Suites numériques

CHAPITRE 3

Plan

Introduction

La considération d'objets successifs, cette succession se poursuivant indéfiniment, appelle la notion de suite. Une suite numérique est la donnée de nombres réels ou complexes, indexés par les entiers naturels ; plus précisément, une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'attache essentiellement à l'évolution à long terme, c'est-à-dire à la convergence ou la divergence d'une suite, ou, de façon plus approfondie, au comportement asymptotique de la suite considérée (cf. ch. 8). Plusieurs notions fondamentales en analyse, qui seront vues en seconde année (séries, suites de fonctions, ...) s'appuient sur ce chapitre.

Prérequis

- Les nombres réels (ch. 1) et les nombres complexes (ch. 2), en particulier : valeur absolue d'un nombre réel, module d'un nombre complexe.
- Propriétés élémentaires des fonctions d'une variable réelle, continuité, dérivabilité, sens de variation, en vue de l'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (§ 3.4.3).

Objectifs

- Définition « rigoureuse » des notions de convergence et divergence pour une suite numérique.
- Manipulation des suites numériques convergentes et des suites réelles de limite infinie.
- Etude des suites réelles monotones.
- Examen de certaines suites usuelles : suites arithmétiques, suites géométriques, …
- Etude des suites définies par une relation de récurrence.

Une **suite (numérique)** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; au lieu de la noter $u : \mathbb{N} \underset{n \longmapsto u(n)}{\longrightarrow} \mathbb{K}$, on la note souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$, ou même encore $(u_n)_n$.

Une **suite réelle** (resp. **complexe**) est une suite (numérique) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{R} \quad (\text{resp. } \mathbb{C}).$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, u_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ **terme** de la suite.

On appelle aussi suite (numérique) toute application de $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; n \geqslant n_0\}$ dans $\mathbb{K}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé ; la plupart des notions étudiées ne feront intervenir les u_n qu'« à partir d'un certain rang ».

⚠ On veillera à ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son terme général u_n.

3.1 Convergence, divergence

3.1.1 Définitions

Définition 1

1) On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $l \in \mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon).$$

2) On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, c'est-à-dire :

$$\exists l \in \mathbb{K},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon).$$

3) On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** si et seulement si elle ne converge pas, c'est-à-dire :

$$\forall l \in \mathbb{K},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \text{ et } |u_n - l| > \varepsilon).$$

insister au rée

On remarque que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Méthode : pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, on peut essayer de montrer que la suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 1 **Unicité de la limite, si elle existe**

Si une suite numérique $(u_n)_n$ converge vers l_1 et converge vers l_2, alors $l_1 = l_2$.

Raisonnement par l'absurde.

Preuve : Raisonnons par l'absurde : supposons que $(u_n)_n$ converge vers l_1 et converge vers l_2, et que $l_1 \neq l_2$. Notons $\varepsilon = \dfrac{1}{3}|l_2 - l_1|$.

Puisque $(u_n)_n$ converge vers l_1 et converge vers l_2, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n - l_1| \leqslant \varepsilon \\ n \geqslant N_2 \Longrightarrow |u_n - l_2| \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$

En notant $N = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, on a alors $\begin{cases} |u_N - l_1| \leqslant \varepsilon \\ |u_N - l_2| \leqslant \varepsilon \end{cases}$,

Utilisation de l'inégalité triangulaire.

d'où $|l_2 - l_1| \leqslant |l_2 - u_N| + |u_N - l_1| \leqslant 2\varepsilon = \dfrac{2}{3}|l_2 - l_1|$, contradiction. ∎

La proposition précédente montre qu'on peut utiliser un symbole fonctionnel : si $(u_n)_n$ converge vers l, on dit que l est la **limite** de $(u_n)_n$, et on note $l = \lim\limits_{n\infty} u_n$ (ou : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$) ou $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$ (ou : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$).

Exemples :

1) Tout suite **stationnaire** (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang) converge.

2) La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 car

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon),$$

en prenant $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

Remarque : si deux suites numériques coïncident à partir d'un certain rang, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire que la convergence de l'une entraîne la convergence de l'autre. Autrement dit, on ne change pas la nature d'une suite (convergence, divergence) si on modifie ses termes jusqu'à un indice fixé.

Ainsi, A est un majorant d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si A est un majorant, dans $\mathbb{R}$, de l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Bien noter que A **ne doit pas dépendre de** n.

Définition 2

1) • On dit qu'un réel A est un **majorant** d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant A.$$

• On dit qu'un réel A est un **minorant** d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant A.$$

2) Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** (resp. **minorée**) si et seulement s'il existe un réel A tel que A soit un majorant (resp. minorant) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$.

Remarque : Une suite réelle $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Cette définition n'a de sens que pour une suite *réelle*.

Définition 3

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1) On dit que $(u_n)_n$ **tend vers** $+\infty$ (ou : **admet** $+\infty$ **pour limite**) si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A).$$

On note alors : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, ou $\lim\limits_{n\infty} u_n = +\infty$.

2) On dit que $(u_n)_n$ **tend vers** $-\infty$ (ou : **admet** $-\infty$ **pour limite**) si et seulement si :

$$\forall B < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant B).$$

On note alors : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} -\infty$, ou $\lim\limits_{n\infty} u_n = -\infty$.

Remarques :

1) $u_n \xrightarrow[n\infty]{} -\infty \Longleftrightarrow -u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

2) Toute suite réelle de limite $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.

Proposition 2

1) Toute suite complexe convergente est bornée.

2) Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée.

3) Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.

Preuve :

1) Supposons $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant 1).$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$:

$$|u_n| \leqslant |u_n - l| + |l| \leqslant 1 + |l|.$$

En notant $M = \mathrm{Max}(|u_0|, \ldots, |u_N|, 1 + |l|)$, on conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$.

2) Supposons $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant 1).$$

En notant $m = \mathrm{Inf}(u_0, \ldots, u_N, 1)$, on conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m$.

3) Se ramène à *2)* en considérant $(-u_n)_n$.

Intervalle est un ensemble qui contient tous les nombres reels compris entre deux bornes.

La Remarque *2)* revient à : si une suite n'est pas majorée on ne peut pas déduire qu'elle tende vers $+\infty$

Exercice 3.1.1.

Remarque :

1) Il existe des suites bornées **non convergentes** ; par exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Si une suite réelle tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée, mais **la réciproque est fausse** comme le montre l'exemple $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Toute suite non bornée est divergente.

3.1.2 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Bien noter que, dans cette Proposition 1, ainsi que dans la Proposition 2 ci-dessous, **on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.**

Proposition 1

Soient $(u_n)_n$ une suite réelle convergente, l sa limite, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1) Si $a<l$, alors il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant N_1 \Longrightarrow a<u_n).$$
2) Si $l<b$, alors il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant N_2 \Longrightarrow u_n<b).$$
3) Si $a<l<b$, alors il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant N \Longrightarrow a<u_n<b).$$

Preuve :

1) En appliquant la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l, on voit qu'il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left(n\geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n-l|\leqslant \frac{1}{2}(l-a)<l-a\right).$$
Mais : $|u_n-l|<l-a \Longrightarrow u_n-l>-(l-a)\Longrightarrow u_n>a$.
2) Analogue à *1)*.
3) Prendre $N=\mathrm{Max}(N_1,N_2)$.

Ainsi, en passant à la limite, on obtient des inégalités **au sens large** (même si les inégalités sur u_n sont strictes).

Proposition 2 **Passage à la limite dans des inégalités**

Soient $(u_n)_n$ une suite réelle convergente, l sa limite, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1) S'il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que $\big(\forall n\in\mathbb{N},\,(n\geqslant N_1\Longrightarrow u_n\geqslant a)\big)$, alors $l\geqslant a$.
2) S'il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que $\big(\forall n\in\mathbb{N},\,(n\geqslant N_2\Longrightarrow u_n\leqslant b)\big)$, alors $l\leqslant b$.
3) S'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\big(\forall n\in\mathbb{N},\,(n\geqslant N\Longrightarrow a\leqslant u_n\leqslant b)\big)$, alors $a\leqslant l\leqslant b$.

Preuve : Se déduit de la Proposition 1 en raisonnant par l'absurde.

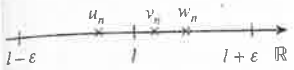
Le théorème d'encadrement, s'il s'applique, permet d'abord de ***conclure*** qu'une suite est convergente (et il donne aussi sa limite).

Proposition 3 **Théorème d'encadrement**

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que :
$$\begin{cases}\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant N\Longrightarrow u_n\leqslant v_n\leqslant w_n)\\ (u_n)_n \text{ et } (w_n)_n \text{ convergent vers une même limite } l\end{cases}$$
Alors $(v_n)_n$ converge aussi vers l.

Preuve :

Soit $\varepsilon>0$; puisque $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers l, il existe $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ tels que :
$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant N_1\Longrightarrow |u_n-l|\leqslant\varepsilon)\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant N_2\Longrightarrow |w_n-l|\leqslant\varepsilon)\end{cases}.$$



En notant $N_0 = \mathrm{Max}(N, N_1, N_2)$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N_0 \Longrightarrow \begin{cases} u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ |u_n - l| \leqslant \varepsilon \\ |w_n - l| \leqslant \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow -\varepsilon \leqslant u_n - l \leqslant v_n - l \leqslant w_n - l \leqslant \varepsilon \Longrightarrow |v_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $(v_n)_n$ converge vers l.

Remarques :

1) Le théorème d'encadrement, contrairement aux Propositions 1 et 2, permet de conclure à l'**existence** d'une limite, et se révèle ainsi très utile.

2) On peut schématiser le théorème d'encadrement sous la forme :

$$\begin{array}{ccccc} u_n & \leqslant & v_n & \leqslant & w_n \\ & {\scriptstyle n\infty}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle n\infty} & \\ & & l & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l.$$

Dans cet exemple, le terme général u_n de la suite est défini par un symbole $\sum$.

Exemple : soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} u_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} \\ u_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n+1} \end{cases}$

Comme $\dfrac{n^2}{n^2+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$, on conclut : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$.

Méthode pratique, souvent utilisable.

Méthode : pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément l de $\mathbb{K}$, il peut être commode de faire apparaître une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 0 et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant \varepsilon_n.$$

Propriété analogue au théorème d'encadrement, $+\infty$ jouant le rôle de l.

Proposition 4

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites réelles.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n) \\ u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array} \right|$, alors $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Preuve :

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$ fixé ; puisque $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Longrightarrow u_n \geqslant A).$$

En notant $N_2 = \mathrm{Max}(N, N_1)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant N_2 \Longrightarrow \begin{cases} u_n \geqslant A \\ u_n \leqslant v_n \end{cases} \Longrightarrow v_n \geqslant A\right),$$

et donc $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque : en passant aux opposés, on obtient la proposition suivante :

si $\left\{ \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant v_n) \\ u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{array} \right|$, alors $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Dans cet exemple, le terme général u_n de la suite est défini par un symbole $\sum$.

Exemple : soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+n^2} = \frac{n}{2}$

Comme $\dfrac{n}{2} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on conclut : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Enfin : $\dfrac{a^n}{n^\alpha} = \left(\dfrac{(a^n)^{\frac{1}{\alpha}}}{n}\right)^\alpha = \left(\dfrac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n}\right)^\alpha$, d'où le résultat :

$$\text{pour tout } (a,\alpha) \in]1;+\infty[\times\mathbb{N}^* \text{ fixé,} \quad \frac{a^n}{n^\alpha} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Nous verrons (7.5 Prop. 4) que ce résultat reste valable lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que l'exponentielle (a^n) **l'emporte sur** les puissances (n^α).

Exemples : $\dfrac{2^n}{n^3} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\dfrac{(1{,}01)^n}{n^{100}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\dfrac{n^2}{3^n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

5) Suites $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{K}$ fixé

Nous allons étudier, pour $a \in \mathbb{K}$ fixé, la convergence de la suite de terme général $\dfrac{a^n}{n!}$.

Notons $N = \mathrm{E}(|a|) + 1$; on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$:

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left(\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{|a|}{N}\right)\left(\frac{|a|}{N+1}\cdots\frac{|a|}{n}\right)$$
$$\leqslant \left(\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{|a|}{N}\right)\frac{|a|}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où le résultat : pour tout $a \in \mathbb{K}$ fixé, $\dfrac{a^n}{n!} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

On dit que la factorielle $(n!)$ **l'emporte sur** l'exponentielle (a^n).

Exemple : $\dfrac{2^n}{n!} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice-type résolu

Exemples de détermination de limites de suites

Pour les suites dont on donne ci-dessous le terme général, étudier la convergence et déterminer la limite si elle existe :

a) $\dfrac{\cos n}{n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$

d) $\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{E}\,(kx),\ x \in \mathbb{R}$ *e)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

Solution

a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\cos n}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit par le théorème d'encadrement :

$$\frac{\cos n}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\},\quad \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+2}},$$

Conseils

On majore la valeur absolue du terme général par un terme tendant vers 0.

On va encadrer le terme général par deux termes ayant la même limite.

Les méthodes à retenir

Convergence, divergence

- **De manière générale, pour étudier la convergence d'une suite**, privilégier l'application des énoncés des théorèmes du cours. Ne revenir aux méthodes de démonstration utilisées pour établir ces théorèmes, et en particulier ne revenir aux « epsilon », que dans le cas où les énoncés des théorèmes ne s'appliquent pas directement (ex. 3.1.13).
- **Pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ converge et trouver sa limite**, essayer d'exprimer le terme général u_n de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux (théorème d'encadrement, opérations algébriques sur les suites convergentes) (ex. 3.1.1 à 3.1.8, 3.1.10 à 3.1.13).

On verra d'autres idées et d'autres méthodes plus loin (pp. 101, 104, 107, 113, 118).

Exercices

3.1.1 Trouver $\lim\limits_{n\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\sin n\right)^{\frac{1}{n}}$.

3.1.2 Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}, & u_n \leqslant a\\ \forall n\in\mathbb{N}, & v_n\leqslant b\\ u_n+v_n \xrightarrow[n\infty]{} a+b. & \end{cases}$$

Montrer : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ et $v_n \xrightarrow[n\infty]{} b$.

3.1.3 Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes. Montrer que les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} x_n=\operatorname{Sup}(u_n,v_n)\\ y_n=\operatorname{Inf}(u_n,v_n)\end{cases}$$

convergent, et exprimer leur limites en fonction de celles de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

3.1.4 Pour les suites suivantes, dont on donne le terme général, montrer la convergence et déterminer la limite:

$a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ $\quad b)\ \dfrac{\sum_{k=0}^{n}(3k+1)}{\sum_{k=0}^{n}(2k+3)}$ $\quad c)\ \sqrt[n]{3+\sin n}$.

3.1.5 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0\in\mathbb{C}\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{1}{5}(3u_n+2\overline{u}_n)\end{cases}$$

3.1.6 Trouver $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{(2+3\mathrm{i})n+(4-\mathrm{i})}{n^2+n+1}\right)^n$

3.1.7 Soient $p\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_p,\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in(\mathbb{R}_+^*)^{2p}$. Montrer :

$a)\ \lim\limits_{n\infty}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^n\right)^{\frac{1}{n}}=\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant p} a_i$

$b)\ \lim\limits_{n\infty}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}}=\operatorname*{Min}_{1\leqslant i\leqslant p} a_i$.

3.1.8 Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, tel que $b^2-4ac<0$, et $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que :

$$au_n^2+bu_nv_n+cv_n^2 \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Montrer : $u_n\xrightarrow[n\infty]{} 0$ et $v_n\xrightarrow[n\infty]{} 0$.

3.1.9 Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ trois suites réelles, $a\in\mathbb{R}$. On suppose :

$$\begin{cases} u_n+v_n+w_n \xrightarrow[n\infty]{} 3a\\ u_n^2+v_n^2+w_n^2 \xrightarrow[n\infty]{} 3a^2.\end{cases}$$

Montrer :

$$u_n\xrightarrow[n\infty]{} a,\ v_n\xrightarrow[n\infty]{} a,\ w_n\xrightarrow[n\infty]{} a.$$

3.1.10 En utilisant :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x,$$

montrer l'existence de $\lim\limits_{n\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)$, et calculer cette limite.

3.1.11 Etudier (convergence, limite éventuelle) les suites définies par :

$$a)\ \begin{cases} u_0\in\mathbb{C}\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\dfrac{1}{n+3}\left(nu_n-\dfrac{1}{n+1}\right)\end{cases}$$

(on pourra considérer $n(n+1)(n+2)u_n$)