = \left(1 + \dfrac{-1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \dfrac{-1}{n+1}\right)^{-1}$

et $\left(1 + \dfrac{-1}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow e^{-1}$ pour $n \to +\infty$

et $\left(1 + \dfrac{-1}{n+1}\right)^{-1} \longrightarrow 1$ pour $n \to +\infty$

d'où (a) F (b) V et (c) F

(4) $u_{n+2} = -\dfrac{2}{3} u_{n+1} + \dfrac{1}{3} u_n$ , $u_0 = 1$ , $u_1 = -\dfrac{7}{3}$

équation caract : $r^2 + \dfrac{2}{3} r - \dfrac{1}{3} = 0$

$r_1 = +\dfrac{1}{3}$ , $r_2 = -1$

donc $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ et $r_1 \neq r_2$ d'où

$u_n = A\left(\frac{1}{3}\right)^n + B(-1)^n$ avec $\begin{cases} A + B = 1 \\ \frac{1}{3}A - B = -\frac{7}{3} \end{cases}$

On obtient $A = -1$ et $B = 2$.

d'où $\boxed{u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2(-1)^n}$ . Alors (a) F et (b) V.

5) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-2x+6}{x+1}$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = ]-\infty,-1[ \cup ]-1,+\infty[$

$\partial Df = \{-\infty, -1, +\infty\}$

Signe de $f$ : $x^2-2x+6 > 0 \quad \forall x \in Df$

donc $f > 0$ si $x > -1$.

Limites au bord :

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (on vérifie plus bas si l'asympt. oblique $\exists$.)

$\lim\limits_{x \to -1_-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1_+} f(x) = +\infty$

donc $x = -1$ est une asympt. vertic.

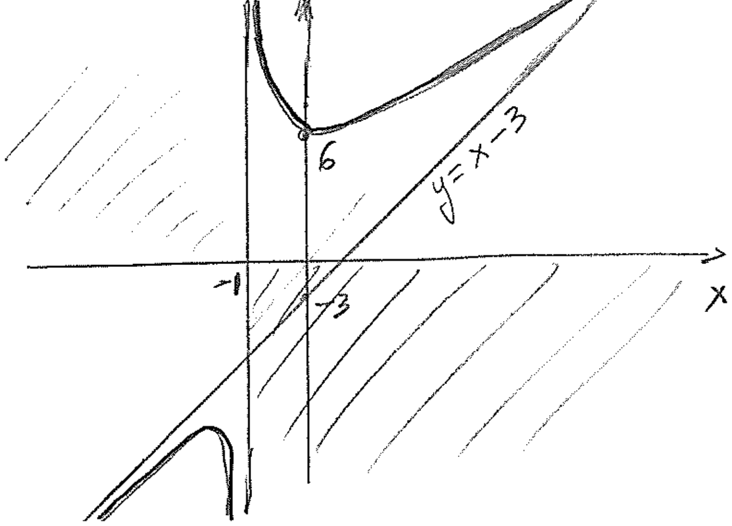
Pour l'asympt. oblique d'éq $y = mx+q$

on a $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

et $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = -3$ car

$$f(x) - x = \frac{x^2-2x+6-x^2-x}{x+1} = \frac{-3x+6}{x+1}$$

Donc $y = x-3$ est asympt obl. pour $x \to +\infty$ et pour $x \to -\infty$.




$f(0) = 6$