Examen d'analyse en L1 – 7 janvier 2014 – U.N.S.A.

`Tout document est interdit.`

`Calculatrice, tél. portable, ordinateur, etc. sont aussi interdits !`

`Apporter le plus grand soin à la rédaction et justifier toute réponse !`

---

1. [*2 points*]

   On considère la suite $(u_n) = (-1)^n \dfrac{n}{n^2+1}$ pour $n \geq 0$.

   Déterminer $I = \inf_{n\geq 0}(u_n)$, $m = \min_{n\geq 0}(u_n)$, $S = \sup_{n\geq 0}(u_n)$, $M = \max_{n\geq 0}(u_n)$.

   Déterminer si la suite (u_n) est bornée ou pas, monotone ou pas, convergente ou pas.

---

2. [*3 points*]

   Calculer les deux limites suivantes :

   (i) $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty}[n^2\ln(n^2+7) - n^2\ln n^2]$, (ii) $\ell_2 = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$.

---

3. [*3 points*]

   (i) Ecrire le DL à l'ordre 3 pour la fonction $t \mapsto \sin(t)$ dans un voisinage de $t = 0$.

   (ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^\alpha)}{x - \sin(x)} & \text{pour } x > 0, \\ 6 & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

   Calculer les limites à gauche et à droite de f en $x = 0$ (discuter selon la valeur de α).

   Déterminer pour quelle valeur de α la fonction f est continue en $x = 0$.

---

4. *[4 points]*

   Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 x^3\, e^{-x^3}\, dx\,, \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{e^x - 2}{e^x + 1}\, dx\,.$$

   Utiliser l'intégration par parties dans le calcul de I_1.

   Utiliser le changement de variable $t = e^x$ dans le calcul de I_2.

---

5. *[5 points]*

   On considère la fonction réelle de variable x réelle :

$$f(x) = xe^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} \qquad \text{pour} \quad x \geq 0.$$

   (i) Déterminer le domaine Df de définition de f.

   (ii) Calculer les limites de f à la frontière de Df.

   (iii) Déterminer le domaine de définition de la fonction f' (indiquer les éventuels points où la fonction f n'est pas dérivable). Donner l'expression de f'.

   (iv) Etudier la croissance et décroissance de f.

   (v) Déterminer les éventuels asymptotes verticaux et horizontaux. Donner l'équation de l'asymptote oblique sous la forme $y = cx + d$, avec $c, d \in \mathbb{R}$.

   (vi) Tracer le graphique de la fonction f sur le plan Cartesien en accord avec les résultats obtenus pour les étapes données ci-dessus.

   (*Bonus*) *Etudier la concavité ou convexité de f à l'aide de f'' et indiquer les éventuels points de flexion de f.*

---

6. *[3 points]*

   Enoncer le théorème des accroissements finis.

   Expliquer comment on passe de ce théorème à l'inégalité des accroissements finis.

   Encadrer $\sqrt{3}$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[3, 4]$.

1)
$$u_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \qquad n \geq 0$$

$u_0 = 0$, $u_1 = \frac{-1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{5}$, $u_3 = \frac{-3}{10}$, ...

$I = \inf_n (u_n) = -\frac{1}{2} = m = \min_n (u_n)$

$S = \sup_n (u_n) = \frac{2}{5} = M = \max_n (u_n)$

La suite (u_n) est bornée car $u_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right]$.

La suite (u_n) n'est pas monotone
(car elle oscille entre valeurs positives
et négatives).

La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2)

$$l_1 = \lim_{n \to +\infty} \left[n^2 \ln(n^2+7) - n^2 \ln(n^2) \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[n^2 \ln\left(\frac{n^2+7}{n^2}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[n^2 \ln\left(1 + \frac{7}{n^2}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[n^2 \left(\frac{7}{n^2}\right) \right] = \boxed{7}$$

DL $\ln(1+t) = t + o(t)$ pour $t \to 0$ $\left(t = \frac{7}{n^2}\right)$

$$l_2 = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right] = 0 \cdot e^2 = \boxed{0}.$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2$

produit de 2 suites qui convergent

3) (i) $\sin(t) = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$

(ii) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^\alpha)}{x - \sin(x)} & x > 0 \\ 6 & x \leq 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x^\alpha)}{x - \sin(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^\alpha}{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6}}$$

DL calculé en (i)

(au numérateur $\sin(x^\alpha) \sim x^\alpha$

au denominateur $\sin(x) \sim x - \dfrac{x^3}{6}$)

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{6x^\alpha}{x^3}$$

$$= \begin{cases} 6 & \text{si } \alpha = 3 \\ 0 & \text{si } \alpha > 3 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 3. \end{cases}$$

La fonction f est continue en $x = 0$ si $\alpha = 3$.

4)

$$I_1 = \int_0^1 x^5 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 \underbrace{x^3}_{f} \underbrace{(-3x^2 e^{-x^3})}_{g'} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \left[x^3 e^{-x^3}\right]_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 3x^2 e^{-x^3} dx$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[e^{-x^3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \boxed{-\frac{1}{3e}.}$$

Malheureusement, une erreur de frappe s'est glissée et la fonction à intégrer était $x^3 e^{-x^3}$.

$$I_1 = \int_0^1 x^3 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3}\left[x e^{-x^3}\right]_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-x^3} dx \underset{\text{Trapèzes}}{\sim} -\frac{1}{3e} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{e} + 1\right)$$

4)

$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^x - 2}{e^x + 1}\, dx \underset{t = e^x}{=} \int_1^e \frac{t-2}{t+1} \frac{dt}{t}$$

$$t = e^x$$

$$\ln(t) = x$$

$$dt = e^x dx$$

$$= \int_1^e \frac{t-2}{t(t+1)}\, dt \overset{(*)}{=} \int_1^e \frac{-2\, dt}{t} + \int_1^e \frac{3\, dt}{t+1}$$

on decompose en fractions simples c'est-à-dire on cherche A et B Tq

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{t-2}{t(t+1)}$$

$$\frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)} = \frac{t-2}{t(t+1)} \qquad \begin{cases} A + B = 1 \\ A = -2 \end{cases}$$

d'où $A = -2$, $B = 3$. (*)

Donc

$$I_2 = -2 \left[\ln(t)\right]_1^e + 3 \left[\ln(1+t)\right]_1^e$$

$$I_2 = -2 + 3 \left(\ln(1+e) - \ln(2)\right)$$

d'où la valeur $\boxed{I_2 = -2 + 3 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$.

5) · $f(x) = x\, e^{\frac{1}{1-x}}$ pour $x \geq 0$.

(i) $Df = [0,1[\cup]1,+\infty[$, $f(x) \geq 0$ sur Df.

(ii) $\partial Df = \{0, 1, +\infty\}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \quad \left(f(t) \sim e^{\frac{1}{t}} \quad t \to 0^+ \right)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \quad \left(f(t) \sim e^{\frac{1}{t}} \quad t \to 0^- \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} \frac{1}{x}} = +\infty .$$

(iii) $Df' = [0,1[\cup]1,+\infty[$

En $x = 1$ la fonction n'est pas derivable (car elle n'est pas continue en $x = 1$)

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} + x \left(\frac{+1}{(1-x)^2} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$$

d'où $f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \left(1 + \frac{x}{(1-x)^2} \right)$.

(iv) Sur le Df , $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur Df.

En particulier

$$f'(0) = e \quad \text{et} \quad f'_+(1) = 0.$$

(v) La droite $\boxed{x = 1}$ est asymptote vertical à gauche.

Il n'y a pas d'asymptotes horizontaux.

On calcule l'asymptote oblique en utilisant un DL pour la fonction e^t.

$$e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + \frac{1}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

donc $$x e^{\frac{1}{1-x}} = x + \frac{x}{1-x} + o(1)$$

$$x e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{x - x^2 + x}{1-x} + o(1)$$

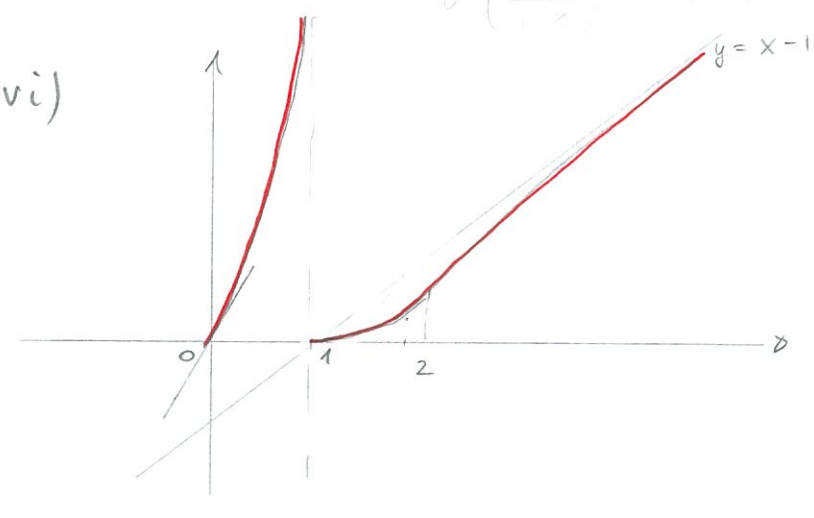
$$x e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{-1 + 1 + 2x - x^2}{1-x} + o(1)$$

$$x e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{-(1-x)^2}{1-x} + o(1)$$

d'où $$x e^{\frac{1}{1-x}} = x - 1 + o(1)$$ pour $x \to +\infty$

$\boxed{y = x - 1}$ asymptote oblique pour $x \to +\infty$.

(vi)



(Bonus) $Df'' = Df'$

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2}\left(1 + \frac{x}{(1-x)^2}\right) + e^{\frac{1}{1-x}}\left(\frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4}\right)$$

donc

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^4}\left(2(1-x)^2 + 3x - 2x^2\right) = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^4}(2-x)$$

$$2 + \cancel{2x^2} - 4x + 3x - \cancel{2x^2}$$

$f''(x) > 0$ pour $0 \leq x < 2$ (f convexe)

$x = 2$ est un point de flexion pour f.

6) Le Théorème des accroissements finis atteste que pour toute fonction réelle d'une variable réelle $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ supposée continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe un réel $a < c < b$ vérifiant
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pour obtenir l'inégalité des accroissem. finis on suppose que la fonction f' soit bornée sur $]a,b[$, c'est-à-dire $m \leq f' \leq M$

donc
$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \qquad (*)$$

Pour encadrer $\sqrt{3}$ sur $[3,4]$ on choisi $f(x) = \sqrt{x}$ et $\sqrt{3} = f(3) = f(a)$ sur $[3,4]$ (ici, $f(b) = \sqrt{4} = 2$)

A partir de $(*)$ on mets en évidence $f(a)$
$$f(b) - M(b-a) \leq f(a) \leq f(b) - m(b-a)$$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ avec $\frac{1}{4} \leq f' \leq \frac{1}{2}$. Alors $\boxed{\frac{3}{2} \leq \sqrt{3} \leq \frac{7}{4}}$.