1] $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ (δ dépend de x_0 et de ε) tel que $(|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$

2] $\begin{cases} u_{n+2} = -\frac{3}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n & n \geq 0 \\ u_0 = 2 \ ; \ u_1 = 3. \end{cases}$

Polynôme caractéristique

$$r^2 + \frac{3}{2} r - \frac{1}{2} = 0 \quad ; \quad \Delta = \frac{9}{4} + \frac{4}{2} = \frac{17}{4}$$

$$r_{1,2} = \left(-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \right) \frac{1}{2}$$

il y a 2 racines réelles $\neq$

$$r_1 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \quad ; \quad r_2 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$(r_1 > 0)$ $(r_2 < 0)$

le terme générale de la suite est

$$u_n = A (r_1)^n + B (r_2)^n$$

avec A et B solution de $\begin{cases} A + B = 2 \\ A r_1 + B r_2 = 3 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} B = \dfrac{2 r_1 - 3}{(r_1 - r_2)} \\ A = \dfrac{2 r_2 - 3}{(r_2 - r_1)} \end{cases}$ $(r_1 - r_2) = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$(r_2 - r_1) = -\frac{\sqrt{17}}{2}$

$$A = \left(-\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{17}} \right) = -\frac{9}{\sqrt{17}} + 1$$

$$B = \left(-\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \right) \left(-\frac{2}{\sqrt{17}} \right) = \frac{9}{\sqrt{17}} + 1$$

$$|r_1| < 1 \quad ; \quad |r_2| > 1$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. (car $B > 0$)

3)
$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n + 3 & n \geq 0 \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Pour $n = 0$ on a

$$u_0 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$
$$\frac{(-1)^0}{2^0}(u_0 - 2) = 1\left(\frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{3}{2} \quad \text{ok}$$

On suppose vrai pour n et on montre pour $n+1$.

$$(u_{n+1} - 2) = -\frac{1}{2} u_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2} u_n + 1$$
$$= -\frac{1}{2}(u_n - 2) \underset{\text{Hp induction}}{=} -\frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{2^n}(u_0 - 2)$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(u_0 - 2) \quad \text{ok.}$$

- $|u_n| = |u_n - 2 + 2| \leq |u_n - 2| + |2|$

or $|u_n - 2| = \frac{1}{2^n}|u_0 - 2| \longrightarrow 0$ pour $n \to +\infty$

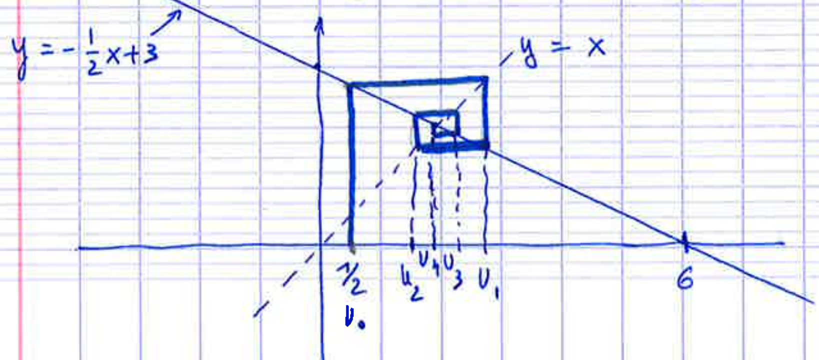
donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

- la suite est du type récursive ~~[illegible]~~ d'ordre 1 de la forme $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & n \geq 0 \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

avec $f : x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 3$ (éq d'une droite)

La fonction f est contractante sur $\mathbb{R}$ ($k = \frac{1}{2}$)

f est continue, elle a un seul point fixe $-\frac{1}{2}x + 3 = x$; $x = 2$ qui est la valeur limite de la suite.



4) (v_n), (w_n) 2 suites telles que

$\boxed{\cdot}$ $v_n \nearrow$ $\boxed{\cdots}$ $u_n \leq w_n$

$\boxed{\cdot\cdot}$ $w_n \searrow$ $\boxed{\cdots\cdot}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - w_n) = 0$

- En fait pour $\boxed{\cdots}$ et $\boxed{\cdot\cdot}$ on a

$$u_n \leq w_n \leq w_{n-1} \leq w_{n-2} \leq \dots \leq w_0$$

donc $u_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ avec $M = w_0$.

- La suite (v_n) est $\nearrow$ pour $\boxed{\cdot}$, bornée superieurement par M donc la suite (v_n) converge à l_u.
- La suite (w_n) converge aussi à l_w car w_n est $\searrow$ (pour $\boxed{\cdot\cdot}$) et bornée inferieurement (en fait pour $\boxed{\cdots}$ et $\boxed{\cdot}$ on a $w_n \geq v_n \geq u_{n-1} \geq v_{n-2} \geq \dots \geq v_0$) par $P = u_0$.
- Pour $\boxed{\cdots\cdot}$ on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - w_n) = 0$

Puisque v_n et w_n converge separement, on fait algèbre des limites

$$0 = \lim_{n \to +\infty} (v_n - w_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n - \lim_{n \to +\infty} w_n = l_u - l_w$$

d'où $l_u - l_w = 0 \implies l_u = l_w$.

---

5) $u_n = \dfrac{2 \ln n - 3\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} + 5}$

a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI

pour $n \to +\infty$ $\quad u_n \sim -3 \dfrac{n^{1/2}}{n^{1/3}}$ donc

étant $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ on a que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

$v_n = \dfrac{n^2 + 3}{3n^4}$

FAUX a) v_n n'est pas $\nearrow$ car le dénom. grandit plus vite que le numérat.

FAUX b) $v_n \sim \dfrac{1}{3n^2}$ et pas $v_n \sim \dfrac{1}{n^2}$

VRAI c) $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ en fait $\left(\dfrac{n^2+3}{3n^4}\right) \cdot n \searrow 0$

$u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^n$ a) VRAI b) FAUX c) FAUX

on transforme en utilisant

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n$$

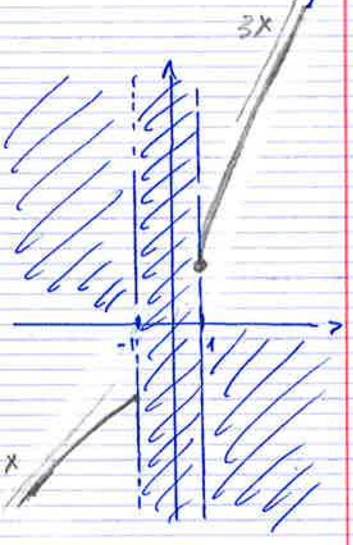
or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ pour $n \to +\infty$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

et $\left(1 + \frac{2}{3}\frac{1}{n}\right)^n \to e^{2/3}$ pour $n \to +\infty$

Algèbre des limites pour un produit de deux suites qui convergent on a

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{3}\frac{1}{n}\right)^n = 0 \cdot e^{2/3} = 0.$$

b) $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$



Signe : $f > 0$ pour $\sqrt{x^2-1} > -2x$

$f > 0 \ \forall (x > 0) \cap D_f$

pour $(x < 0) \cap D_f$, $\sqrt{x^2-1} > -2x$; $x^2 - 1 > 4x^2$

$3x^2 < -1$ jamais

Donc $f > 0$ pour $(x > 0) \cap D_f$

$f < 0$ pour $(x < 0) \cap D_f$

$f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$

Limites à $\pm\infty$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Asymptote oblique pour $x \to +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 3 \qquad \boxed{y = 3x}$$

$$(f(x) - 3x) = \left(2x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 3x\right) \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

$x \to -\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} \xrightarrow{x \to -\infty} 1 \qquad \boxed{y = x}$$

$$(f(x) - x) = \left(2x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x\right) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$$