**Agrégation Analyse** (F. Rouvière) **18.1.00**

## Théorème d'Abel, théorème de Tauber

Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite complexe, on note $A_n = a_o + \cdots + a_n$ pour $n \geq 0$, $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $\Delta a_o = a_o$.
Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de variable réelle $x$, de rayon de convergence $R$.

**1.** Exprimer $(1-x)f(x)$ et $f(x)/(1-x)$ comme sommes de séries entières.

**2.** Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, de rayon de convergence $R'$. On suppose $b_n > 0$ pour tout $n$, et $a_n \sim b_n$ lorsque $n \to \infty$.
  **a.** Si $R'$ est infini montrer que $R$ est infini et que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to \infty$.
  **b.** Si $R' = 1$ et $\sum b_n$ diverge, montrer que $R = 1$ et que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to 1$.

**3.** *Exemple.* On suppose que $a_n \sim n^{\alpha-1}$ lorsque $n \to \infty$, avec $\alpha > 0$. Donner un équivalent de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ quand $x \to \infty$.
[On s'aidera du développement de $(1-x)^{-\alpha}$, et on rappelle que

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} \ .]$$

**4.a.** On suppose la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$. Montrer que $f$ est continue sur $]-1,1]$ (**théorème d'Abel**).
[On pourra appliquer **2.b** aux séries $\sum (A_n/A)x^n$ et $\sum x^n$.]
  **b.** *Exemple.* Calculer $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1}(\sin n\theta)/n$, en étudiant $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1}(re^{i\theta})^n/n$ lorsque $r \to 1$.

On suppose désormais $R = 1$ et on cherche une réciproque à **4.a** :
(*) *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to \ell$ lorsque $x \to 1$ (avec $x < 1$), alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et vaut $\ell$.*

**5.a.** Donner un contre-exemple simple à (*).
  **b.** Montrer que (*) est vrai si les $a_n$ sont tous positifs.
[On pourra raisonner sur $\sup_{0\leq x<1, N\geq 1} \left(\sum_0^N a_n x^n\right)$.]

**6.** On va montrer que (*) est vrai si $na_n \to 0$ (**théorème de Tauber**). Pour cela on étudie la différence $\delta = \sum_{n=0}^{N-1} a_n - f(x)$ pour $0 \leq x < 1$.
  **a.** Montrer que, pour $N$ assez grand,

$$\left| \sum_0^{N-1} a_n \, (1-x^n) \right| \leq (1-x) \sum_0^{N-1} |na_n| \ \text{ et } \ \left| \sum_0^{N-1} a_n x^n \right| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)} \ .$$

  **b.** En déduire une majoration de $|\delta|$ si on choisit $1 - x = 1/N$. Conclure.

**Références.**
**1.** Chambert-Loir & C°, *Exercices d'analyse*, tome 1, p.106.
**2 à 6.** Pommellet, *Analyse*, p.232-236 ; Gourdon, *Analyse*, p.249-251 ; Titchmarsh, *Theory of functions*, p.9-10, 224 ; Pólya-Szegö, *Problems and theorems in analysis*, tome 1, p.20-22.