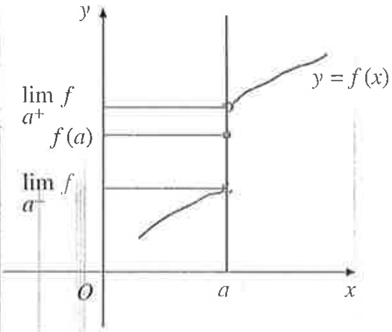
Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est monotone et si $a \in \overset{\circ}{I}$, alors f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f$.

Preuve :



L'application f est croissante et majorée par $f(a)$ sur $I \cap]-\infty; a[$, et est croissante et minorée par $f(a)$ sur $I \cap]a; +\infty[$. On peut appliquer le théorème précédent, d'où le résultat voulu.

On dispose d'un résultat analogue pour f décroissante.

4.3 Continuité

4.3.1 Définitions

1) Continuité en un point

Définition

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$. On dit que f est **continue en** a si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon).$$

On dit que f est **discontinue en** a si et seulement si f n'est pas continue en a.

La Proposition suivante est immédiate.

Lien entre continuité et limite de fonction.

Proposition 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$. Pour que f soit continue en a, il faut et il suffit que f admette $f(a)$ pour limite en a.

Discontinuité de 1re espèce

On dit que f admet une **discontinuité de 1re espèce en** a si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ n'est pas continue en } a \\ f \text{ admet une limite finie à gauche en } a \text{ (si } f \text{ est définie à gauche de } a) \\ f \text{ admet une limite finie à droite en } a \text{ (si } f \text{ est définie à droite de } a). \end{cases}$$

Par exemple, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet une discontinuité de seconde espèce en 0.

Si f admet une limite finie à gauche en a et une limite finie à droite en a, on appelle **saut de f en a** le réel $\sigma_f(a)$ défini par : $\sigma_f(a) = \lim\limits_{a^+} f - \lim\limits_{a^-} f$.

D'après 4.2.4 Prop. p. 143, si f est croissante sur l'intervalle I, alors, en tout point a de $\overset{\circ}{I}$, f admet une limite finie à gauche en a et une limite finie à droite en a, et $\sigma_f(a) \geqslant 0$; de plus, sous ces hypothèses, f est continue en a si et seulement si $\sigma_f(a) = 0$.

Lorsque f n'est pas continue en a et n'admet pas une discontinuité de 1re espèce en a, on dit que f admet une **discontinuité de 2nde espèce en** a.

La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Dans cet exemple, f est bornée, mais f n'est pas continue en 1.

Proposition 2

Si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Preuve :

Cf. 4.2.1 Prop. 2 p. 136.

Ce théorème fait le lien entre continuité et suites ; il est très important.

Proposition 3

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$; f est continue en a si et seulement si : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, on a :

$$f(x_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(a).$$

Preuve :

Cf. 4.2.1 Prop. 3 p. 136 et Prop. 1 ci-dessus.

Exercices 4.3.1 à 4.3.3.

2) Continuité globale

Définition 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **continue sur** I si et seulement si f est continue en tout point de I.

On note $C(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues sur I.

La notion de continuité n'est envisagée ici que sur un intervalle.

On appelle **sous-intervalle de** I tout intervalle J de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, tel que $J \subset I$.

Définition 2

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, J un sous-intervalle de I. On dit que f est **continue sur** J si et seulement si la restriction $f|_J : \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ est continue sur J.

Exemple :

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases} \end{array}$ est continue sur $]-\infty; 0]$, mais n'est pas continue sur $[0; +\infty[$.

Remarque :

Il est clair que, si $a < b < c$ et si $f : [a; c] \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $[a; b]$ et sur $[b; c]$, alors f est continue sur $[a; c]$.

Exercices 4.3.3 et 4.3.4.

3) Continuité par morceaux

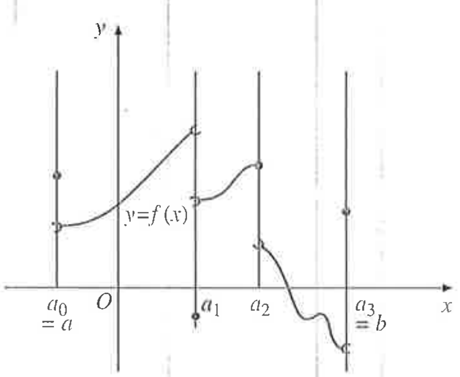
Définition

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{K}$.

On dit que f est **continue par morceaux sur** $[a; b]$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in [a; b]^{n+1}$ tels que :

$$\begin{cases} a = a_0 < \ldots < a_n = b \\ \text{Pour tout } i \in \{0, \ldots, n-1\},\ f \text{ est continue sur }]a_i; a_{i+1}[\text{ et admet} \\ \quad \text{une limite finie à droite en } a_i \text{ et une limite finie à gauche en } a_{i+1}. \end{cases}$$

Ceci revient à dire que, pour chaque $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f|_{]a_i;a_{i+1}[}$ admet un prolongement continu à $[a_i; a_{i+1}]$.



Les méthodes à retenir

Continuité : Définitions

- **Pour étudier la continuité d'une application,** essayer d'abord d'appliquer les théorèmes généraux.

  En un point où ceux-ci ne s'appliquent pas, tenir compte de la forme particulière de l'application étudiée (ex. 4.3.1 *a*), *b*))
- **Pour résoudre une équation fonctionnelle,** penser à appliquer l'hypothèse de manière itérée (ex. 4.3.2)
- Dans la recherche des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ conservant l'addition (ex. 4.3.3), on traitera successivement les cas de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

  Le lecteur trouvera une autre méthode, dans le cas où f est supposée dérivable, dans l'exercice 5.3.4 *a)* p. 193.
- **Pour résoudre des équations fonctionnelles ressemblant à celle de l'exercice 4.3.3,** essayer de se ramener à une fonction satisfaisant les conditions de l'exercice 4.3.3, puis utiliser la réponse de cet exercice 4.3.3 (ex. 4.3.4).

Exercices

4.3.1 Étudier, en tout point, la continuité des applications suivantes :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \sin x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

b) $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{p+q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \\ & \text{pgcd}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+ \end{cases}$$

(utiliser l'exercice 3.3.5 p. 108).

4.3.2 Trouver toutes les applications f dans chacun des cas suivants:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x)$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en 0,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en 1, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x^2)$.

4.3.3 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

4.3.4 Soit $a \in \mathbb{R}$; trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x-y) = f(x) - f(y) + axy.$$

(Utiliser l'exercice 4.3.3).

4.3.2 Opérations algébriques sur les applications continues

1) Continuité en un point

Proposition 1

Soient $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

1) Si f est continue en a, alors $|f|$ est continue en a.

2) Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a

3) Si f est continue en a, alors λf est continue en a

4) Si f et g sont continues en a, alors fg est continue en a

5) Si g est continue en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est continue en a

6) Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Preuve : analogue à la preuve de la Prop. 1 de 4.2.3 *1)* p. 139.

Remarque :
En notant pour toutes $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \qquad \mathrm{Inf}(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

(cf. 4.1.2 p. 125), on voit que, si f et g sont continues en a, alors $\mathrm{Sup}(f,g)$ et $\mathrm{Inf}(f,g)$ le sont aussi. En particulier, si f est continue en a, alors f^+ et f^- sont continues en a.

Proposition 2

Soient I,J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$, telles que $f(I) \subset J$; on note, abusivement $g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$.

Si $\left\{\begin{array}{ll} f & \text{est continue en } a \\ g & \text{est continue en } f(a) \end{array}\right|$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Preuve : analogue à la preuve de la Prop. de 4.2.3 *3)* p. 142.

La Proposition suivante est immédiate (cf. 4.2.3 *1)* Prop. 2 et Cor. p. 141).

Cas des fonctions à valeurs complexes

Proposition 3

Soient $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est continue en a

(ii) $\overline{f}$ est continue en a

(iii) Ré f et Im f sont continues en a.

2) Continuité globale

Les Propositions suivantes se déduisent aisément des Propositions 1 et 2 du § *1)* précédent.

Proposition 1

Soient $\lambda \in \mathbb{K}, f,g ; I \longrightarrow \mathbb{K}$.

1) Si f est continue sur I, alors $|f|$ est continue sur I

2) Si f et g sont continues sur I, alors $f+g$ est continue sur I

3) Si f est continue sur I, alors λf est continue sur I

4) Si f et g sont continues sur I, alors fg est continue sur I

5) Si g est continue sur I et si $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$, alors $\dfrac{1}{g}$ est continue sur I

6) Si f et g sont continues sur I et si $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

On a noté $C(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{K}$ (cf. 4.3.1 *2)* p. 146). Comme $C(I,\mathbb{K}) \neq \varnothing$ et en utilisant les propriétés *2)*, *3)*, *4)* ci-dessus, on voit que $C(I,\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de K^I pour les lois usuelles, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 \in C(I,\mathbb{K}) \\ C(I,\mathbb{K}) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel pour l'addition et la loi externe} \\ C(I,\mathbb{K}) \text{ est stable pour la multiplication.} \end{cases}$$

Remarque :
Si $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues sur I, alors $\mathrm{Sup}(f,g), \mathrm{Inf}(f,g)$ sont continues sur I.
En particulier, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I, alors f^+ et f^- sont continues sur I.

Brièvement : la composée de deux fonctions continues est continue.

Proposition 2

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$, tels que $f(I) \subset J$: on note abusivement $g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$.

Si f est continue sur I, et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Cas des fonctions à valeurs complexes.

Proposition 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est continue sur I

(ii) $\overline{f}$ est continue sur I

(iii) Ré f et Im f sont continues sur I.

Exercices 4.3.5 à 4.3.7.

Exercices

4.3.5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$.
On suppose f^p et f^q continues sur I (où $f^p = f \dots f$).
Montrer que f est continue sur I.

4.3.6 Déterminer l'ensemble des points de discontinuité de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \mathrm{E}(2x) - \mathrm{E}(x)$.

4.3.7 *a)* Trouver un exemple d'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f & \text{est discontinue en tout point de } \mathbb{R} \\ f \circ f & \text{est continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Trouver un exemple d'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} g \circ g & \text{est discontinue en tout point de } \mathbb{R} \\ g \circ g \circ g & \text{est continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

4.3.3 Continuité sur un intervalle

C'est un des théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Théorème **Théorème des valeurs intermédiaires**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, $(a,b) \in I^2$ tel que $f(a) \leqslant f(b)$. Alors f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire :

$$\forall \gamma \in [f(a); f(b)],\ \exists c \in I, \quad f(c) = \gamma.$$

Preuve :

On peut supposer $a < b$.

Remarquons d'abord que le résultat est trivial si $\gamma = f(a)$ ou $\gamma = f(b)$. Supposons donc $f(a) < \gamma < f(b)$.

Considérons $F = \{x \in [a;b]\ ; f(x) \leqslant \gamma\}$; F est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car $a \in F$) et majorée (par b, puisque $F \subset [a;b]$), donc F admet une borne supérieure, notée c. Nous allons montrer $f(c) = \gamma$.

Pour chaque n de $\mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in F$ et $y_n \in [a;b] - F$ tels que :

$$c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c < y_n < c + \frac{1}{n}.$$

Preuve de l'existence, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, de x_n et de y_n.

En effet, pour chaque n de $\mathbb{N}^*$:

- on a $c - \frac{1}{n} < c$, donc $c - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de F, d'où l'existence de x_n dans F tel que $c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c$
- on a $F \subset [a;c]$, $c < b$ (car f est continue en b et $\gamma < f(b)$) et $c < c + \frac{1}{n}$, d'où l'existence de y_n dans $[a;b]$ tel que $y_n \notin F$ et $c < y_n < c + \frac{1}{n}$ (tout élément de $\left]c; \mathrm{Min}\,(c + \frac{1}{n}, b)\right[$ convient pour être y_n).

Alors $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} c$ et $y_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} c$, d'où, par continuité de f en c : $f(x_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(c)$ et $f(y_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(c)$.

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leqslant \gamma < f(y_n)$, d'où, par passage à la limite : $\gamma = f(c)$.

Remarques :

1) On utilise souvent le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où $\gamma = 0$: si une application **à valeurs réelles, continue** sur un **intervalle**, prend une valeur $\leqslant \mathbf{0}$ et une valeur $\geqslant \mathbf{0}$, alors elle prend la valeur 0.

2) On peut exprimer le théorème des valeurs intermédiaires sous la forme plus condensée suivante : l'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

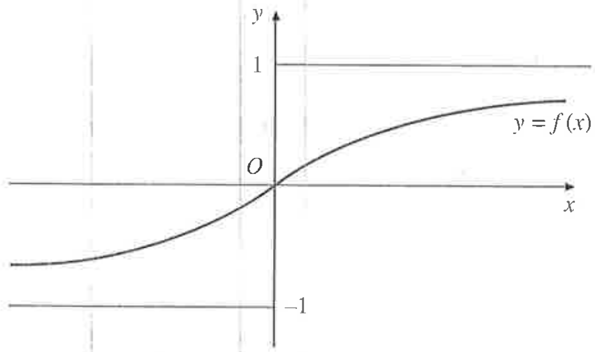
Exercices 4.3.8 à 4.3.14.

3) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On peut se demander si le « type » de I (c'est-à-dire : I est fermé, borné, semi-ouvert...) est conservé par f, c'est-à-dire si $f(I)$ est du même type que I. Nous verrons un peu plus loin (4.3.4 p. 153) que, si I est un segment, alors $f(I)$ l'est aussi. Mais les autres types d'intervalles ne sont en général pas conservés. Plus précisément, pour chacun des huit types d'intervalles autres qu'un segment (cf. 1.2.1 p. 46) pour I, $f(I)$ peut effectivement être de l'un des neuf types d'intervalles. Il faudrait exhaustivement donner ici $8 \times 9 = 72$ exemples (certains se déduisant d'autres). Donnons-en quelques-uns.

la propriété des v.i. correspond à la notion intuitive : il est possible de dessiner le graphe de la fonction sans jamais soulever le crayon.

Dans cet exemple, I n'est pas borné et $f(I)$ est borné.

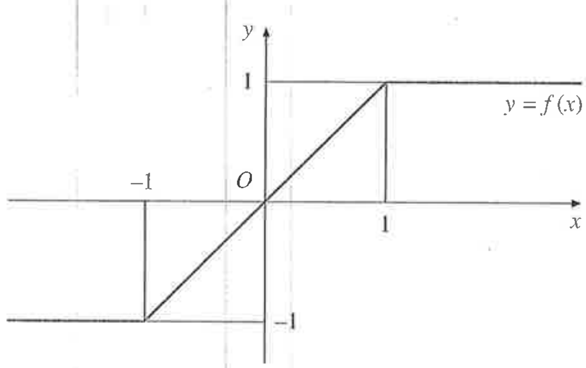
• $I = \mathbb{R}$ et $f(I) =]-1;1[$ pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x}{|x|+1}$.



Dans cet exemple, I est ouvert et $f(I)$ n'est pas ouvert.

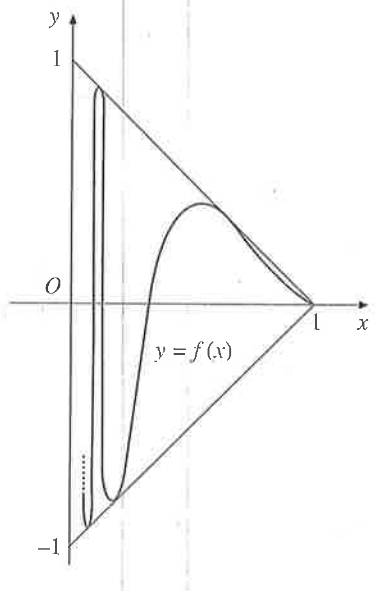
• $I = \mathbb{R}$ et $f(I) = [-1;1]$ pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$



Dans cet exemple, I est semi-ouvert et $f(I)$ n'est pas semi-ouvert.

• $I =]0;1]$ et $f(I) =]-1;1[$ pour $f :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (1-x)\sin(\frac{1}{x})$.



Les méthodes à retenir

Continuité sur un intervalle

- **Pour montrer qu'une équation $f(x) = 0$, d'inconnue x réelle, admet au moins une solution dans un intervalle I de $\mathbb{R}$**, essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire voir si f est continue sur I et prend sur I deux valeurs de signes contraires (ex. 4.3.8, 4.3.9, 4.3.12)
- **Il peut être commode de raisonner par l'absurde** (ex. 4.3.10).

Exercices

4.3.8 Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet au moins une solution.

4.3.9 Soient $f,g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$.
Montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \exists x \in [0;1], \quad f(x) = \lambda g(x)$.

4.3.10 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in I, \quad (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0.$$

Montrer : $f = g$ ou $f = -g$.

4.3.11 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in [0;1]$. Montrer :

$$\exists x \in [0;1], \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - x_k| = \frac{1}{2}.$$

4.3.12 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leqslant b$, et $f[a;b] \longrightarrow [a;b]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

4.3.13 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.
On pourra considérer l'application $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;1]$, par :

$$\varphi(t) = f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx).$$

4.3.14
a) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement décroissante.
Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \varphi$. (Utiliser l'exercice 4.3.13).
b) Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) + x = 0$? (Utiliser *a)*).

4.3.4 Continuité sur un segment

Rappelons (cf. 1.2.1 p. 46) qu'un segment (de $\mathbb{R}$) est par définition un intervalle fermé borné $[a;b]$, $a \leqslant b$.

C'est un des théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Théorème

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leqslant b$, et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Preuve :

1) Montrons que f est bornée.

Raisonnement par l'absurde.

• Supposons f non majorée. Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a;b]$ tel que $f(x_n) > n$.

D'après le **théorème de Bolzano-Weierstrass** (3.3 Th. p. 106), puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe une extractrice σ et un élément c de $[a;b]$ tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} c$. Puisque f est continue en c, on déduit : $f(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(c)$.

Mais d'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{\sigma(n)}) > \sigma(n) \geqslant n$, donc $f(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, contradiction.

Ceci montre que f est majorée.

• En appliquant le résultat précédent à $-f$ au lieu de f, on en déduit que f est minorée.

Finalement, f est bornée.

2) Montrons que f atteint ses bornes.

• Notons $M = \displaystyle\sup_{x\in[a;b]} f(x)$.

Pour chaque n de $\mathbb{N}^*$, puisque $M - \dfrac{1}{n}$ n'est pas un majorant de f, il existe x_n dans $[a;b]$ tel que :

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

D'après le **théorème de Bolzano-Weierstrass**, puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, il existe une extractrice τ et un élément d de $[a;b]$ tels que $x_{\tau(n)} \xrightarrow[n\infty]{} d$. Puisque f est continue en d, on déduit $f(x_{\tau(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(d)$.

En généra
$f(a)$ et f
croissan
$M = f($

Exercices

Mais d'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M - \frac{1}{\tau(n)} < f(x_{\tau(n)}) \leqslant M$, d'où, par passage à la limite :

$$M = f(d).$$

Ceci montre que M est atteint par f : $\exists d \in [a;b], M = f(d)$.

• En appliquant le résultat précédent à $-f$ au lieu de f, on en déduit que f atteint aussi sa borne inférieure.

La conclusion du Théorème signifie que $\underset{x\in[a;b]}{\operatorname{Inf}} f(x)$ et $\underset{x\in[a;b]}{\operatorname{Sup}} f(x)$ existent (dans $\mathbb{R}$) et qu'il existe $x_1, x_2 \in [a;b]$ tels que :

$$\underset{x\in[a;b]}{\operatorname{Inf}} f(x) = f(x_1) \quad \text{et} \quad \underset{x\in[a;b]}{\operatorname{Sup}} f(x) = f(x_2).$$

Proposition

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leqslant b$, et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est continue, alors $f([a;b])$ est un segment de $\mathbb{R}$.

Preuve :

• D'après le théorème des valeurs intermédiaires (4.3.3 Th. p. 150), $f([a;b])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

• D'après le théorème précédent, $f([a;b])$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et contient ses bornes.

Ainsi, si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $m = \underset{x\in[a;b]}{\operatorname{Inf}} f(x)$ et $M = \underset{x\in[a;b]}{\operatorname{Sup}} f(x)$ existent, et on a : $f([a;b]) = [m;M]$.

En général, m et M ne sont pas égaux à $f(a)$ et $f(b)$. Cependant, si, de plus, f est croissante, alors $m = f(a)$ et $M = f(b)$.

Exercices 4.3.15 à 4.3.17.

Calcul de valeurs approchées d'un zéro d'une fonction : méthode de dichotomie

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que f est strictement monotone et que $f(a)f(b) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires et par stricte monotonie, f admet un zéro et un seul $c \in [a;b]$.

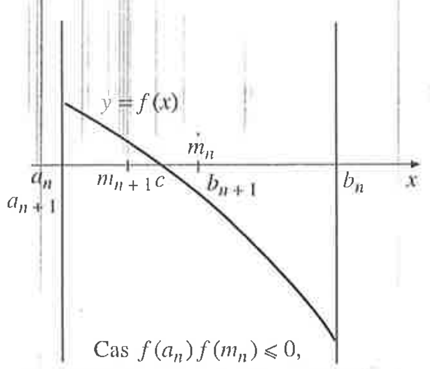
Pour calculer des valeurs approchées de c, on peut utiliser la méthode de **dichotomie** suivante. Notons :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

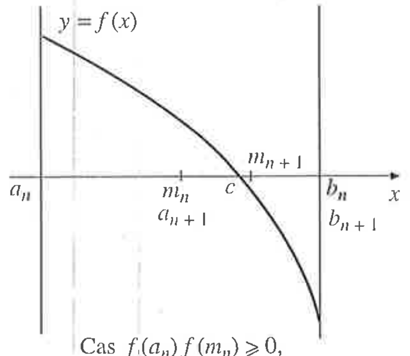
et considérons les suites réelles $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(m_n)_{n\geqslant 0}$ définies, par récurrence de la façon suivante :

• si $f(a_n)f(m_n) \leqslant 0$, on note $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$, $m_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$

• si $f(a_n)f(m_n) \geqslant 0$, on note $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$, $m_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.



Cas $f(a_n)f(m_n) \leqslant 0$,
par exemple : $f(a_n) \geqslant 0$ et $f(m_n) \leqslant 0$



Cas $f(a_n)f(m_n) \geqslant 0$,
par exemple : $f(a_n) \geqslant 0$ et $f(m_n) \geqslant 0$

La méthode porte le nom de **dichotomie** car on sépare l'intervalle $[a_n\,;\,b_n]$ contenant c en deux intervalles $[a_n\,;\,m_n]$, $[m_n\,;\,b_n]$ de même longueur et on détermine celui des deux qui contient c.

On va montrer que les deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers c.

Il est clair que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par b, et que la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par a. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2},$$

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n},$$

et donc : $b_n - a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes, donc convergent et ont la même limite ℓ. Comme de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant c \leqslant b_n,$$

on déduit, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini : $\ell = c$.

Ceci montre que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers c.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$,

donc a_n (et aussi b_n) est une valeur approchée de c à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près.

Pour obtenir une valeur approchée de c à 10^{-N} près, où $N \in \mathbb{N}$ est fixé, on pourra introduire le test d'arrêt $b_n - a_n \leqslant 10^{-N}$, si l'on ne tient pas compte des erreurs d'arrondis sur les valeurs successives des $a_n, b_n, f(a_n), f(b_n)$.

Les méthodes à retenir

Continuité sur un segment

- Le théorème fondamental (théorème du § 4.3.4 p. 152) permet souvent **d'établir l'existence d'un point en lequel une fonction atteint son minimum ou son maximum** (ex. 4.3.15 à 4.3.17).

Exercices

4.3.15 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que :
$a < b, f,g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in [a;b], \quad 0 < g(x) < f(x).$$

Montrer : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a;b], (1+\lambda)g(x) \leqslant f(x)$.

4.3.16 Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall x \in [0\,;\,1],\quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3f(x).$$

Montrer : $f = 0$.

4.3.17 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a\,;\,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer :

$$\operatorname*{Sup}_{x\in]a\,;\,b[} f(x) = \operatorname*{Sup}_{x\in[a\,;\,b]} f(x) \quad\text{et}\quad \operatorname*{Inf}_{x\in]a\,;\,b[} f(x) = \operatorname*{Inf}_{x\in[a\,;\,b]} f(x).$$

4.3.5 Application réciproque

Rappelons que I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide ni réduit à un point.

Pour une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée, nous nous intéressons à l'existence éventuelle d'une **fonction réciproque** pour f.

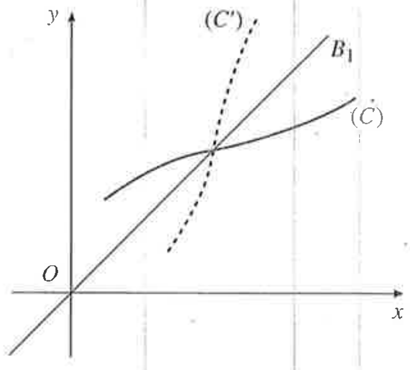
D'abord, on restreint f à son image, en considérant, au lieu de f, l'application

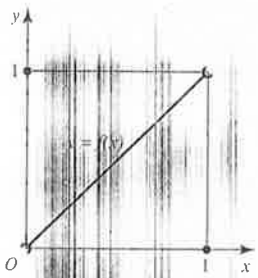
$\widetilde{f} : \begin{array}{l} I \longrightarrow f(I) \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$; il est clair que, par construction, $\widetilde{f}$ est surjective.

Si $\widetilde{f}$ est bijective, nous disons que f admet une fonction réciproque, qui sera

$\widetilde{f}^{-1} : f(I) \longrightarrow I$, ou, par abus de langage, l'application $\begin{array}{l} f(I) \longrightarrow \mathbb{R}. \\ y \longmapsto \widetilde{f}^{-1}(y) \end{array}$

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$, les courbes représentatives (C) de f et (C') de $\widetilde{f}^{-1}$ sont alors symétriques l'une de l'autre par rapport à la 1[re] bissectrice B_1, puisque : $M(x,y) \in (C) \iff M'(y,x) \in (C')$.





On notera que f peut admettre une application réciproque sans être continue.

Par exemple, l'application $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

est bijective et n'est pas continue sur $[0;1]$.

Ce théorème porte souvent le nom de : **théorème de la bijection monotone.**

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application ; notons $\widetilde{f} : \begin{array}{l} I \longrightarrow f(I). \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$

Si f est continue et strictement monotone, alors :

1) $f(I)$ est intervalle

2) $\widetilde{f}$ est bijective

3) $\widetilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même sens que f

4) $\widetilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$.

La continuité de f ne sert qu'ici, pour montrer que $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Preuve :

Supposons f continue et, par exemple, f strictement croissante.

1) D'après le théorème des valeurs intermédiaires (cf. 4.3.3 Th. p. 154), $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) • Par sa définition, $\widetilde{f}$ est surjective.

• Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $\widetilde{f}(x_1) = \widetilde{f}(x_2)$.

Si $x_1 < x_2$, alors $\widetilde{f}(x_1) < \widetilde{f}(x_2)$, contradiction.

Si $x_1 > x_2$, alors $\widetilde{f}(x_1) > \widetilde{f}(x_2)$, contradiction.

Le point essentiel est que l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ est total.

Donc $x_1 = x_2$.

Ainsi, $\widetilde{f}$ est injective.

3) Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$; notons $x_1 = \widetilde{f}^{-1}(y_1)$, $x_2 = \widetilde{f}^{-1}(y_2)$.

Si $x_1 \geqslant x_2$, alors, comme $\widetilde{f}$ est croissante, $\widetilde{f}(x_1) \geqslant \widetilde{f}(x_2)$, c'est-à-dire $y_1 \geqslant y_2$, contradiction. Donc $x_1 < x_2$.

Ceci prouve que $\widetilde{f}^{-1}$ est strictement croissante.

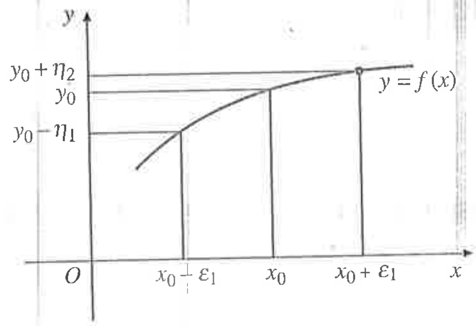
4) Soient $\varepsilon > 0$ et $y_0 \in f(I)$; notons $x_0 = \widetilde{f}^{-1}(y_0)$. On va montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall y \in J, \quad (|y - y_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon).$$

• Si x_0 n'est pas une éventuelle borne de I, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset I$.

Notons $\varepsilon_1 = \mathrm{Min}(\varepsilon, \alpha) > 0$. Puisque $\widetilde{f}$ et $\widetilde{f}^{-1}$ sont croissantes, on a, pour tout y de J :

$$|\widetilde{f}^{-1}(y) - x_0| \leqslant \varepsilon_1 \Longleftrightarrow x_0 - \varepsilon_1 \leqslant \widetilde{f}^{-1}(y) \leqslant x_0 + \varepsilon_1 \Longleftrightarrow \widetilde{f}(x_0 - \varepsilon_1) \leqslant y \leqslant \widetilde{f}(x_0 + \varepsilon_1).$$



Puisque $x_0 - \varepsilon_1 < x_0$ et que $\widetilde{f}$ est strictement croissante, on a :

$$\widetilde{f}(x_0 - \varepsilon_1) < \widetilde{f}(x_0) = y_0.$$

Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que

$$\widetilde{f}(x_0 - \varepsilon_1) = y_0 - \eta_1.$$

De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\widetilde{f}(x_0 + \varepsilon_1) = y_0 + \eta_2.$$

En notant $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$, on a donc, pour tout y de $f(I)$:

$$\begin{aligned}|y - y_0| \leqslant \eta &\Longrightarrow y_0 - \eta \leqslant y \leqslant y_0 + \eta \Longrightarrow y_0 - \eta_1 \leqslant y \leqslant y_0 + \eta_2 \\ &\Longrightarrow x_0 - \varepsilon_1 \leqslant \widetilde{f}^{-1}(y) \leqslant x_0 + \varepsilon_1 \Longrightarrow |\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon_1.\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que $\widetilde{f}^{-1}$ est continue en y_0.

• Si x_0 est une éventuelle extrémité de I, on adapte la démonstration précédente en n'utilisant qu'un des deux réels η_1, η_2.

Exercices 4.3.18 à 4.3.20.

Définition

Soient I, J des intervalles, $f : I \longrightarrow J$ une application.

On dit que f est un **homéomorphisme** si et seulement si :

$$\begin{cases} f & \text{est continue sur } I \\ f & \text{est bijective} \\ f^{-1} & \text{est continue sur } J. \end{cases}$$

Remarque : D'après le Théorème précédent, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\widetilde{f} \; : \begin{array}{l} I \longrightarrow f(I) \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ est un homéomorphisme.

Exemples :

Les applications suivantes sont des homéomorphismes :

$\begin{array}{c}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax+b\end{array}$ $((a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé tel que $a \neq 0)$,

$\begin{array}{c}\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \frac{1}{x}\end{array}$, $\begin{array}{c}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2\end{array}$, $\begin{array}{c}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3\end{array}$, $\begin{array}{c}\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \sin x\end{array}$.

Les méthodes à retenir

Application réciproque

- **Pour montrer qu'une application** $f : I \longrightarrow J$ **(où** I, J **sont des intervalles de** $\mathbb{R}$**) est bijective**, essayer de montrer que f est continue, strictement monotone, et que les extrémités de I sont envoyées par f (ou par limite de f) en les extrémités de J (ex. 4.3.19, 4.3.20).

  Cependant, il se peut que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective sans être continue (ex. 4.3.18).

Exercices

4.3.18 Montrer que $f : \begin{array}{c}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}\end{array}$ est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

4.3.19 Montrer que $f : \begin{array}{c}]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{1-x^2}\end{array}$ est bijective, et exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

4.3.20 Soit $f : \begin{array}{c}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^5 + x - 1\end{array}$.

a) Montrer que f est bijective.

b) Résoudre l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

4.3.6 Continuité uniforme

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est **uniformément continue sur** I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x',x'') \in I^2, \quad (|x' - x''| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon).$$

On notera que, dans cette définition, η ne doit pas dépendre de x' ni de x'', alors que, dans la définition de la continuité en un point a de I, η peut dépendre de a.

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition

Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

Un exemple de fonction continue et non uniformément continue

La réciproque de cette proposition est fausse : une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être continue sur I sans être uniformément continue sur I. Par exemple, considérons $f : \begin{array}{c}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2\end{array}$.

Montrons la négation de la phrase quantifiée définissant la continuité uniforme, c'est-à-dire, montrons :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x',x'') \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} |x' - x''| \leqslant \eta \\ |x'^2 - x''^2| > \varepsilon \end{cases}.$$

Exemple d'utilisation d'une condition suffisante, se traduisant par une implication *renversée*.

Imposons $x'' \geqslant 0$ et $x' = x'' + \eta$. Alors :

$$\begin{cases} |x' - x''| \leqslant \eta \\ |x'^2 - x''^2| > \varepsilon \end{cases} \Longleftrightarrow 2\eta x'' + \eta^2 > \varepsilon \Longleftarrow x'' > \frac{\varepsilon}{2\eta}.$$

Il suffit donc de prendre : $\varepsilon = 1,\ x'' = \dfrac{1}{\eta},\ x' = \dfrac{1}{\eta} + \eta$.

Nous disposons cependant, lorsque I est un segment de $\mathbb{R}$, du Théorème suivant :

Exercices 4.3.21 à 4.3.23.

Théorème — **Théorème de Heine**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leqslant b$, et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur $[a;b]$, alors f est uniformément continue sur $[a;b]$.

Preuve : (pouvant être omise en première lecture) :

Raisonnons par l'absurde. Supposons f continue et non uniformément continue. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

Négation de la phrase, quantifiée de continuité uniforme.

$$\forall \eta > 0,\ \exists (x',x'') \in [a;b]^2,\quad \begin{cases} |x' - x''| \leqslant \eta \\ |f(x') - f(x'')| > \varepsilon. \end{cases}$$

En particulier, pour chaque n de $\mathbb{N}^*$ (en prenant $\eta = \dfrac{1}{n}$), il existe $(x'_n,x''_n) \in [a;b]^2$ tel que :

$$\begin{cases} |x'_n - x''_n| \leqslant \dfrac{1}{n} \\ |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon \end{cases}$$

Utilisation successive de deux extractrices.

D'après le **théorème de Bolzano-Weierstrass** (3.3 p. 106), puisque $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée il existe une extractrice ρ et un élément c de $[a;b]$ tels que $x'_{\rho(n)} \xrightarrow[n\infty]{} c$. Puis, toujours d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, puisque $(x''_{\rho(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, il existe une extractrice τ et un élément d de $[a;b]$ tels que $x''_{\rho(\tau(n))} \xrightarrow[n\infty]{} d$.

Notons $\sigma = \rho \circ \tau$, qui est une extractrice.

On a construit une extractrice **commune** σ, pour laquelle $x'_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} c$ et $x''_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} d$.

Comme $(x'_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est extraite de $(x'_{\rho(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a : $x'_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} c$.

De plus : $x''_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} d$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x'_{\sigma(n)} - x''_{\sigma(n)}| \leqslant \dfrac{1}{\sigma(n)} \leqslant \dfrac{1}{n}$, on déduit, en passant à la limite : $c = d$.

D'autre part, puisque f est continue en c et d, on obtient $\begin{cases} f(x'_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(c) \\ f(x''_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(d) \end{cases}$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(x'_{\sigma(n)}) - f(x''_{\sigma(n)})| \geqslant \varepsilon$, on obtient en passant à la limite : $|f(c) - f(d)| \geqslant \varepsilon$, en contradiction avec $c = d$. ∎

Les méthodes à retenir

Continuité uniforme

- **Pour montrer qu'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) est uniformément continue sur I :**
  - si I est un intervalle fermé borné, appliquer le théorème de Heine
  - voir si f est lipschitzienne (cf. § 4.3.7 ci-après)
  - sinon, revenir à la définition en ε, η (ex. 4.3. 21).

Exercices

On abrège « uniformément continue » en « uc ».

4.3.21

a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer :

1) $f \quad \text{uc} \Longrightarrow |f| \quad \text{uc}$

2) $(f,\ g \quad \text{uc}) \Longrightarrow \lambda f + g \quad \text{uc}$

3) $\left\{ \begin{array}{l} g \quad \text{uc} \\ \exists C \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\quad g(x) \geqslant C \end{array} \right| \Longrightarrow \dfrac{1}{g} \quad \text{uc}$

4) $(f,\ g \quad \text{uc}) \Longrightarrow (\text{Sup}(f,g),\ \text{Inf}(f,g) \quad \text{uc})$.

b) Montrer que, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est uc et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est uc (telles que $f(I) \subset J$), alors $g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$ est uc.

4.3.22 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f :]a\,;\, b[\to \mathbb{R}$ continue, monotone, bornée. Montrer que f est uniformément continue sur $]a\,;\, b[$.

4.3.23 Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est uc} \\ f \text{ est bijective} \\ f^{-1} \text{ n'est pas uc} \end{array} \right.$$

4.3.7 Applications lipschitziennes

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1) Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est **k-lipschitzienne** si et seulement si :

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|.$$

2) On dit que f est **lipschitzienne** si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Une application $f : I \longrightarrow I$ est **contractante** si et seulement s'il existe $k \in [0;\, 1[$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Exemples :

1) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{|x|+1} \end{array}$ est 1-lipschitzienne car :

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{\big||x_1| - |x_2|\big|}{(|x_1|+1)(|x_2|+1)} \leqslant |x_1 - x_2|.$$

2) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ n'est pas lipschitzienne car le rapport $\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}$ (qui vaut $x_1 + x_2$) n'est pas borné lorsque (x_1,x_2) décrit $\mathbb{R}^2$, tel que $x_1 \neq x_2$.

Remarques :

1) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si $\left\{ \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y};\ (x,y) \in I^2,\ x \neq y \right\}$ est borné.

2) Nous verrons plus loin (5.2.2 Prop. p. 182) que toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et à dérivée bornée est lipschitzienne.

Cette propriété est d'un usage très commode et fréquent.

Exercices 4.3.24 à 4.3.26.

La notion d'application lipschitzienne est plus facile à appréhender que celle d'application uniformément continue car, dans la définition de « f est k-lipschitzienne », il n'y a pas de ε, η.

Proposition

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors f est uniformément continue.

Preuve : Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ k-lipschitzienne ($k \in \mathbb{R}_+$) et $\varepsilon > 0$. En notant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k+1} > 0$, on a :

$$\forall (x',x'') \in I^2, \quad \left(|x'-x''| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x')-f(x'')| \leqslant k\,\frac{\varepsilon}{k+1} \leqslant \varepsilon \right),$$

ce qui montre que f est uniformément continue sur I.

Remarque :
La réciproque de la proposition précédente est fausse : une application peut être uniformément continue sans être lipschitzienne, comme le montre l'exemple $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$. En effet :

f est uniformément continue.

- $\forall (x',x'') \in [0;1]^2, |\sqrt{x'}-\sqrt{x''}| \leqslant \sqrt{|x'-x''|}$ (cf. exercice 1.2.30 *b)*, p. 56), donc en prenant $\eta = \varepsilon^2$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x',x'') \in [0;1]^2, \quad (|x'-x''| \leqslant \eta \Longrightarrow |\sqrt{x'}-\sqrt{x''}| \leqslant \varepsilon).$$

f n'est pas lipschitzienne.

- $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$

Exercice-type résolu

Fonction atteignant son minimum

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geqslant f(x_0).$$

Solution

Puisque $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $A \in]-\infty;0]$ et $B \in [0;+\infty[$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;A], \ f(x) \geqslant f(0) \\ \forall x \in [B;+\infty[, \ f(x) \geqslant f(0). \end{cases}$$

D'autre part, puisque f est **continue** sur le **segment** $[A;B]$, l'application $f|_{[A;B]}$ admet une borne inférieure et atteint celle-ci. Il existe donc $x_0 \in [A;B]$ tel que :

$$\forall x \in [A;B], \ f(x) \geqslant f(x_0).$$

Comme $A \leqslant 0 \leqslant B$, on a $0 \in [A;B]$, et donc : $f(0) \geqslant f(x_0)$.
Ainsi :

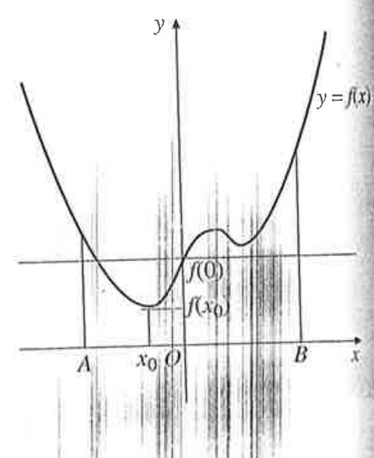
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;A] \cup [B;+\infty[, \ f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(x_0) \\ \forall x \in [A;B], \ f(x) \geqslant f(x_0), \end{cases}$$

et on conclut : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geqslant f(x_0)$.

Conseils

Application de la définition d'une limite infinie, en faisant intervenir, par exemple, $f(0)$.

Utilisation du théorème fondamental, appliqué à la restriction $f|_{[A;B]}$ de f au segment $[A;B]$.



Les méthodes à retenir

Applications lipschitziennes

- **Pour montrer qu'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) est lipschitzienne, on peut :**
  - revenir à la définition (ex. 4.3.24, 4.3.25)
  - voir si f est de classe C^1 et à dérivée bornée (cf. plus loin 5.2.2 Proposition p. 182).

Exercices

On abrège k-lipschitzienne en k-lip.

4.3.24

a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $(k,k') \in (\mathbb{R}_+)^2$.
Montrer :

1) $f \quad k\text{-lip} \Longrightarrow |f| \quad k\text{-lip}$.

2) $\left.\begin{array}{ll} f & k\text{-lip} \\ g & k'\text{-lip} \end{array}\right\} \Longrightarrow f+g \quad k+k'\text{-lip}$

3) $f \quad k\text{-lip} \Longrightarrow \lambda f \quad |\lambda| k\text{-lip}$

4) $\left\{\begin{array}{l} g \quad k\text{-lip} \\ \exists C \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ g(x) \geqslant C \end{array}\right| \Longrightarrow \dfrac{1}{g} \quad \dfrac{k}{C^2}\text{-lip}$

5) $\left\{\begin{array}{ll} f & k\text{-lip} \\ g & k\text{-lip} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{Sup}(f,g) & k\text{-lip} \\ \mathrm{Inf}(f,g) & k\text{-lip} \end{array}\right.$

b) Montrer que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est k-lip et si $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est k'-lip et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$ est $k'k$-lip.

4.3.25 *a)* Soient $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ lipschitziennes et bornées. Montrer que fg est lipschitzienne.

b) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, $f, g : [a\,;\,b] \to \mathbb{R}$ lipschitziennes. Montrer que fg est lipschitzienne.

4.3.26 Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est lip} \\ f \text{ est bijective} \\ f^{-1} \text{ n'est pas lip} \end{array}\right. .$$